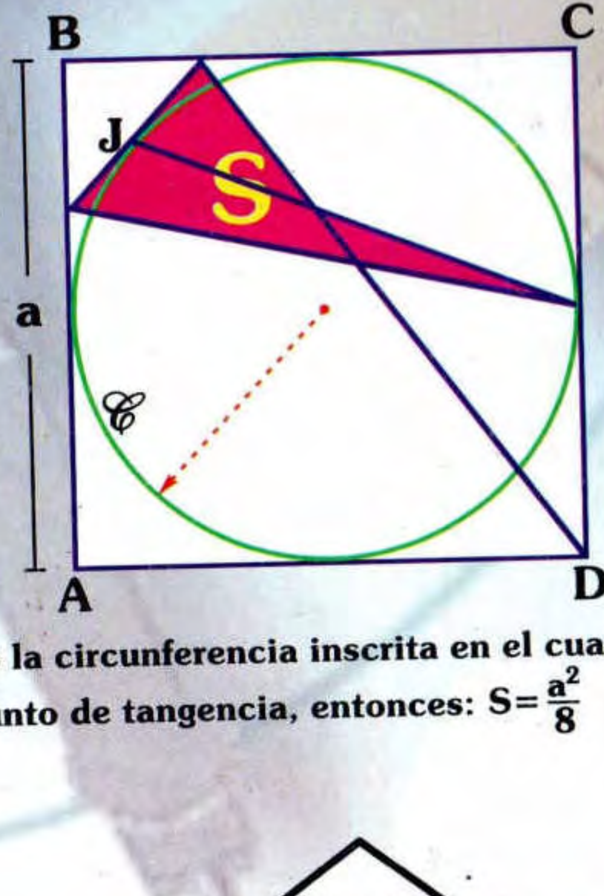
# 11 GEOMETRÍA

# ÁREAS DE REGIONES PLANAS

## TEORÍA - DEMOSTRACIONES TRAZOS AUXILIARES

**600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS**

**JULIO ORIHUELA BASTIDAS**




**Si 𝒞 es la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD,**
**J es punto de tangencia, entonces:** $S = \frac{a^2}{8}$

Editorial CUZCANO
*Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura*

# GEOMETRÍA

# ÁREAS
# DE REGIONES PLANAS

## TEORÍA - DEMOSTRACIONES

**300 Problemas Resueltos**
**300 Problemas Propuestos**

**JULIO ORIHUELA BASTIDAS**

Editorial CUZCANO

*Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura*

# GEOMETRÍA

# ÁREAS
## DE REGIONES PLANAS

**Autor :** Julio Orihuela Bastidas

**Editor :** Editorial Cuzcano

**Composición, Diagramación y Montaje :**
Área de cómputo y publicaciones de la Editorial Cuzcano



Jr. Coricancha N° 675 Zárate S. J. L. Lima - Perú

**Primera Edición :** Diciembre 2010

**Tiraje :** 1 000 ejemplares

**Obra editada, impresa y distribuida por:**
Editorial Cuzcano
Jr. Coricancha N° 675 Zárate S. J. L. Lima - Perú
Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña
Telefax 423-8154



Editorial CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

LIMA - PERÚ

# Introducción

Las matemáticas en nuestro país vienen atravesando por un gran cambio, producto del esfuerzo de muchos profesores y estudiantes que se preparan y afrontan el reto de superación, es agradable ver los recientes éxitos internacionales logrados por nuestros estudiantes, lo cual no contrasta con los resultados de la UNESCO donde nuestros escolares ocupan los últimos lugares. Por supuesto el éxito no es producto de la casualidad, pues en realidad nada surge de nada, es producto de la inversión de pocas instituciones privadas y del talento de muchos estudiantes y profesores que no hace mucho fueron estudiantes. La idea es hacer nuestra educación más competitiva, llegar a más zonas de nuestro país.

Con el deseo de aportar, de alguna manera sumar positivamente y unirme al grupo de profesores que viene impulsando el estudio de las matemáticas, desde mi campo que es la geometría, presento esta nueva publicación: "Áreas de regiones planas".

El tema es muy amplio y nos conduce a referirnos desde el origen de la geometría hasta nuestros días, realizar muchas notas históricas, aplicaciones en juegos educativos y pedagógicos, por supuesto mi objetivo es llegar a un público amplio en especial al nivel preuniversitario para ello he dosificado el tipo de problemas para un público básico hasta uno avanzado. He sacrificado algunas veces la belleza de la geometría y he enfocado el tema netamente académico.

Se trata de un libro teórico y práctico, inicio la obra indicando la idea de área, así como enunciando el grupo de axiomas para poder demostrar la mayoría de expresiones dadas para el cálculo de áreas: En la primera parte de la teoría me he referido a la parte básica de áreas, para todo público escolar y preuniversitario; en la segunda parte es para un nivel UNI donde se requiere combinar el curso con otras ramas como trigonometría y álgebra; en la parte final de la teoría es para un público de mayor experiencia y como entrenamiento para estudiantes preolímpicos y para quien desea profundizar un poco más en la geometría. En cuanto a la parte práctica esta compuesto por 600 problemas, divididos en niveles, según ello el estudiante se ubicará y avanzará las soluciones planteadas como guías.

La obra es producto de la experiencia e investigación del autor realizadas en aulas académicas, centros superiores, y en el interactuar con los estudiantes, amigos y profesores, a quienes estoy muy agradecido, por sus sugerencias y críticas objetivas, las cuales me permiten mejorar en cada nueva publicación.

***Julio Orihuela Bastidas***

## Agradecimiento

- A mis padres Margarita y Moises por su apoyo incondicional.
- A todo el grupo de la Editorial Cuzcano.
- A todos mis alumnos y ex alumnos que sin su apoyo estas publicaciones no serian posible.

Índice

# ÁREAS DE REGIONES PLANAS

Índice

# ÁREAS DE REGIONES PLANAS

GEOMETRÍA

*Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.*

**Bertrand Russell**

## NOCIONES PREVIAS

La palabra Geometría, etimológicamente quiere decir medida de la Tierra, según el historiador Heródoto (siglo V a.C) atribuyó a los egipcios el orígen de esta ciencia, la cual consistía en una colección desorganizada de reglas para calcular "áreas", "volúmenes", realizar construcciones sencillas, etc. La idea del área no dista mucho de lo moderno, se pagaba impuestos en función del lote que ocupaban. Los rebalses del Río Nilo muchas veces hacía desaparecer parte de la tierra de los agricultores, entonces los cobradores del faraón tenían que recalcular el "área" de cada terreno.

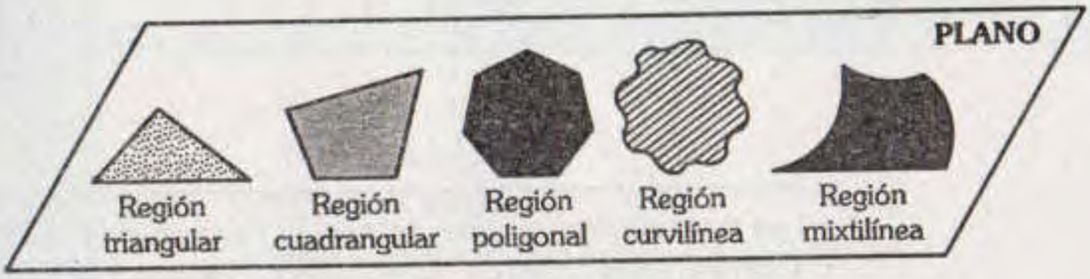
Durante los primeros dos mil años, la geometría fue un conjunto de conocimientos empíricos, obtenidos por inducción sin el fundamento de una demostración lógica. Los griegos inclinados por el temperamento a la filosofía y a la abstracción tomaron la geometría de los griegos y lo rehicieron dándole el carácter deductivo, comenzando por Tales (Siglo VI a.C) y consolidandose con la obra de Euclides (siglo III a.C), en cuya obra "Los Elementos" donde se presenta a la geometría organizada deductivamente. Este modelo se toma hasta nuestro días y es así que se dice que la matemática es estructurada.

Según Puig Adams, la edificación racional de la geometría se funda en las siguientes normas: enunciar los conceptos; admitir sin demostración ciertas propiedades que relacionan estos conceptos (axiomas); y deducir lógicamente las restantes propiedades.

Para todas las publicaciones he tratado de seguir dicho modelo de construcción de la geometría.

## REGIÓN PLANA LIMITADA

Dada una línea cerrada en el plano (poligonal, curva o combinación de ellas), e denomina región plana limitada a la reunión de todos los puntos interiores a dicha ínea con su frontera, así tenemos:

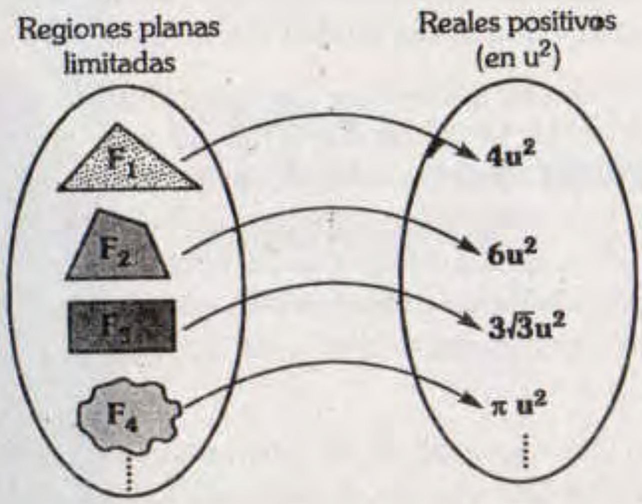



## ÁREA

Elijamos una unidad de medida para las longitudes (centímetros, metros, pulgadas, yarda, etc), todos los cálculos se realizarán en función a esa longitud, aunque en la mayoría de ejercicios no se mencionen.

Asignaremos a cada región plana cerrada un número real positivo denominada área expresado en unidades cuadradas, la cual representará la extensión comprendida de la región plana limitada.

Por ejemplo:




Denotemos :

$S_{(F)}$ : Área de la figura F

$S_{(F_1)} = 4u^2$

$S_{(F_2)} = 6u^2$

$S_{(F_3)} = 3\sqrt{3}u^2$

$S_{(F_4)} = \pi u^2$

***Notación:***

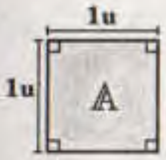
Aunque no hay una notación general, se suele usar las siguientes:

Área de la región triángular PQR:

$S_{\Delta PQR}$ ; (PQR) ; $S_{(PQR)}$ ; [PQR] ; $S_{PQR}$ ; $\mathbb{A}$

Si no hay lugar a ambigüedad: colocar una letra mayúscula sobre la región sombreada (algunas veces con subíndices)

## AXIOMAS SOBRE ÁREAS

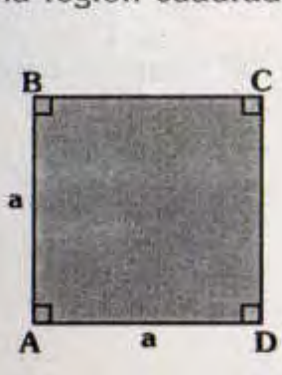
| | | |
|---|---|---|
| Un cuadrado cuyo lado es "1u", cumple que el área de su región es $1u^2$. | Regiones congruentes limitadas tienen áreas iguales. | Una región plana limitada puede ser descompuesta en subregiones, entonces la suma de áreas de dichas subregiones es el área inicial. |
|  | | |
| $\mathbb{A}=1u^2$ | $\mathbb{A}=\mathbb{B}$ | $S_T=S_1+S_2+S_3+S_4$ |

### Nota

* El último axioma es a su vez un buen criterio para la resolución de problemas cuando el área de la región no es sencilla.
* En cálculo superior se calcula áreas de superficies curvas (no planas) con la ayuda de métodos de geometría diferencial; así como también hallar áreas bajo la curva cuando la región no es limitada (como por ejemplo, en estadística, cuando se estudia la normal)

## TEOREMA (ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRADA)

El área de una región cuadrada es igual al cuadrado de la longitud de su lado.




En el gráfico, ABCD es un cuadrado.

Se cumple:

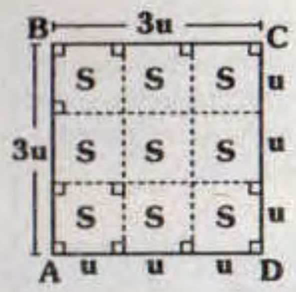
$$S_{(ABCD)} = a^2$$

**Prueba**

En realidad la prueba no es tan sencilla para todos los casos, veamos todas las posibilidades:

– Si $a \in \mathbb{N}$

(Elijamos un número sencillo: "a=3u", pero se prueba análogamente para todo a)



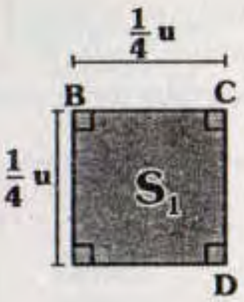

- Se divide en "3" partes iguales (en general en "a" partes iguales) cada lado, luego trazamos paralelas a los lados, tendremos "$3^2$" nuevos cuadrados (en general: "$a^2$" nuevos cuadrados). Usando los axiomas:
- Cada cuadrado pequeño tiene área "$S=1u^2$" y como el total es:

$$S_{(ABCD)} = 9S = 3^2(1u^2) = 9u^2$$

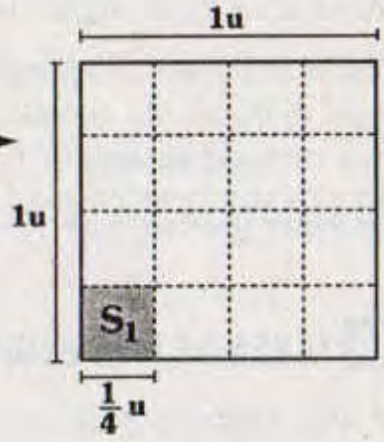
En general: $S_{(ABCD)} = a^2$

– Si "a" es de la forma: $\frac{1}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$

Elijamos para fines didácticos "$a = \frac{1}{4}$" pero también se puede hacer en general




considerando el cuadrado de lado "1u" →




Se descompone en cuatro partes cada lado, tendremos "$4^2$" nuevos cuadrados, cuya área será: "$S_1$"

Luego $\quad 4^2 S_1 = 1u^2 \Rightarrow S_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 u^2$

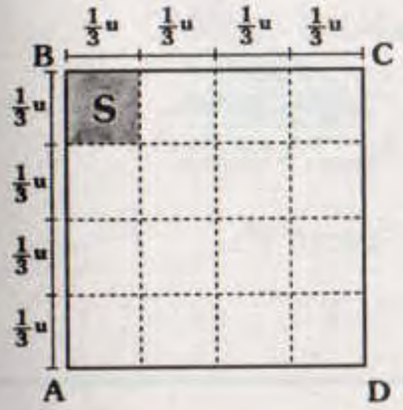
En general: $\quad S_1 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 u^2 = a^2$

– Si a es de la forma: $\frac{m}{n}$ ; $m \wedge n$ son naturales.

se puede decomponer así: $\frac{m}{n}=m\left(\frac{1}{n}\right)$

Tomemos por ejemplo: $a=\frac{4}{3}u=4\left(\frac{1}{3}u\right)$

$S_{(ABCD)}=S$




Como ya fue probado que si el lado del cuadrado es $\frac{1}{n}$, entonces su área es : $\left(\frac{1}{n}\right)^2$

$$\Rightarrow\ S=\left(\frac{1}{3}\right)^2u^2\quad \Rightarrow\ S_{(ABCD)}=\frac{16}{9}u^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2u^2$$

En general: $S_{(ABCD)}=a^2$

- Si "a" es irracional, la prueba se realiza con límites (ver anexos), de todos maneras se prueba que:

$$S_{(ABCD)}=a^2;\ \text{donde } a\in\mathbb{R}^+$$

## TEOREMA (ÁREA DE UNA REGIÓN RECTANGULAR)

El área de una región rectangular es el producto de sus dimensiones.

*Prueba*

Sea el rectángulo ABCD, cuyos lados son AB=x y BC=z, como ya conocemos el área de una región cuadrada, formemos el cuadrado cuyo lado mide "x+z"

- Como ABCD es congruente con MDFG

$$\Rightarrow\ S_{(ABCD)}=S_{(MDFG)}=S_1$$

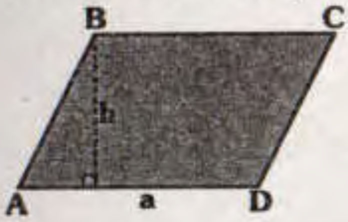
- $S_2=z^2 \wedge S_3=x^2$, luego:

$$\underbrace{S_{(HBEG)}}=(x+z)^2$$

$$\underbrace{S_2}_{z^2}+\underbrace{S_3}_{x^2}+2S_1=x^2+z^2+2xz \qquad \therefore\ \mathbf{S_1=xz}$$

## TEOREMA (ÁREA DE UNA REGIÓN PARALELOGRÁMICA)

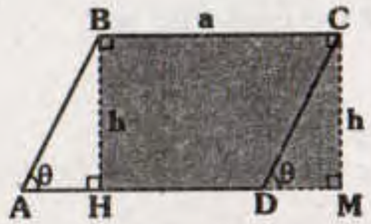
n el gráfico; ABCD es un paralelogramo




e cumple:

$$\boxed{S_{(ABCD)} = ah}$$

Prueba




Como $\triangle AHB \cong \triangle DMC$

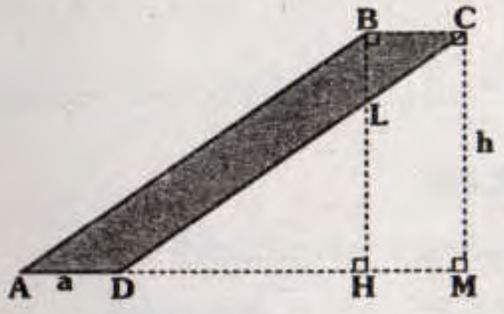
$\Rightarrow S_{\triangle AHB} \cong S_{\triangle DMC}$

$\Rightarrow S_{(ABCD)} = S_{(HBCD)}$

$\therefore S_{(ABCD)} = ah$

Observación

- También se cumple en este caso:



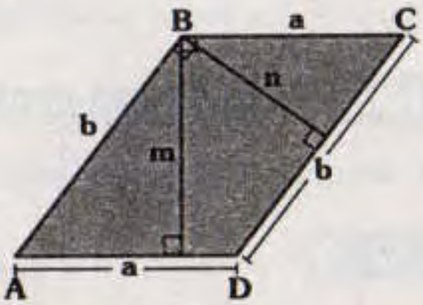

$\triangle AHB \cong \triangle DMC$

$\Rightarrow S_{\triangle AHB} = S_{\triangle DMC}$

$\Rightarrow S_{(ABLD)} = S_{(HLCM)}$

$\Rightarrow S_{(ABCD)} = S_{(HBCM)} = ah$

- Se deduce:




$$\boxed{am = bn}$$

## REGIONES EQUIVALENTES

e llaman regiones equivalentes, a aquellas regiones que tienen áreas iguales:

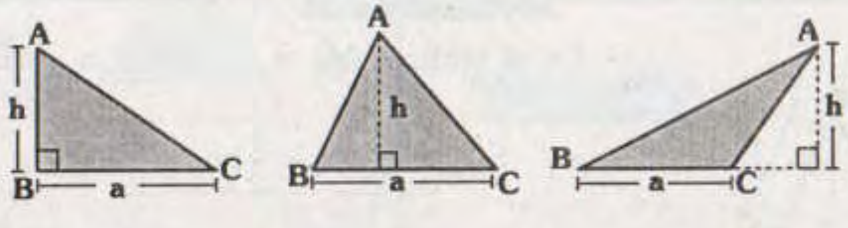
Si $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{C} \Rightarrow$ Dichas regiones son equivalentes.

Una aplicación sobre regiones equivalentes las veremos más adelante en el juego chino TANGRAM.

# ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

## TEOREMA (Fórmula básica)

El área de toda región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de un lado con la altura relativa a dicho lado.



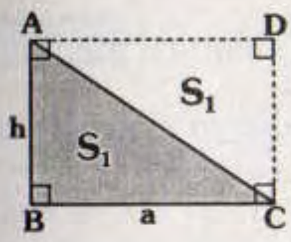

(ABC): Área de la región triangular ABC

Se cumple:

$$S_{(ABC)} = \frac{ah}{2}$$

*Prueba*

Veamos para cada caso:

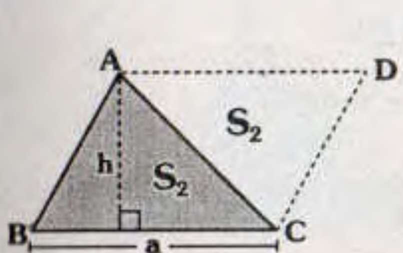



- Completamos el rectángulo ABCD, luego tendremos:

$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle CDA \Rightarrow S_{\measuredangle ABC} = S_{\measuredangle ADC} = S_1$$

- Por teorema: $2S_1 = ah$

$$\therefore \quad S_1 = \frac{ah}{2}$$

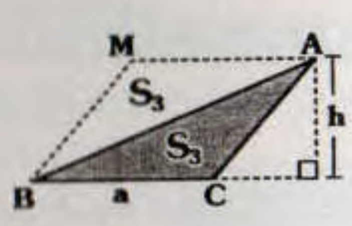



- Completamos el paralelogramo ABCD, luego tendremos:

$$\Delta ABC \cong \Delta CDA \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC} = S_2$$

- Por teorema: $2S_2 = ah$

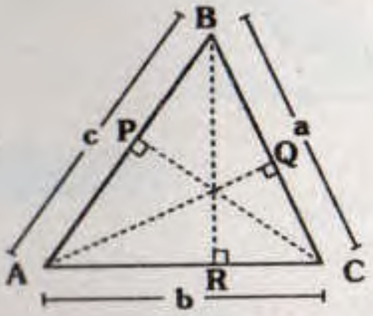
$$\therefore \quad S_2 = \frac{ah}{2}$$




- Análogamente completamos el paralelogramo ACBM, tendremos $2S_3 = ah$

$$\therefore \quad S_3 = \frac{ah}{2}$$

**Observaciones**




En el gráfico, $AQ = h_a$, $CP = h_c$ y $BR = h_b$

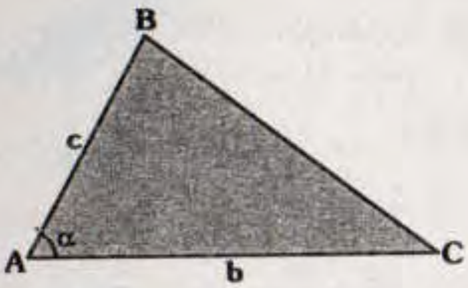
$$\Rightarrow \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ah_a = bh_b = ch_c}$$

Un resultado similar se obtiene con semejanza y con "Relaciones Métricas" concluyendo que la mayor altura es relativa al menor lado y viceversa.

## TEOREMA (Fórmula trigonométrica)

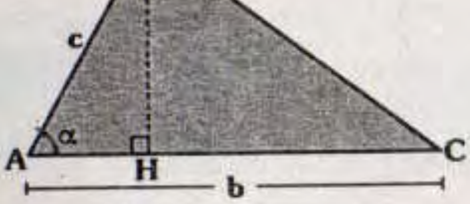
l área de toda la región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de dos e sus lados multiplicado con el seno de la medida del ángulo entre dichos lados.




En el gráfico se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{cb}{2}\operatorname{sen}\alpha}$$

**Prueba**

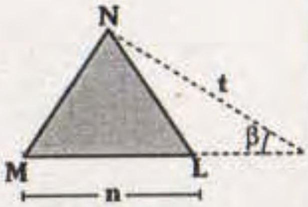



- Se traza la altura BH
- En ⊿AHB: BH=c.senα
- $$S_{\Delta ABC} = \frac{b(BH)}{2}$$

$$\therefore \quad S_{\Delta ABC} = \frac{bc}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

**Observaciones**

- En forma similar al anterior, se prueba los siguientes resultados:




$$S_{\Delta EFG}=\frac{a\ell}{2}\operatorname{sen}\alpha \qquad S_{\Delta MNL}=\frac{nt}{2}\operatorname{sen}\beta$$

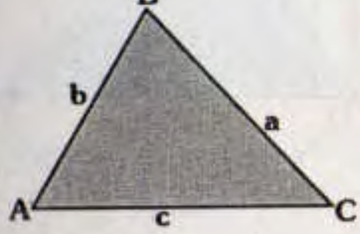
- Para el triángulo equilátero, se cumple:

$$S=\frac{\ell\ell}{2}\operatorname{sen}60°$$

$$S=\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

## TEOREMA (Fórmula de Herón)

El área de toda región triangular es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro, con las diferencias del semiperímetro con las longitudes de cada lado.



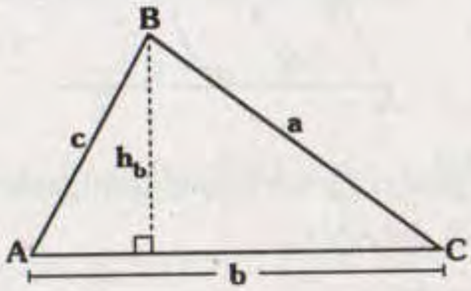

En el gráfico, sea **p** el semiperímetro

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

Se cumple:

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

**Prueba**




- Por la fórmula básica:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{bh_b}{2} \qquad \ldots(1)$$

- Por el teorema de Herón, (relaciones métricas):

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \ldots(2)$$

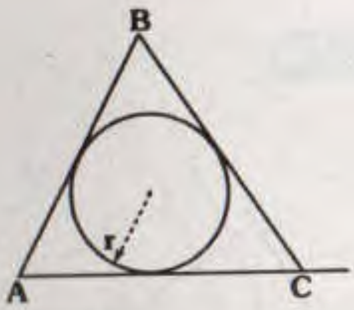
- De (1) y (2):

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

# DIVERSAS EXPRESIONES PARA EL ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

## * EN FUNCIÓN DEL INRADIO

El área de toda región triangular es igual al producto del semiperímetro con su inradio.

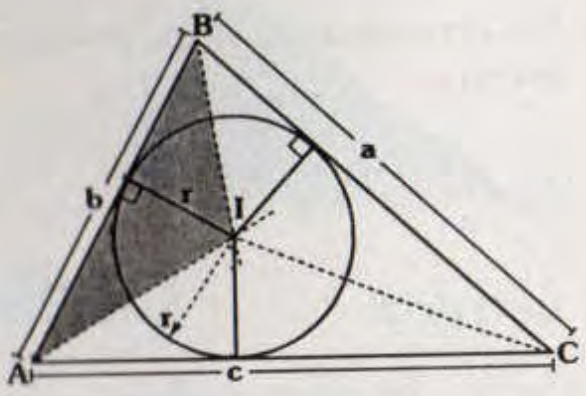



En el gráfico, **p** y **r** son el semiperímetro e inradio del $\Delta ABC$

Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = pr$$

Prueba




- Usemos el criterio de hallar un área como la suma de sus regiones parciales, así:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AIC} + S_{\Delta BIC} + S_{\Delta CIA}$$

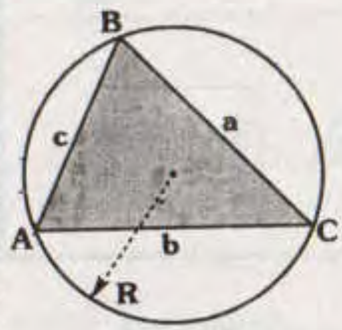
$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \underbrace{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}_{p} r$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = pr$$

## * EN FUNCIÓN DEL CIRCUNRADIO

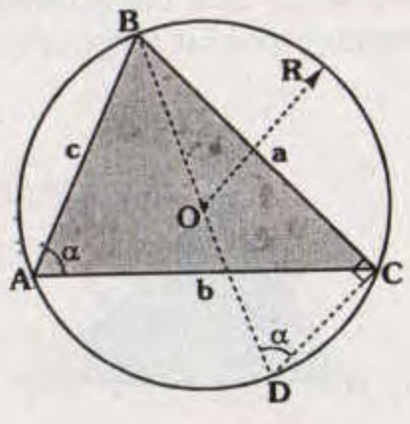
El área de toda región triangular es igual al producto de las longitudes de los tres lados entre cuatro veces el circunradio




En el gráfico se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

Prueba



- Por fórmula trigonométrica:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{bc}{2}\text{sen}\alpha \qquad ...(1)$$

- En ⊿BCD:

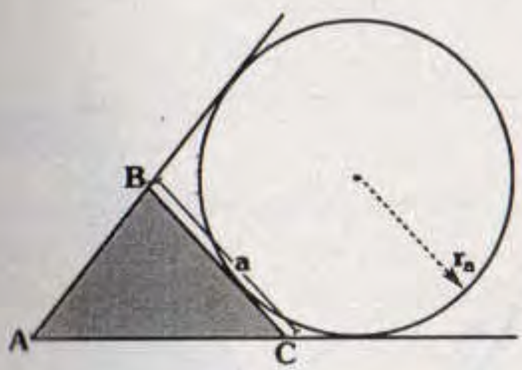
$$\text{sen}\alpha = \frac{a}{2R} \qquad ...(2)$$

- De (1) y (2):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

## • EN FUNCIÓN DEL EXRADIO

El área de toda región triangular es igual el producto del exradio con la diferencia del semiperímetro con la longitud del lado relativo a dicho exradio.

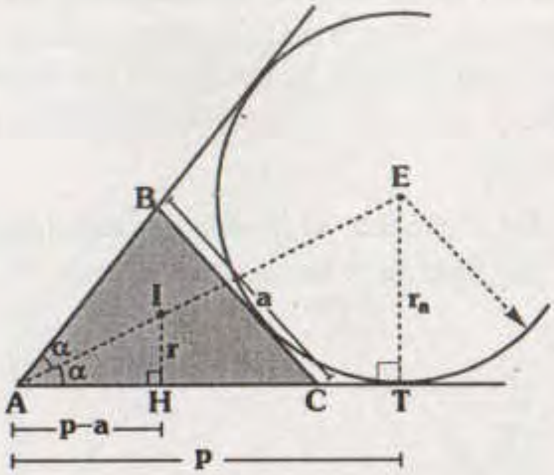



En el gráfico, p y $r_a$ son el semiperímetro y exradio del ΔABC

Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = r_a(p-a)}$$

*Prueba*




- Sea p el semiperímetro del ΔABC

- Se ubica el incentro I del ΔABC y se traza $\overline{IH} \perp \overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$)

$$\Rightarrow \; AH = p - a$$

- ⊿AHI ~ ⊿ATE $\Rightarrow \dfrac{r}{p-a} = \dfrac{r_a}{p}$

$$\Rightarrow \underbrace{pr}_{S_{\Delta ABC}} = r_a(p-a)$$

$$\therefore \; S_{\Delta ABC} = r_a(p-a)$$

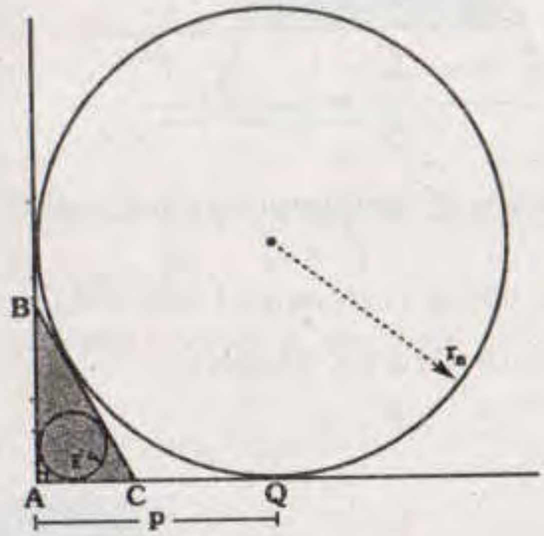
Análogamente, para cada lado. Sea AB=c y AC=b, se tendrá:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{\Delta ABC} = r_b(p-b) \\ S_{\Delta ABC} = r_c(p-c) \end{array}}$$

## EXPRESIONES PARA ÁREAS DE REGIONES LIMITADAS POR TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Además de conocer la forma de hallar el área de un triángulo rectángulo con los catetos, es importante conocer otras expresiones que por su presencia en muchos ejercicios y por su simplicidad en la expresión.

- En el gráfico, se muestra la circunferencia inscrita y exinscrita.




Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = r_a r$$

**Prueba**

- Sabemos que:

$$S_{\triangle} = pr \qquad ...(1)$$

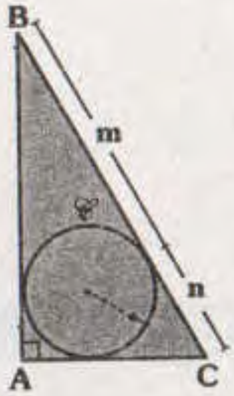
donde p es el semiperímetro de ABC

- Por propiedad de circunferencia:

$$\underbrace{AQ}_{r_a} = p$$

- En (1): $S_{\triangle ABC} = r_a r$

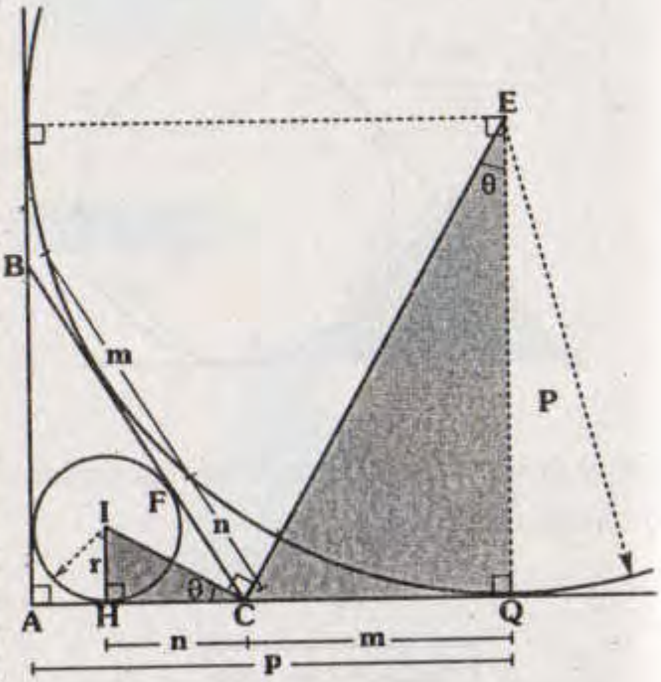
- En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita, se cumple:




$$S_{\triangle ABC} = mn$$

**Prueba**

- Tracemos también la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AC}$ (sólo como referencia)




- Por propiedad de circunferencia:

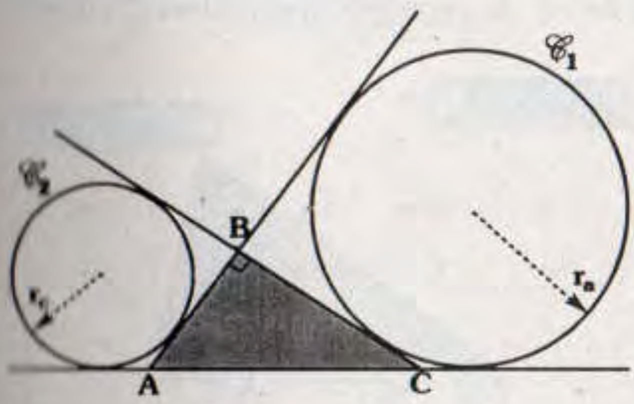
$CF=CH=n$ ; $BF=CQ=m$ y $AQ=p$

- $\triangle IHC \sim \triangle CQE$: $\dfrac{r}{n}=\dfrac{m}{p}$

$$\Rightarrow \underbrace{rp}=mn$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=mn$$

❑ En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son las circunferencia exinscrita para el $\triangle ABC$

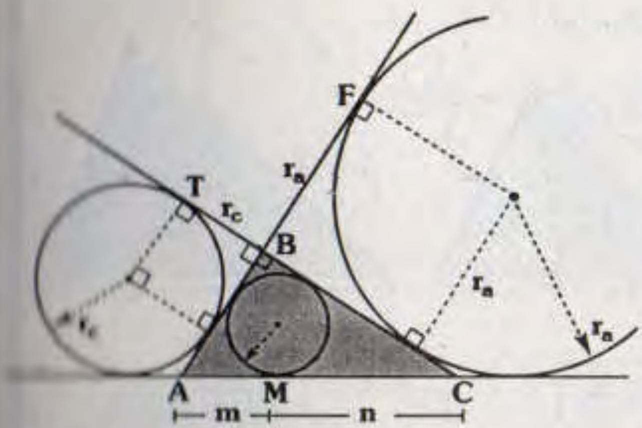



Se cumple:

$$\boxed{S_{\triangle ABC}=r_a r_c}$$

**Prueba**

- Tracemos ahora la circunferencia inscrita.

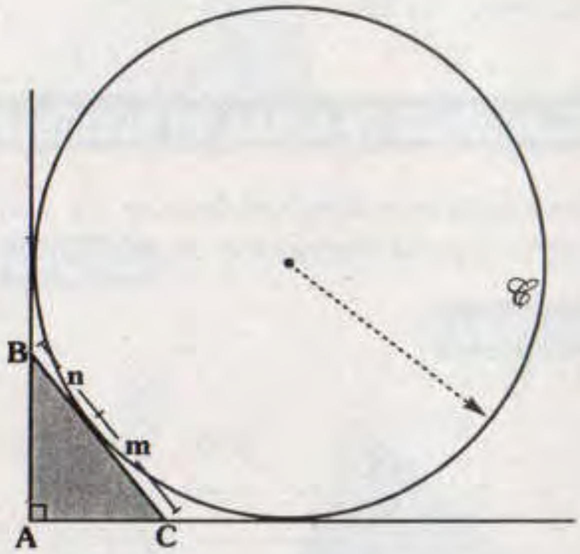



- Por propiedad de circunferencia:

$$\underbrace{BT}_{r_c}=AM=m \text{ y } \underbrace{BF}_{r_a}=MC$$

- Como $S_{\triangle ABC}=mn \Rightarrow S_{\triangle ABC}=r_c r_a$

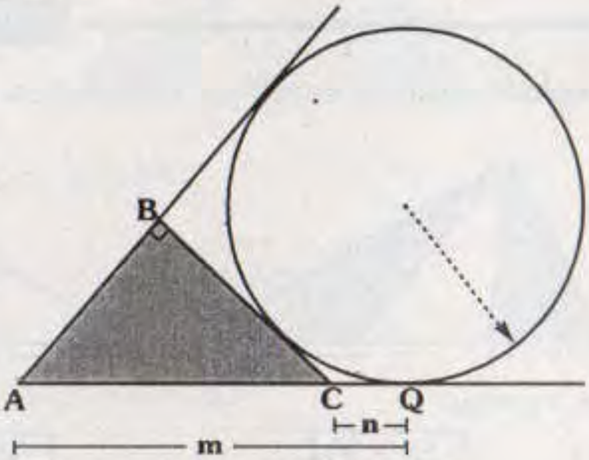
❑ En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia exinscrita del $\triangle ABC$




Se cumple: $\boxed{S_{\triangle ABC}=mn}$

La prueba se deja como ejercicio para el lector

❑ En el gráfico, se muestra la circunferencia exinscrita.




Se cumple: $\boxed{S_{\triangle ABC}=mn}$

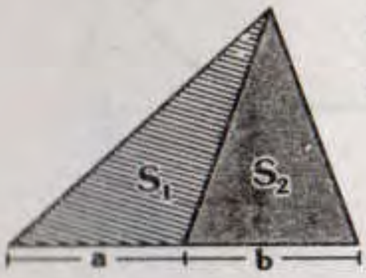
**Prueba**

- Notemos que "m" es el semiperímetro
- Si trazamos la circunferencia inscrita, tangente a $\overline{BC}$ en T, entonces BT=CQ=n
- Usemos $S_{\triangle ABC}=pr$, donde r es inradio:
- Como: $r=BT \Rightarrow n=r$ $\quad\quad\therefore\quad S_{\triangle ABC}=mn$

## RELACIONES DE ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

Ahora veremos diversas formas de comparar áreas de regiones triangulares, cuando tienen algunos elementos en común.

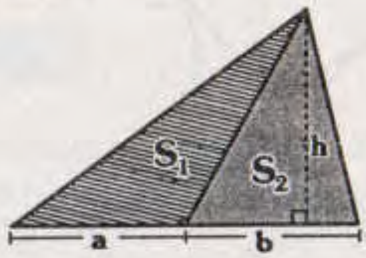
### TEOREMA




En el gráfico se cumple:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}$$

**Prueba**

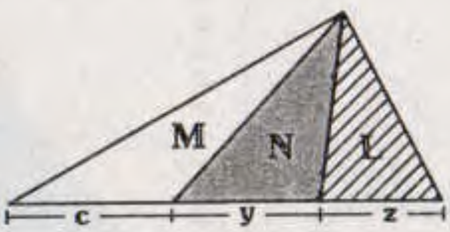


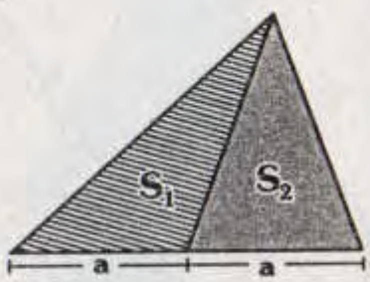

Usemos la fórmula básica:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{ah}{2} \\ S_2 &= \frac{bh}{2} \end{aligned}\right\} \frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}$$

**Observación**

Veamos algunos casos particulares de lo anterior:



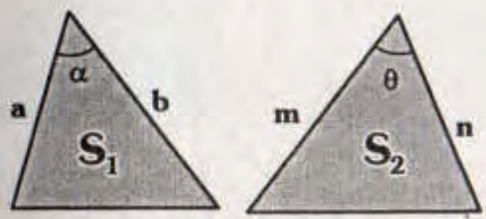




Se cumple:

$$\frac{S_3}{S_4}=\frac{c}{d} \qquad \frac{M}{x}=\frac{N}{y}=\frac{L}{z} \qquad S_1=S_2$$

## TEOREMA

Si $\alpha = \theta$ ó $\alpha + \theta = 180°$




Se cumple: $\boxed{\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{ab}{mn}}$

**Prueba**

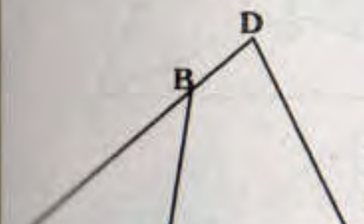
- Como $\alpha = \theta$ ó $\alpha + \theta = 180°$

$$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \text{sen}\theta$$

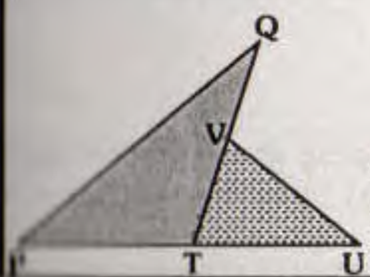
- $$\left.\begin{array}{l} S_1 = \dfrac{ab}{2}\text{sen}\alpha \\ S_2 = \dfrac{mn}{2}\text{sen}\theta \end{array}\right\} \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{ab}{mn}$$

**Observación**

Como caso particular veamos:

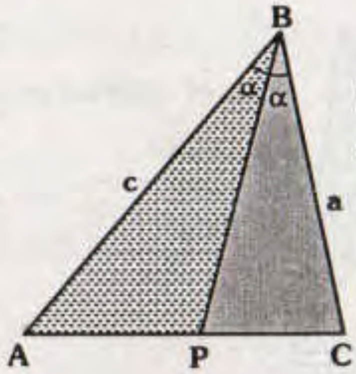



$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{(AB)(AC)}{(AD)(AE)}$$




$$\frac{S_{\Delta PQT}}{S_{\Delta VTU}} = \frac{(PT)(TQ)}{(TV)(TU)}$$

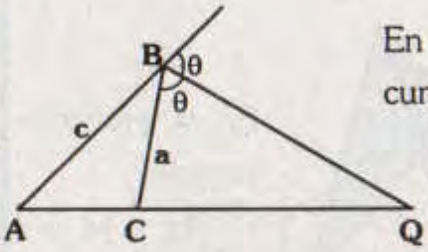
## TEOREMA




En el gráfico se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta PBC}} = \frac{c}{a}}$$

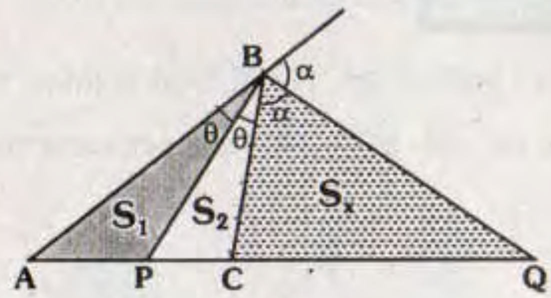
## TEOREMA




En el gráfico se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta CBQ}} = \frac{c}{a}}$$

**Observación**




Se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta PBC}} = \frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta CBQ}}}$$

Reemplazando:

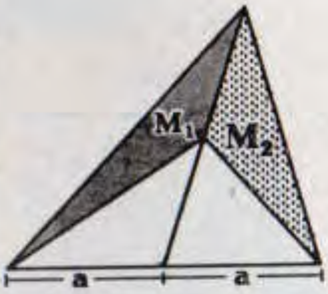
$$\boxed{S_x = \frac{S_1(S_1 + S_2)}{(S_1 - S_2)}}$$

## TEOREMA

En el gráfico se cumple:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{x}{y}$$

### Observación

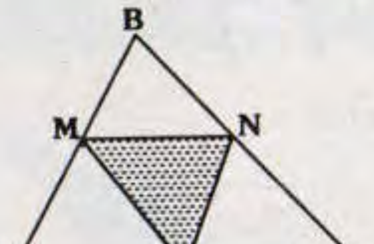



En el gráfico se cumple:

$$M_1 = M_2$$

## TEOREMA

En el gráfico, M, N y L son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

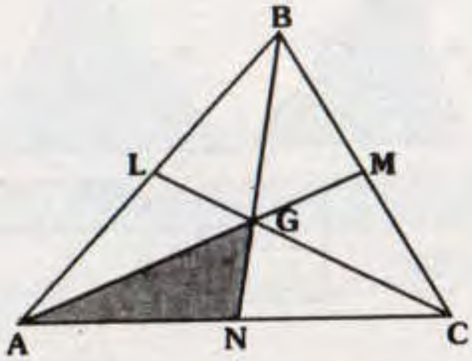



Se cumple:

$$S_{\Delta AMN} = S_{\Delta MLN} = S_{\Delta LNC} = S_{\Delta MBN}$$

## TEOREMA

En el gráfico, G es baricentro del triángulo ABC.

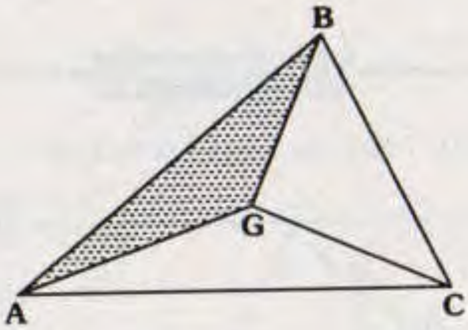



Se cumple:

$$S_{(\Delta LGA)} = S_{(\Delta ANG)} = S_{(\Delta NGC)} = S_{(\Delta CGM)} = S_{(\Delta MGB)} = S_{(\Delta GLB)}$$

### COROLARIO

Si G es baricentro del triángulo ABC se cumple:

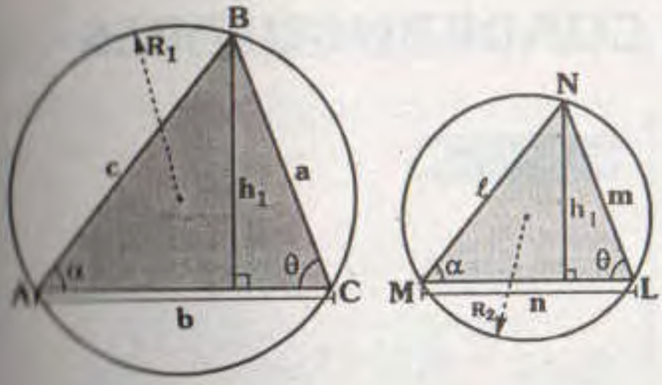



Se cumple:

$$S_{\Delta ABG} = S_{\Delta BCG} = S_{\Delta ACG}$$

## TEOREMA

La razón de áreas de dos regiones triangulares es igual al cuadrado de la razón de longitudes de segmentos homólogos.




En el gráfico, $\Delta ABC \sim \Delta MNL$, entonces se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNL}}=\left(\frac{a}{m}\right)^2=\left(\frac{b}{n}\right)^2=\left(\frac{c}{\ell}\right)^2=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2=...=k^2}$$

**Prueba**

- Por la fórmula básica:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{bh_1}{2} \ \wedge \ S_{\Delta MNL}=\frac{nh_2}{2}$$

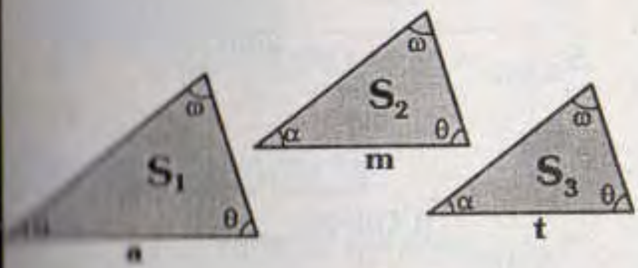
$$S_{\Delta ABC}=\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{h_1}{h_2}\right) \qquad ...(1)$$

- Como $\Delta ABC \sim \Delta MNL$, entonces:

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{R_1}{R_2}=....=k^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNL}}=\left(\frac{b}{n}\right)^2=k^2$$

**Observación**

**1)** Cuando se trate de comparar tres o más regiones semejantes; es recomendable usar:




$$\boxed{\frac{S_1}{a^2}=\frac{S_2}{m^2}=\frac{S_3}{t^2}}$$

**2)** En general para dos regiones semejantes:

**Figura 1**

$\sim$

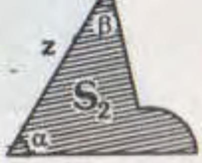


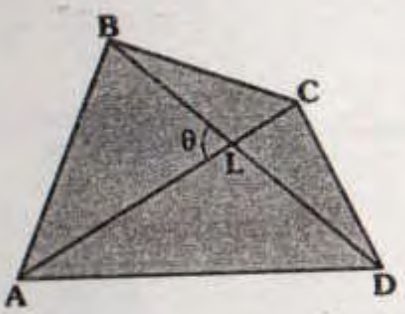

**Figura 2**

Si las figuras 1 y 2 son semejantes "x" y "z" son longitudes homólogas, Se cumple: $\boxed{\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{x}{z}\right)^2}$

# ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

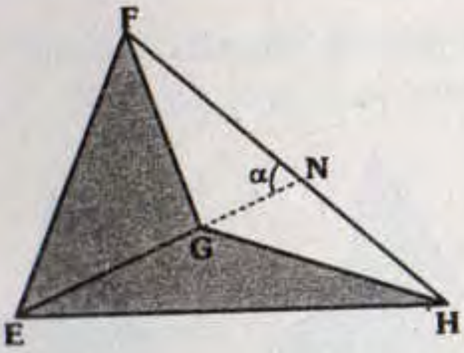
## FÓRMULA GENERAL

En área de toda región cuadrangular es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales por el seno de la medida del ángulo entre dichas diagonales.




Se cumple:

$$S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}\,\text{sen}\theta$$




En el gráfico, se cumple:

$$S_{\measuredangle EFGH} = \frac{(EG)(FH)}{2}\,\text{sen}\alpha$$

**Prueba**

• Para el $\square ABCD$:

$$S_{\square ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}$$

$$S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BL)}{2}\text{sen}\theta + \frac{(AC)(DL)}{2}\text{sen}\theta$$

$$S_{\square ABCD} = \frac{(AC)}{2}\text{sen}\theta\underbrace{(BL+LD)}_{BD}$$

$$\therefore\ S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}\text{sen}\theta$$

• Para el $\measuredangle EFGH$

$$S_{\measuredangle EFGH} = \underbrace{S_{\Delta EFH}} - \underbrace{S_{\Delta FGH}}$$

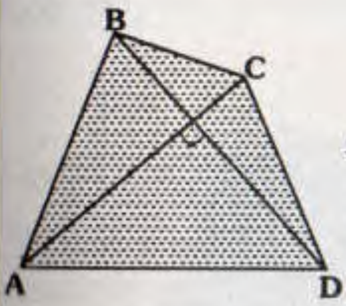
$$S_{\measuredangle EFGH} = \frac{(EN)(FH)}{2}\text{sen}\alpha - \frac{(GN)(FH)}{2}\text{sen}\alpha$$

$$S_{\measuredangle EFGH} = \underbrace{(EN-GN)}_{EG}\frac{(FH)}{2}\text{sen}\alpha$$

$$\therefore\ S_{\measuredangle EFGH} = \frac{(EG)(FH)}{2}\text{sen}\alpha$$

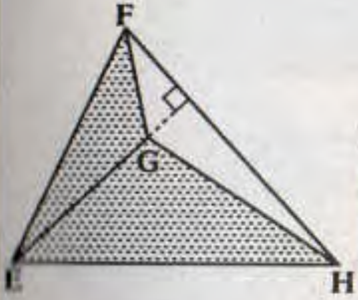
**Observación**

- Si las diagonales son perpendiculares.




Se cumple:

$$S_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}$$

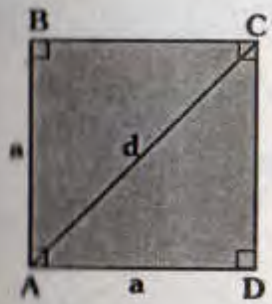



Se cumple:

$$S_{\measuredangle EFGH} = \frac{(EG)(FH)}{2}$$

## REGIÓN CUADRADA

En el gráfico ABCD es un cuadrado, se cumple:




$$S_{(ABCD)} = a^2 = \frac{d^2}{2}$$

## REGIÓN RECTANGULAR

- En el gráfico, ABCD es rectángulo

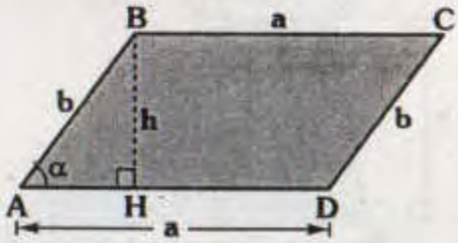
Se cumple:

$$S_{(ABCD)} = mn$$

## REGIÓN PARALELOGRAMICA

En el gráfico, ABCD es paralelogramo

Se cumple:



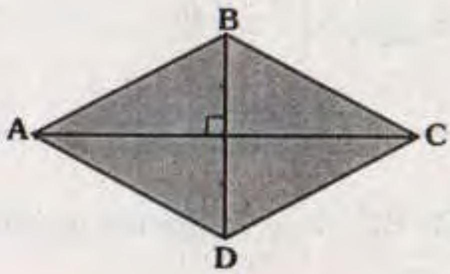

$$S_{(ABCD)} = ah = ab\operatorname{sen}\alpha$$

**Nota**

*Las últimas expresiones planteadas ya han sido demostradas*

## REGIÓN ROMBAL

En el gráfico, ABCD es un rombo. Se cumple:




$$S_{\lozenge ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}$$

**Prueba**

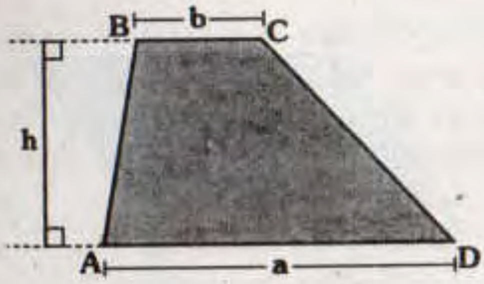
Por la fórmula general:

$$S_{\lozenge ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}\underbrace{\operatorname{sen}90°}_{1}$$

$$\therefore \quad S_{\lozenge ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}$$

## REGIÓN TRAPECIAL

En el gráfico, $\overline{AD}//\overline{BC}$. Se cumple:




$$S_{\triangle ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

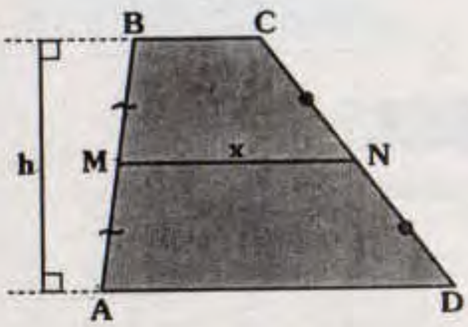
**Prueba**

$$S_{\triangle ABCD}=\underbrace{S_{\Delta ABC}}_{\frac{bh}{2}}+\underbrace{S_{\Delta ACD}}_{\frac{ah}{2}}$$

$$\Rightarrow\ S_{\triangle ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

**Observación**

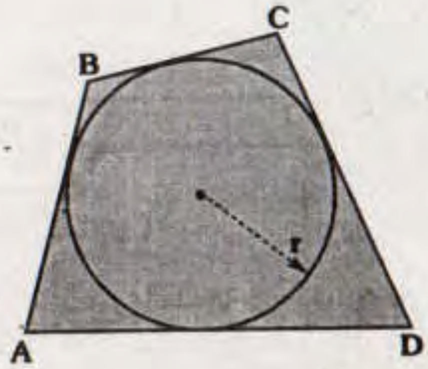
Si $\overline{AD}//\overline{BC}$, M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$




$\overline{MN}$ : Base media $\Rightarrow$ $S_{\triangle ABCD}=xh$

## REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

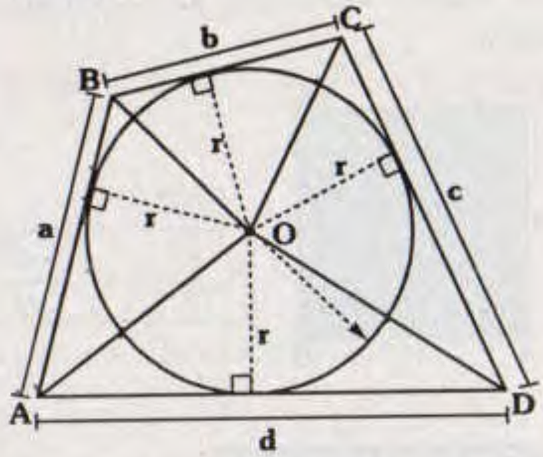
En el gráfico $\triangle ABCD$ es circunscrito,se cumple




$$S_{\triangle ABCD}=pr$$

donde "p" es el semiperímetro del $\triangle ABCD$

**Prueba**



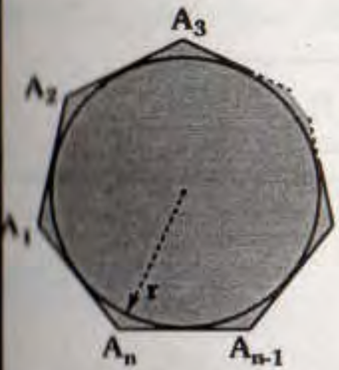

- Antes, consideremos el teorema de Pitot: $a+c=b+d$
- Como $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}=a+c=b+d$
- $S_{\triangle ABCD}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta COD}+S_{\Delta AOD}$

$$S_{\triangle ABCD} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2}$$

$$S_{\triangle ABCD} = r\underbrace{\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)}_{p} = r(a+c) = r(b+d)$$

**Observación**

El teorema anterior, se puede generalizar para todo polígono circunscrito.




Sea $A_1A_2A_3....A_n$: polígono circunscrito

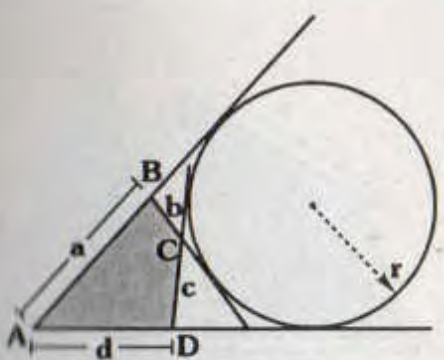
p: semiperímetro

Se cumple:

$$\boxed{S_{A_1A_2...A_n} = pr}$$

## ÁREA DE UNA REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO EXINSCRITO

En el gráfico, el $\triangle ABCD$ es exinscrito



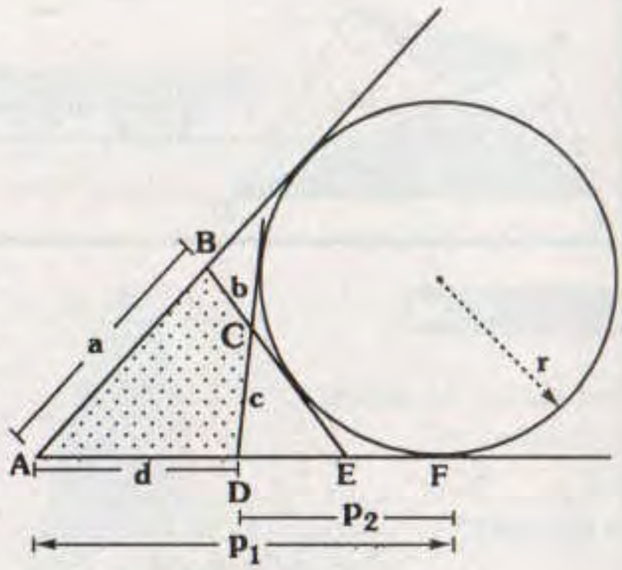

Se cumple:

$$\boxed{S_{\triangle ABCD} = r(a-c) = r(d-b)}$$

**Prueba**

$p_1$: semiperímetro de $\Delta ABE$

$p_2$: semiperímetro de $\Delta DCE$




- $S_{\triangle ABCD} = \underbrace{S_{\Delta ABE}} - S_{\Delta CDE}$

$$= r(p_1 - BE) - r(p_2 - CE)$$

$$S_{\triangle ABCD} = r[\underbrace{(p_1 - p_2)}_{d} - \underbrace{(BE - CE)}_{b}]$$

$$S_{\triangle ABCD} = r(d - b)$$

- Por teorema de Steiner:

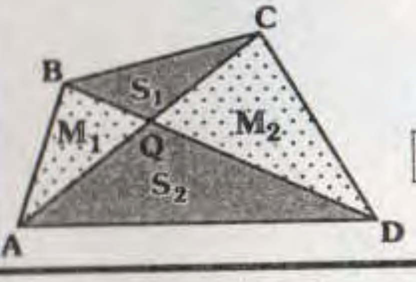
$$d - b = a - c$$

$$S_{\triangle ABCD} = r(d-b) = r(a-c)$$

# DIVERSAS PROPIEDADES SOBRE ÁREAS EN CUADRILÁTEROS

## EN TODO CUADRILÁTERO

- En el gráfico, se cumple:




$$M_1M_2 = S_1S_2$$

**Prueba**

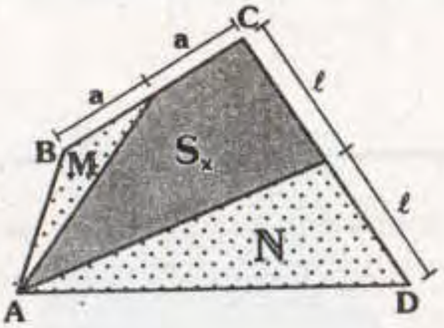
Por razón de áreas:

- En $\Delta ABC$: $\dfrac{M_1}{S_1} = \dfrac{AQ}{QC}$
- En $\Delta ACD$: $\dfrac{S_2}{M_2} = \dfrac{AQ}{QC}$

$$\frac{M_1}{S_1} = \frac{S_2}{M_2}$$

$$\therefore\ M_1M_2 = S_1S_2$$

En el gráfico, se cumple:




$$S_x = M + N = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

**Prueba**

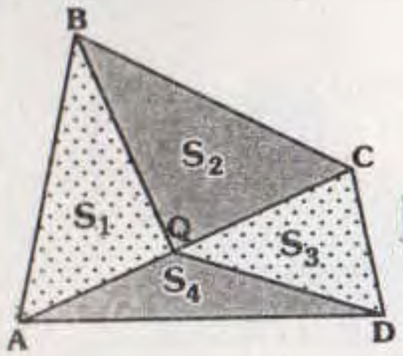
Notemos que:

$$S_x = \underbrace{S_{\Delta AMC}} + \underbrace{S_{\Delta ACN}}$$

$$S_x = \underbrace{S_{\Delta ABM}} + \underbrace{S_{\Delta AND}}$$

$$S_x = M + N$$

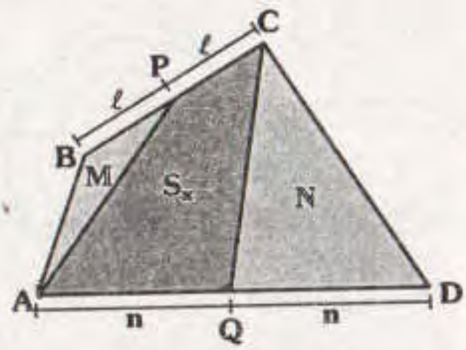
En el gráfico, $Q \in \overleftrightarrow{AC}$, se cumple:




$$S_1S_3 = S_2S_4$$

La prueba es análoga a la anterior.

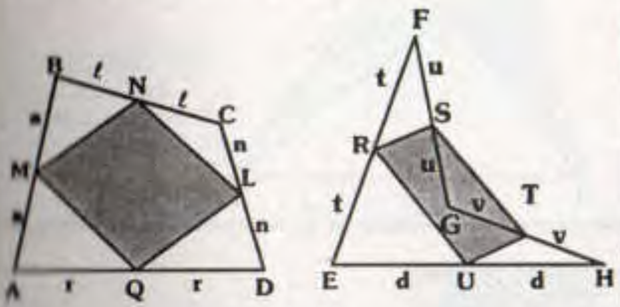
En el gráfico, se cumple:




$$S_x = M + N$$

La prueba es análoga a la anterior, se deja como ejercicio para el lector.

En el gráfico, se cumple:




**MNLQ: Paralelogramo** **RSTU:Paralelogramo**

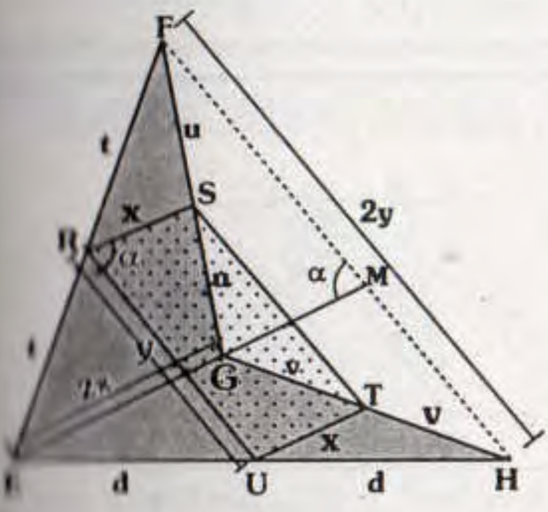
$$S_{\square MNLQ} = \frac{S_{\triangle ABCD}}{2} \qquad S_{\square RSTU} = \frac{S_{\measuredangle EFGH}}{2}$$

**Prueba**

- Ambos casos es similar, demostremos el segundo:
- En $\Delta GHT$ y $\Delta EFH$, por base media:

  $FH = 2(ST) = 2(RU)$ y $\overline{FH} // \overline{ST} // \overline{RU}$

  $\Rightarrow$ RSTU es paralelogramo




- Luego: $m\measuredangle SRU = m\measuredangle GMF$

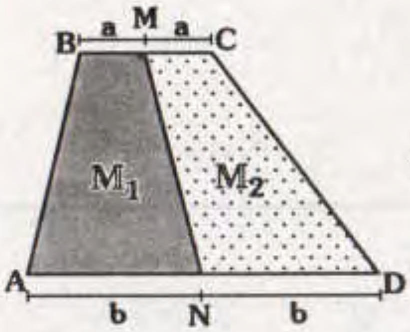
- $S_{\square RSTU} = xy\,sen\alpha$ y

$$S_{\measuredangle EFGH} = \frac{(2x)(2y)}{2} sen\alpha$$

$$\therefore \quad S_{\square RSTU} = \frac{S_{\measuredangle EFGH}}{2}$$

## EN EL TRAPECIO

En el gráfico, $\overline{AD} // \overline{BC}$. Se cumple:



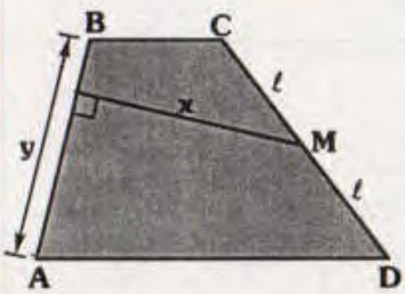

Se cumple : $M_1 = M_2$

**Prueba**

Notemos que debido a que $\overline{AD} // \overline{BC} \Rightarrow$ los trapecio ABMN y NMCD tienen igual altura y la misma suma de bases, luego:

$$\underbrace{S_{\triangle ABMN}}_{M_1} = \underbrace{S_{\triangle NMCD}}_{M_2}$$

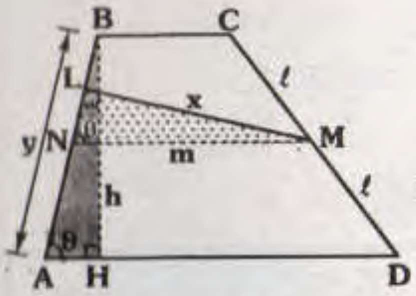
Si $\overline{AD} // \overline{BC}$.




Se cumple : $S_{\triangle ABCD} = xy$

**Prueba**

- Sea $\overline{MN}$ la base media

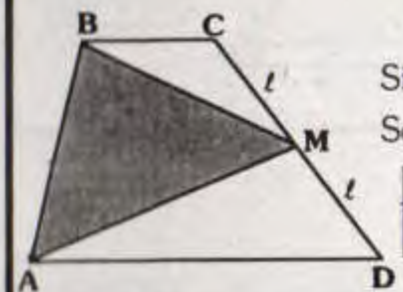



$\Rightarrow S_{\square ABCD} = mh$

$\measuredangle AHB \sim \measuredangle NLM$

$$\frac{h}{y} = \frac{x}{m} \Rightarrow mh = xy$$

$$\therefore \; S_{\square ABCD} = xy$$

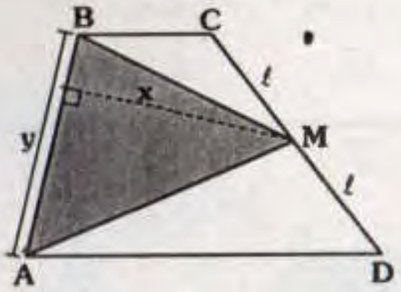



Si $\overline{BC} // \overline{AD}$

Se cumple:

$$S_{\Delta ABM} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

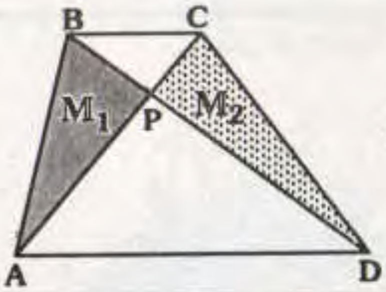
**Prueba**




- Por teorema

$$\left.\begin{aligned} S_{\square ABCD} &= xy \\ S_{\Delta ABM} &= \frac{xy}{2} \end{aligned}\right\} S_{\Delta ABM} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

Si $\overline{AD} // \overline{BC}$




Se cumple:

$$M_1 = M_2$$

**Prueba**

Como los $\Delta$s ABD y ACD tienen a $\overline{AD}$ en común (igual base) y $\overline{AD} // \overline{BC} \Rightarrow$ las alturas desde B y C en dichos triángulos son iguales, luego:

$$\underbrace{S_{\Delta ABD}} = S_{\Delta ACD}$$

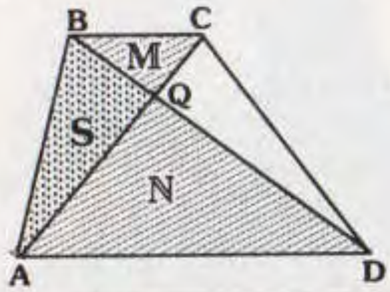
$$M_1 + S_{\Delta APD} = M_2 + S_{\Delta APD}$$

$$\Rightarrow M_1 = M_2$$

**Nota**

*La propiedad expuesta es muy importante en la resolución de problemas, la usamos generalmente cuando notemos rectas paralelas.*

En el gráfico, $\overline{AD} // \overline{BC}$. Se cumple:




$$S = \sqrt{MN} \;\wedge\; S_{\square ABCD} = (\sqrt{M} + \sqrt{N})^2$$

Prueba

- Por lo anterior:

$$S_{(QCD)}=S$$

- Por teorema:

$$(S)(S)=MN \Rightarrow S=\sqrt{MN}$$

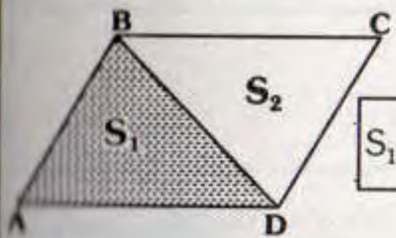
- $S_{\square ABCD}=M+N+2S$

$$S_{\square ABCD}=\underbrace{M+N+2\sqrt{MN}}$$

$$\therefore\ S_{\square ABCD}=(\sqrt{M}+\sqrt{N})^2$$

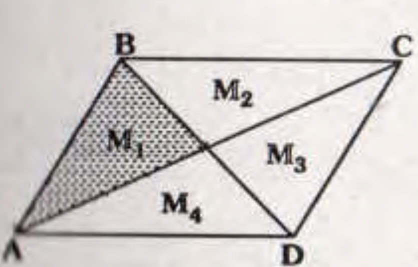
## EN EL PARALELOGRAMO

Si ABCD es un paralelogramo, se cumple:



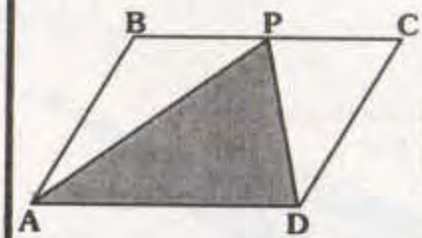

$$S_1=S_2=\frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

EFGH: paralelogramo, Se cumple:



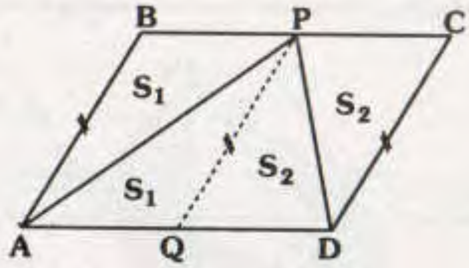

$$M_1=M_2=M_3=M_4=\frac{S_{\square ABCD}}{4}$$

ABCD: paralelogramo se cumple:




$$S_{\Delta APD}=\frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

Prueba

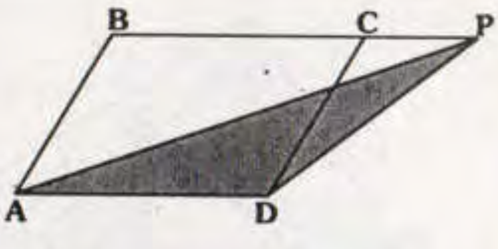



- Sea $\overline{PQ}//\overline{AD} \Rightarrow$ ABQG y QPCD: paralelogramo

$$\Rightarrow S_{\Delta APD}=S_1+S_2$$

$$S_{\square ABCD}=2S_1+2S_2$$

$$\Rightarrow S_{\square ABCD}=2S_{\Delta APD}$$

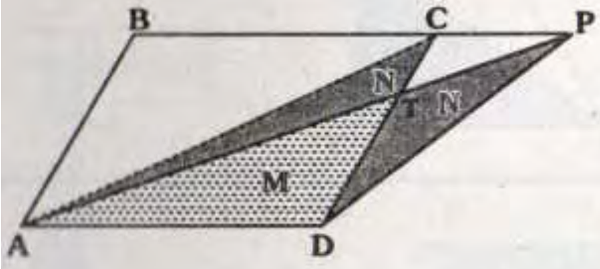



Si: ABCD es paralelogramo.

Se cumple:

$$S_{\Delta APD}=\frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

Prueba

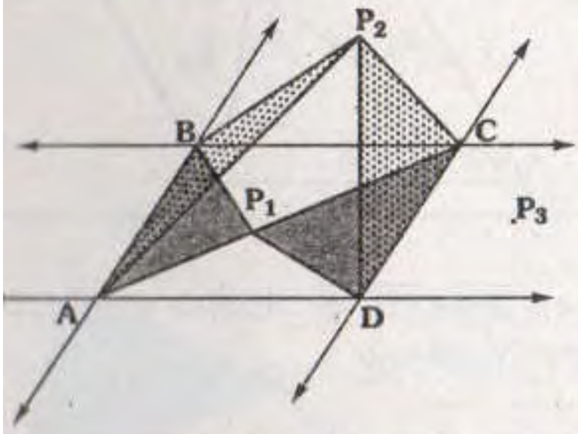



- Como $\overline{AD} // \overline{CP}$

$\Rightarrow S_{\Delta ACT} = S_{\Delta DTP} = \mathbb{N}$

- $S_{\Delta APD} = \mathbb{M} + \mathbb{N}$

$S_{\Delta ACD} = \dfrac{S_{\square ABCD}}{2}$

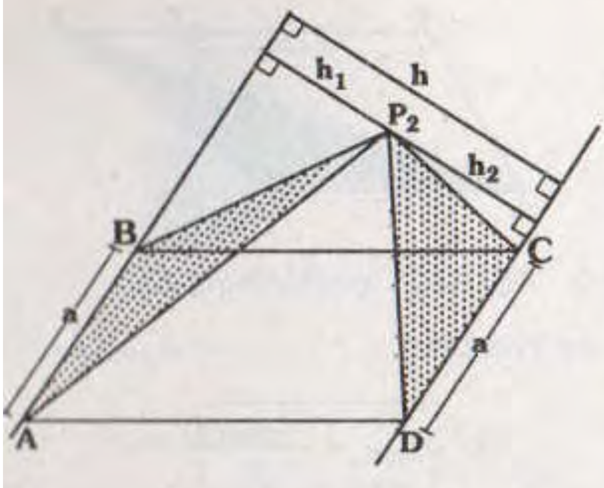



Si ABCD es un paralelogramo y P es un punto entre las rectas paralelas. Se cumple

- $S_{P_1AB} + S_{P_1CD} = S_{P_2AB} + S_{P_2CD} = \dfrac{S_{\square ABCD}}{2}$

- $S_{P_1CD} + S_{P_1AD} = S_{P_3BC} + S_{P_3AD} = \dfrac{S_{\square ABCD}}{2}$

Prueba

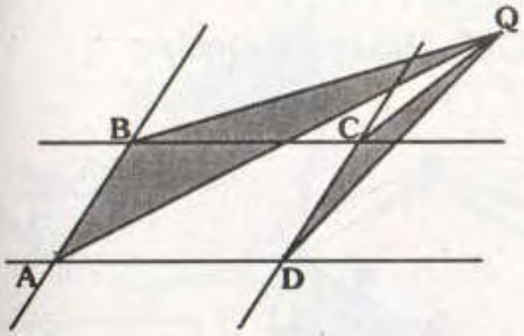



- Demostremos para el punto $P_2$
- Notemos: $h_1 + h_2 = h$
- $S_{\square ABCD} = ah$
- $\left.\begin{array}{l} S_{P_2AB} = \dfrac{ah_1}{2} \\ S_{P_2CD} = \dfrac{ah_2}{2} \end{array}\right\} S_{P_2AB} + S_{P_2CD} = \dfrac{a}{2}\underbrace{(h_1 + h_2)}_{h}$

$\Rightarrow \ S_{P_2AB} + S_{P_2CD} = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{S_{\square ABCD}}{2}$

**Observación**

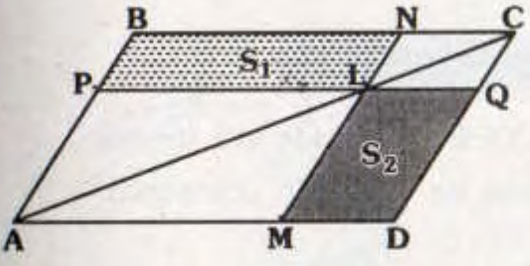
Si un punto no se ubica en la región indicada:




$$S_{\Delta QAB} + S_{\Delta QCD} \neq \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

Más bien se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta QAB} - S_{\Delta QCD} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}}$$




Si ABCD es un paralelogramo
$\overline{AD} // \overline{PQ}$ y $\overline{AB} // \overline{MN}$

Se cumple: $\boxed{S_1 = S_2}$

**Prueba**

- Notemos que APLM y LNCQ son paralelogramos, entonces:

$$S_{\Delta APL} = S_{\Delta ALM} \quad y \quad S_{\Delta LNC} = S_{\Delta LCQ}$$

- En ABCD: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD}$

$$S_1 + \cancel{S_{\Delta APL}} + \cancel{S_{\Delta LNC}} = S_2 + \cancel{S_{\Delta ALM}} = \cancel{S_{\Delta LCQ}} \qquad \therefore\ S_1 = S_2$$

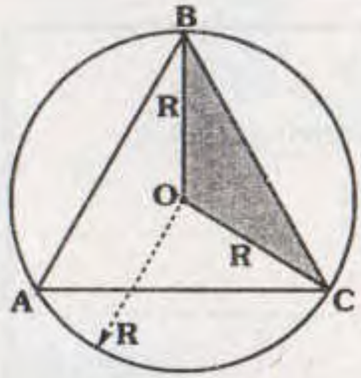
# ÁREAS DE REGIONES POLÍGONALES REGULARES

**(En función del circunradio)**

En general para hallar el área de una región polígonal, bastará hallar el área de su "triángulo elemental" y multiplicarlo con la cantidad de lados, veamos algunos casos:

## TRIÁNGULO EQUILÁTERO

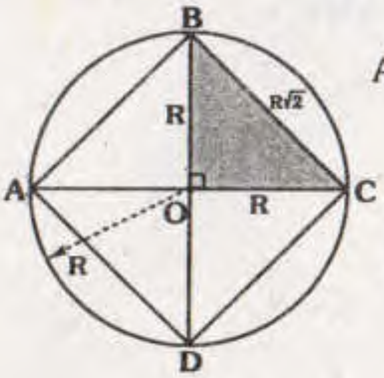
$\Delta ABC$ : Equilátero




$$S_{\Delta ABC} = 3\underbrace{S_{\Delta BOC}}_{\frac{RR}{2}\text{sen}120^\circ}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}}$$

## CUADRADO



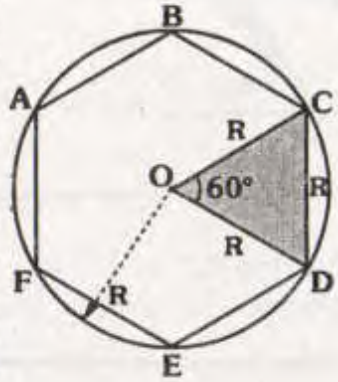

ABCD : Cuadrado

$$S_{ABCD} = 4S_{\Delta BOC}$$

$$\boxed{S_{ABCD} = 2R^2}$$

## HEXÁGONO REGULAR

ABCDEF: Hexágono regular

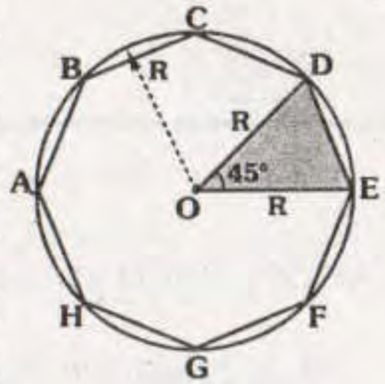



$$S_{ABCDEF} = 6\underbrace{S_{\Delta OCD}}_{\frac{R^2\sqrt{3}}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{ABCDEF} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}}$$

## OCTÓGONO REGULAR

- ABCDEFGH: Octógono regular
- S: área de la región octogonal

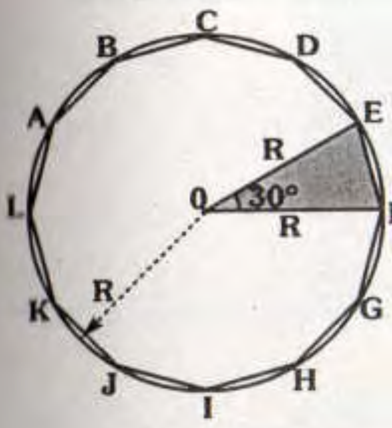



$$S = 8\underbrace{S_{\Delta DOE}}_{\frac{R^2}{2}\text{sen}45^\circ}$$

$$\boxed{S = 2R^2\sqrt{2}}$$

## DODECÁGONO REGULAR

- ABCDEFGHIJKL: Dodécagono regular
- S: área de la región polígonal

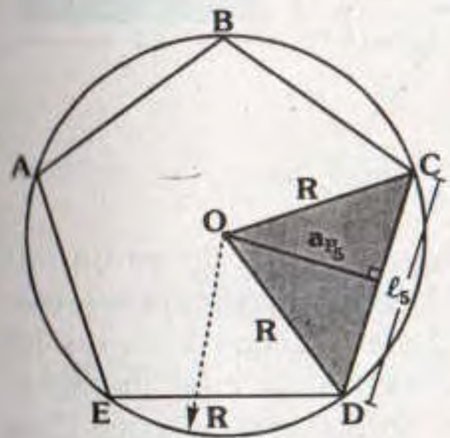



$$S = 12\underbrace{S_{\Delta EOF}}_{\frac{R^2}{2}\text{sen}30°}$$

$$\boxed{S = 3R^2}$$

## PENTÁGONO REGULAR

- ABCDE: Pentágono regular
- S: área de ABCDE




$$S = 5\underbrace{S_{\Delta COD}}_{\frac{(\ell_5)(a_{p_5})}{2}}$$

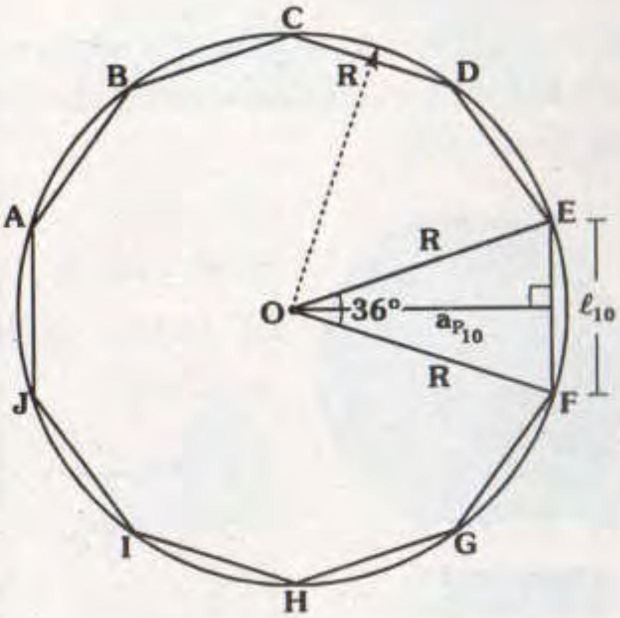
- Pero: $\ell_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$$a_{p_5} = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$\boxed{S = \frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

## DECÁGONO REGULAR

- ABCDEFGHIJ: Decágono regular
- S: Área de la región poligonal




- $$S = 10\underbrace{S_{\Delta EOF}}_{\frac{(\ell_{10})(ap_{10})}{2}}$$

- Pero: $\ell_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

$$a_{p_{10}} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

# ÁREAS DEL CÍRCULO Y PARTES NOTABLES

## ÁREA DEL CÍRCULO

El círculo es la región plana limitada por una circunferencia.

El área del círculo es igual a la constante $\pi(3,14159...)$ multiplicado con el cuadrado de su radio.

En el gráfico:

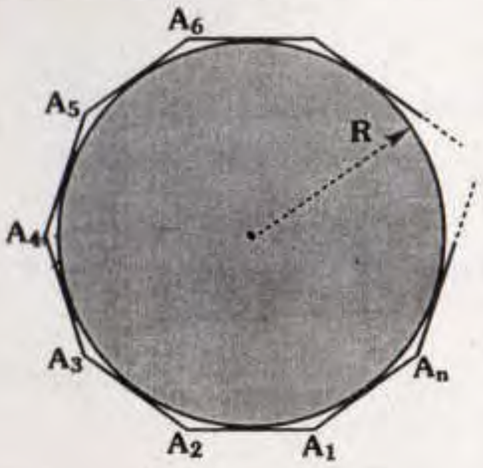
$A_{\circ}$ : área del círculo

Se cumple:

$$\boxed{A_{\circ} = \pi R^2}$$

**Prueba**

- Una manera de probar el teorema indicado, es usando la expresión dada en la página 21, como todo polígono regular es circunscriptible a una circunferencia y el número de lados tiende al infinito: $n \to \infty$, luego el perímetro del polígono tiende a la longitud de la circunferencia.




A(poligonal) $\to A_{\circ}$

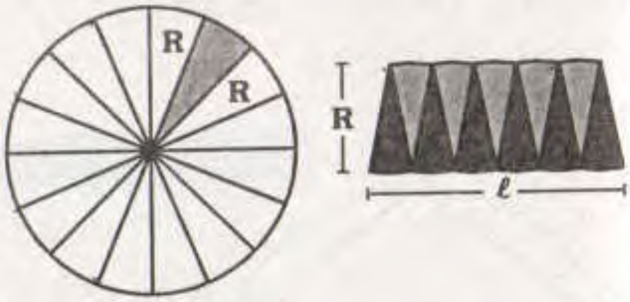
$$A_{\circ} = pr$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2\pi R}{2}$$

$$\therefore\ A_{\circ} = \pi R^2$$

**Otro método**

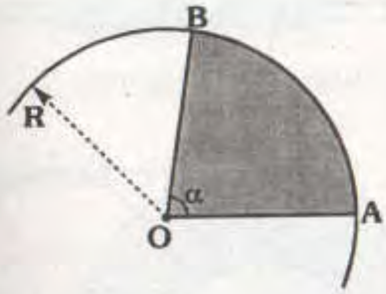



Procedemos así:

- Se descompone el círculo en un número par (bastante grande) de sectores; se ordenan dichos sectores tal como se muestra, la cual tiende al área de un paralelogramo cuya base es $\ell$ (longitud de la semicircunferencia) y altura r.
- Como la longitud de la circunferencia(2) es $2\pi r \Rightarrow \ell = \pi r$
- $$A_{\circ} = \ell r \Rightarrow A_{\circ} = \pi r^2$$

## SECTOR CIRCULAR

En el gráfico, la región sombreada es un sector circular:




$\alpha$ en grados sexagesimales . Se cumple:

$$S_{\triangleleft AOB} = \frac{\alpha}{360°}\pi R^2$$

**Prueba**

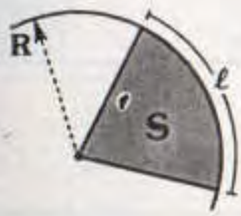
Usando regla de tres simple

$$360° \rightarrow A_{\circ}$$
$$\alpha \rightarrow S_{\triangleleft AOB}$$

Luego: $S_{\triangleleft AOB} = \frac{\alpha}{360°} A_{\circ}$

**Observación 1**

Una forma alternativa para el área de un sector circular es en función a la longitud de arco:




$\ell$ : longitud de arco

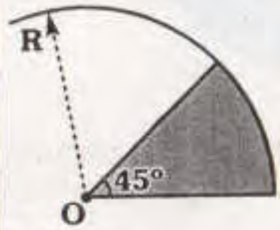
Se cumple : $S = \frac{\ell R}{2}$

**Observación 2**

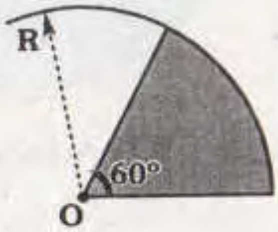
Debido a la presencia de algunos casos particulares, es recomendable recordar:

$A_{\triangle} = \frac{\pi R^2}{2}$

$A_{\triangle} = \frac{1}{4}\pi R^2$



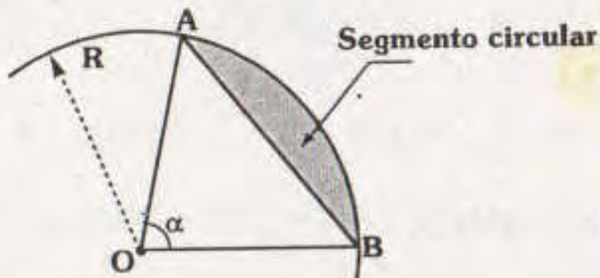

$A_{\triangleleft} = \frac{1}{8}\pi R^2$




$A_{\triangleleft} = \frac{1}{6}\pi R^2$

## SEGMENTO CIRCULAR

Se cumple:

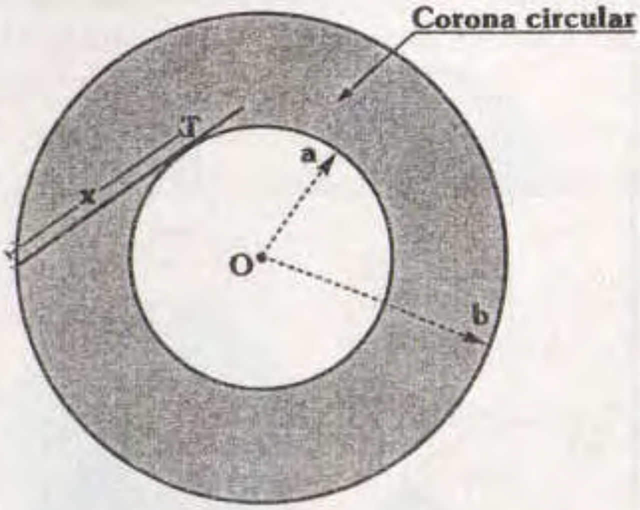



$$S_{\triangleleft AOB} = S_{\triangleleft AOB} - S_{\Delta AOB}$$

$$S = \frac{\alpha}{360°}\pi R^2 - \frac{R^2}{2}\text{sen}\alpha$$

## CORONA CIRCULAR

En el gráfico, T es punto de tangencia




- Sea $A_{cc}$: Área de la corona circular
  Se cumple

$$\boxed{A_{cc} = \pi(b^2 - a^2)}$$

También:

$$\boxed{A_{cc} = \pi x^2}$$

*Prueba*

- $$A_{cc} = \pi b^2 - \pi a^2$$

$$\Rightarrow \ A_{cc} = \pi(b^2 - a^2)$$

- En ⊿MTO:

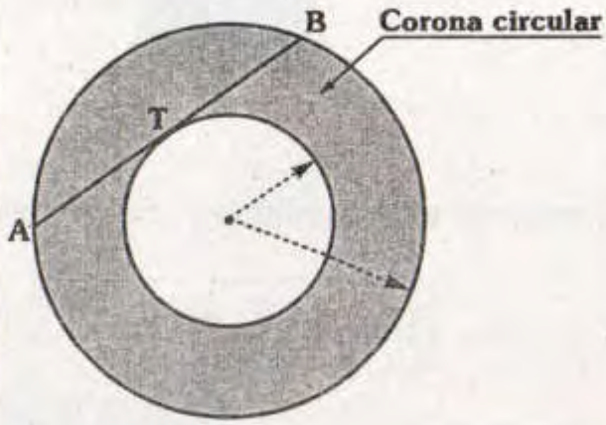
$$x^2 + a^2 = b^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = b^2 - a^2$$

$$\therefore \ A_{cc} = \pi x^2$$

**Observación**

- T es punto de tangencia.

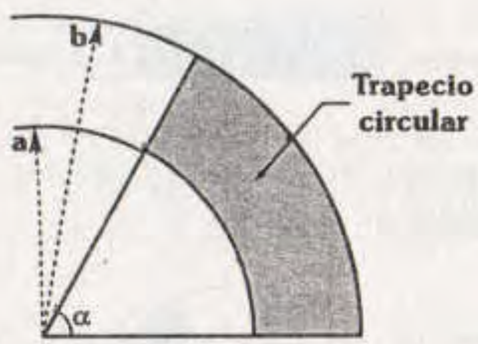



Se cumple:

$$\boxed{A_{cc} = \frac{1}{4}\pi(AB)^2}$$

## TRAPECIO CIRCULAR

$A_{TC}$: Área del trapecio circular

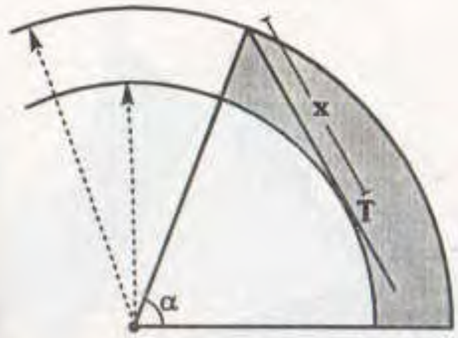



Se cumple:

$$\boxed{A_{TC} = \frac{\alpha}{360°}\pi(b^2 - a^2)}$$

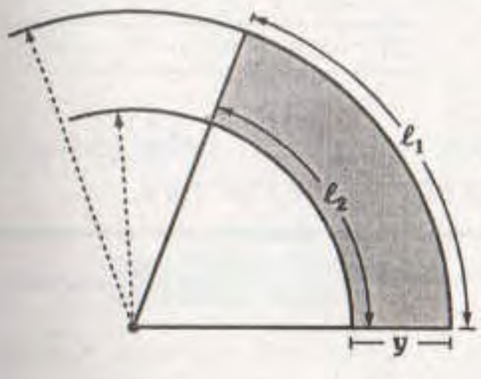
**Observación**

- T es punto de tangencia




Se cumple:

$$A_{TC}=\frac{\alpha}{360°}\pi x^2$$

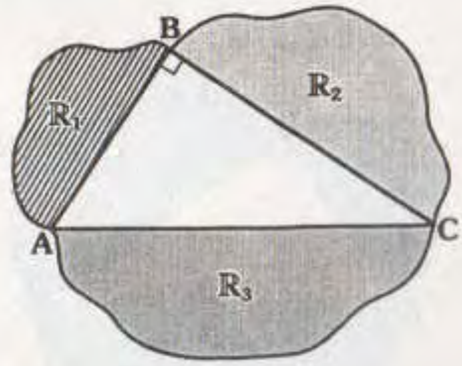



- $\ell_1$ y $\ell_2$: longitudes de arco
- Se cumple:

$$A_{TC}=\frac{(\ell_1+\ell_2)}{2}y$$

## TEOREMA

En el gráfico, las regiones $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$ y $\mathbb{R}_3$ son semejantes, de elementos homólogos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.




Se cumple:

$$S_{(\mathbb{R}_3)}=S_{(\mathbb{R}_1)}+S_{(\mathbb{R}_2)}$$

**Demostración:**

- Como las regiones son semejantes, entonces:

$$\frac{S_{(\mathbb{R}_3)}}{(AC)^2}=\frac{S_{(\mathbb{R}_1)}}{(AB)^2}=\frac{S_{(\mathbb{R}_2)}}{(BC)^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{S_{(\mathbb{R}_3)}}{(AC)^2}=\frac{S_{(\mathbb{R}_1)}+S_{(\mathbb{R}_2)}}{(AB)^2+(BC)^2}\qquad ....(1)$$

- En $\triangle$ABC:

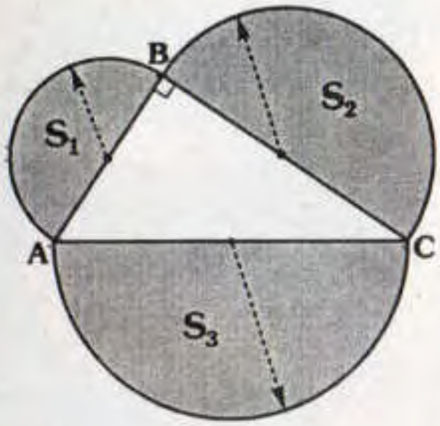
$$(AB)^2+(BC)^2=(AC)^2$$

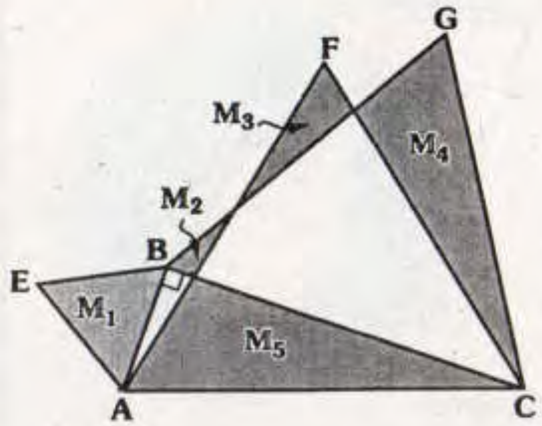
- En (1):

$$S_{(\mathbb{R}_3)}=S_{(\mathbb{R}_1)}+S_{(\mathbb{R}_2)}$$

**Observación**

• A manera de corolario veamos algunos casos partículares:




Como los semicírculos son semejantes:

$$\boxed{S_3 = S_1 + S_2}$$

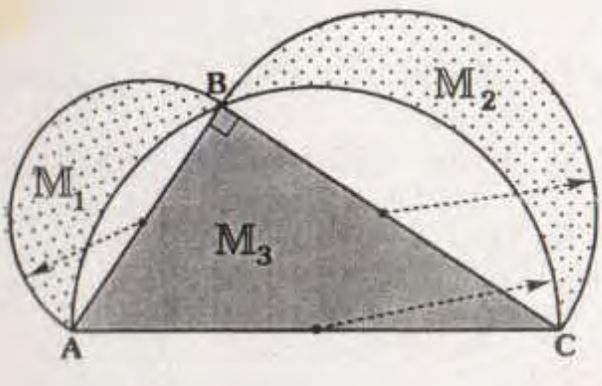
Si los Δs ABE, BGC y AFC son equiláteros, se cumple:

$$S_{\Delta AFC} = S_{\Delta AEB} + S_{\Delta BGC}$$

$$\boxed{M_5 + M_3 = M_1 + M_2 + M_4}$$

• Notar que sólo es condición que los lados del ⊿ABC sean lados homólogos y las regiones pueden ser internas o externas.

## TEOREMA DE LAS LÚNULAS DE HIPOCRATES

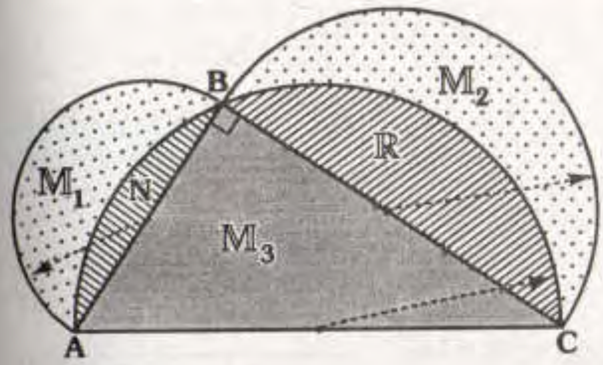



• En el gráfico, $M_1$ y $M_2$ son las áreas de las lúnulas y $M_3$ es el área de la región ABC, se cumple:

$$\boxed{M_3 = M_1 + M_2}$$

**Prueba**

- Usaremos el teorema anterior:




Por corolario del teorema anterior:

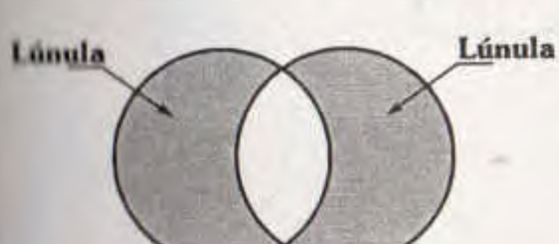
$$\underbrace{S_{\overset{\frown}{AC}}}_{} = \underbrace{S_{\overset{\frown}{AB}}}_{} + \underbrace{S_{\overset{\frown}{BC}}}_{}$$

$$\mathbb{M}_3 + \mathbb{N} + \mathbb{R} = \mathbb{M}_1 + \mathbb{N} + \mathbb{M}_2 + \mathbb{R}$$

$$\therefore\ \mathbb{M}_3 = \mathbb{M}_1 + \mathbb{M}_2$$

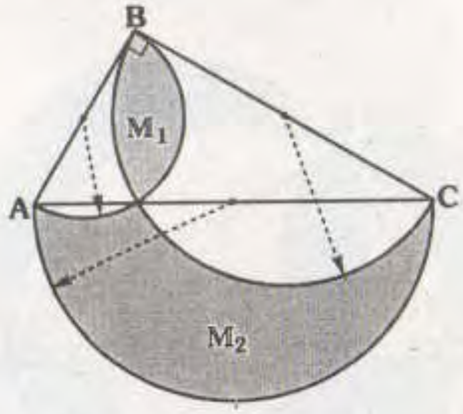
**Observación**

Se llama lúnula a la región no convexa limitada por dos arcos de circunferencias secantes.



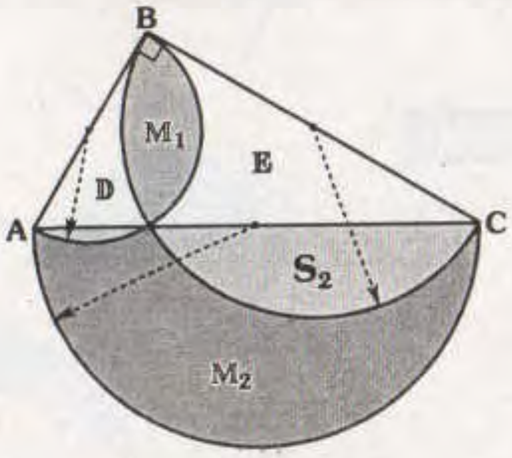

## TEOREMA

En el gráfico, se cumple:




$$\boxed{\mathbb{M}_2 - \mathbb{M}_1 = S_{\triangle ABC}}$$

**Demostración:**




Por teorema:

$$S_{\overset{\frown}{AC}} = \underbrace{S_{\overset{\frown}{AB}}}_{} + \underbrace{S_{\overset{\frown}{BC}}}_{}$$

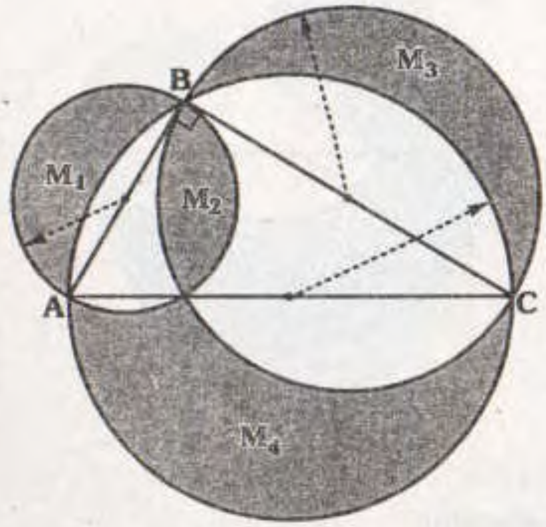
$$\mathbb{M}_2 + \cancel{S_1} + \cancel{S_2} = \cancel{S_1} + \mathbb{D} + \mathbb{M}_1 + \cancel{S_2} + \mathbb{E} + \mathbb{M}_1$$

$$\Rightarrow\ \mathbb{M}_2 = \underbrace{\mathbb{D} + \mathbb{M}_1 + \mathbb{E}}_{S_{\triangle ABC}} + \mathbb{M}_1$$

$$\therefore\ \mathbb{M}_2 - \mathbb{M}_1 = S_{\triangle ABC}$$

**Observación**

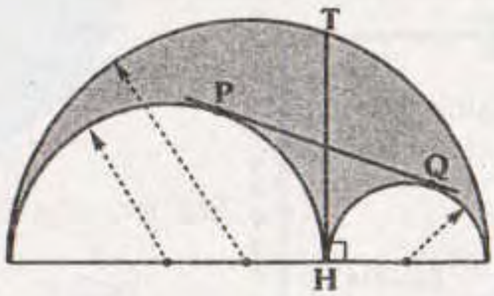
Como consecuencia de los últimos dos teoremas, tenemos:




$$\left.\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= M_1+M_3 \\ S_{\triangle ABC} &= M_4-M_2 \end{aligned}\right\} \boxed{M_4 = M_1+M_2+M_3}$$

## TEOREMA

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia.




Sea $\mathbb{A}$ el área de la región sombreada.

Se cumple:

$$\boxed{\mathbb{A} = \pi\frac{(PQ)^2}{4} = \pi\frac{(HT)^2}{4}}$$

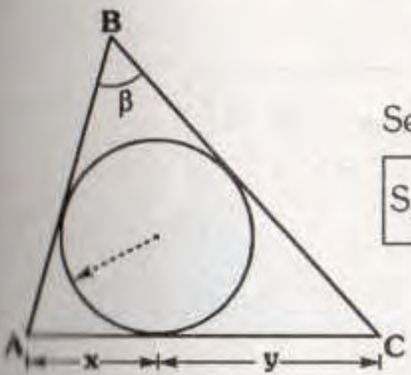
La prueba se deja como ejercicio para el lector.

# TEOREMAS ADICIONALES

Ahora conoceremos casos generales y expresiones un tanto algebraicas, pero son fácilmente deducibles.

## TEOREMA

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita.




Se cumple :

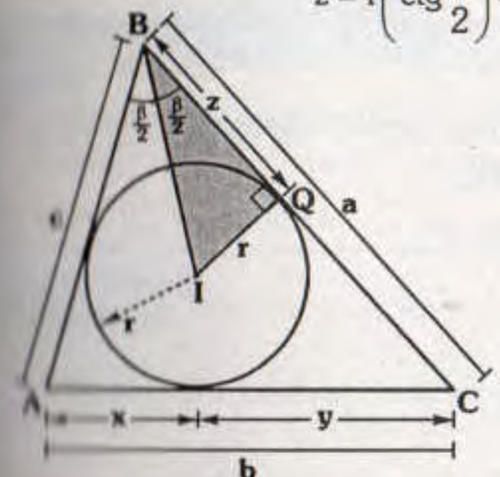
$$S_{\Delta ABC} = xy\ \text{ctg}\frac{\beta}{2}$$

**Demostración:**

Conocemos: $x = p - a$

$y = p - c$

$$z = r\left(\text{ctg}\frac{\beta}{2}\right) = p - b$$




Por teorema de Herón:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

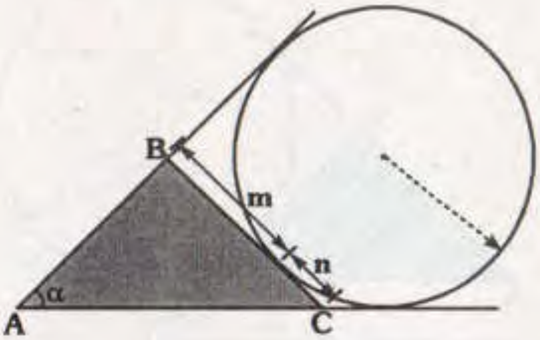
$$\Rightarrow\ (S_{\Delta ABC})^2 = p.xr\left(\text{ctg}\frac{\beta}{2}\right)y$$

$$\Rightarrow\ (S_{\Delta ABC})^2 = \underbrace{pr}_{S_{\Delta ABC}}\ xy\ \text{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore\ S_{\Delta ABC} = xy\ \text{ctg}\frac{\beta}{2}$$

## TEOREMA

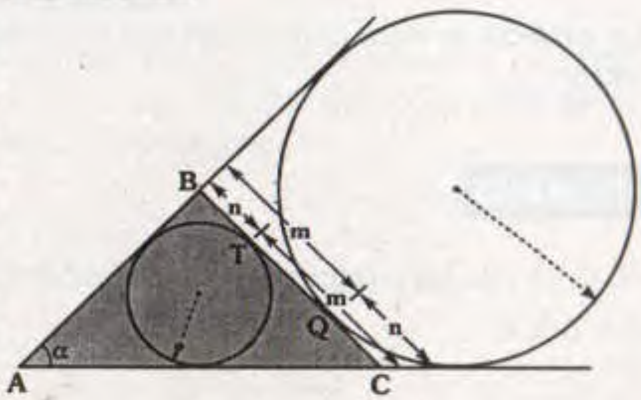
En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ es la circunferencia exinscrita




Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = mn\ \text{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

**Demostración:**

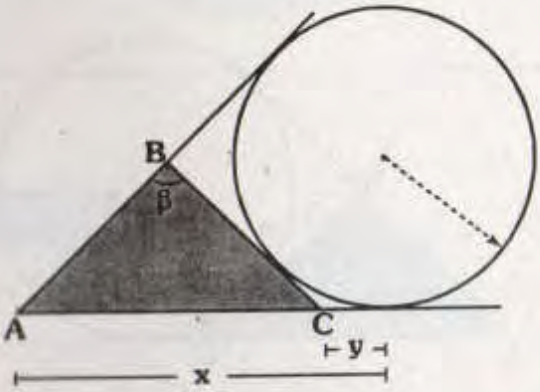


- Se puede proceder usando el teorema de Heron, pero mejor optemos por el resultado anterior.
- Se traza la circunferencia inscrita, por teorema de circunferencia: BT=QC y BQ=CT

$$\Rightarrow \ S_{\Delta ABC} = mn\ ctg\frac{\alpha}{2}$$

## TEOREMA

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia exinscrita.



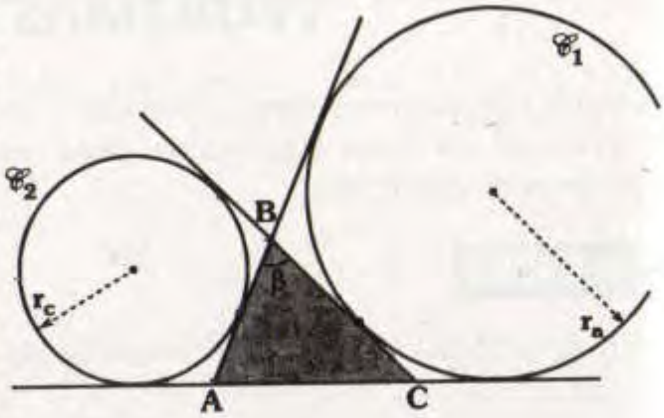

Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = xy\ tg\frac{\beta}{2}}$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

## TEOREMA

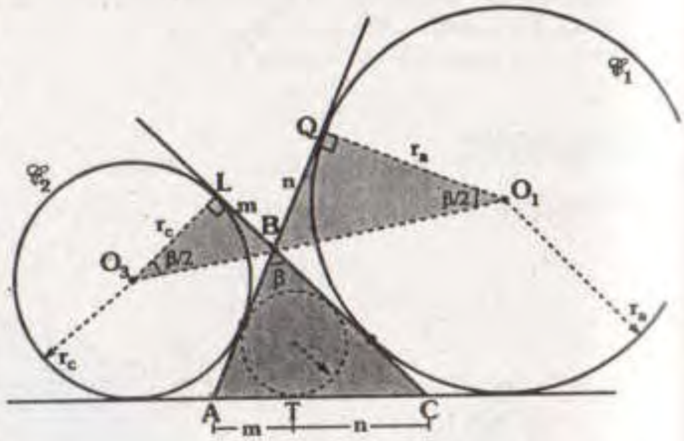
$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son las circunferencias exinscritas del ΔABC




Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = r_a r_c\ tg\frac{\beta}{2}}$$

**Prueba**




- Trazamos la circunferencia inscrita en el ΔABC
- Sabemos:

$$S_{\Delta ABC} = mn\ ctg\frac{\beta}{2} \qquad \ldots(1)$$

- Por teoremas de circunferencia:

$$AT = BL = m = r_c\ \ tg\frac{\beta}{2}$$

$$BQ = TC = n = r_a\ \ tg\frac{\beta}{2}$$

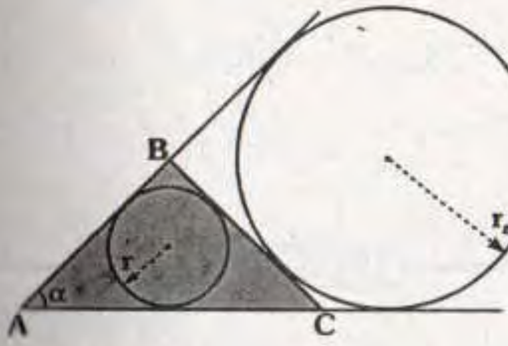
• En (1):

$$S_{\Delta ABC} = \left(r_c \ \text{tg}\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(r_a \ \text{tg}\frac{\beta}{2}\right).\text{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore \quad S_{\Delta ABC} = r_a r_c \ \text{tg}\frac{\beta}{2}$$

**TEOREMA**

En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ es la circunferencia inscrita y $\mathscr{C}_2$ es la circunferencia exinscrita.




Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = rr_a \ \text{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

**Nota**

*El lector puede encontrar más expresiones para casos particulares ($\alpha = 90°$; $\alpha = 60°$; $\alpha = 45°$....)*

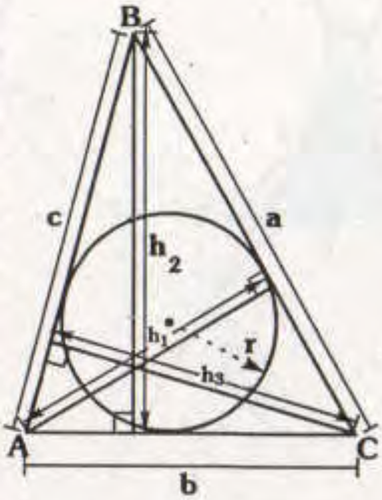
**TEOREMA**

En un triángulo $h_1$, $h_2$ y $h_3$ son las longitudes de sus alturas y "r" es su inradio, se cumple:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}}$$

***Demostración***

• Usemos la fórmula básica:




$$S_{\Delta ABC} = \frac{ah_1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h_1} = \frac{a}{2S_{\Delta ABC}}$$

• Análogamente tenemos:

$$\frac{1}{h_2} = \frac{b}{2S_{\Delta ABC}} \ \text{y} \ \frac{1}{h_3} = \frac{c}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{a+b+c}{2S_{\Delta ABC}} = \frac{p}{S_{\Delta ABC}} \quad ...(1)$$

• También sabemos:

$$S_{\Delta ABC} = pr \ \Rightarrow \ \frac{1}{r} = \frac{p}{S_{\Delta ABC}} \quad ...(2)$$

• De (1) y (2):

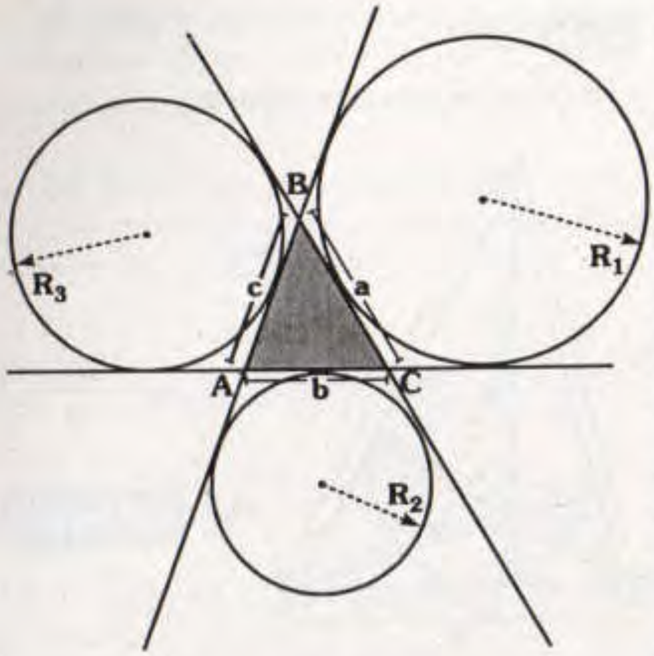
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$

**TEOREMA**

Sean $R_1$, $R_2$ y $R_3$ los exradios de un triángulo y r su inradio. Sea S el área de su región, se cumple:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$\boxed{S = \sqrt{rR_1R_2R_3}}$$




Demostremos el primer resultado

- Usemos las siguientes expresiones

$$S_{\Delta ABC} = R_1(p-a) \quad ...(1)$$

$$S_{\Delta ABC} = R_2(p-b) \quad ...(2)$$

$$S_{\Delta ABC} = R_3(p-c) \quad ...(3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{p-a}{S_{\Delta ABC}} \; ; \; \frac{1}{R_2} = \frac{p-b}{S_{\Delta ABC}} \; y$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{p-c}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{p}{S_{\Delta ABC}} \quad ...(\alpha)$$

- Como $S_{\Delta ABC} = pr$ ...(4)

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S_{\Delta ABC}} \quad ...(\beta)$$

- De $(\alpha)$ y $(\beta)$:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Ahora para el segundo resultado:

- Multiplicando las expresiones (1), (2), (3) y (4):

$$(S_{\Delta ABC})^4 = p(p-a)(p-b)(p-c).rR_1R_2R_3 ...(\theta)$$

- Por teorema de Herón:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow (S_{\Delta ABC})^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

- Reemplazando en $(\theta)$

$$(S_{\Delta ABC})^2 = rR_1R_2R_3$$

$$\therefore \; S_{\Delta ABC} = \sqrt{rR_1R_2R_3}$$

**Observación**

- De los últimos resultados, encontramos una relación entre los exradios y alturas de un triángulo:

$$\boxed{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

- Si usamos el teorema de las medias para $R_1$, $R_2$ y $R_3$:

$$MA \geq MH$$

$$\frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} \geq \frac{3}{\underbrace{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}_{\frac{1}{r}}}$$

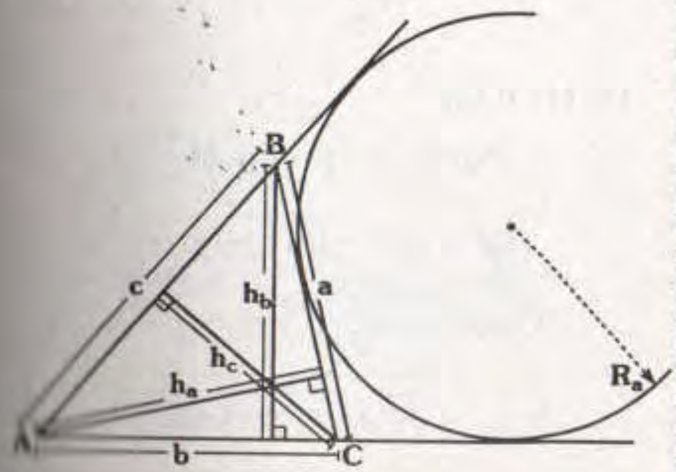
$$\boxed{R_1 + R_2 + R_3 \geq 9r}$$

- Análogamente para las alturas:

$$\boxed{h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r}$$

**TEOREMA**

En el gráfico, $R_a$ es exradio relativo a $\overline{BC}$ y $h_a$, $h_b$ y $h_c$ son las alturas.




Se cumple: $\boxed{\dfrac{1}{R_a}=\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_a}}$

Análogamente:

$\boxed{\dfrac{1}{R_b}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_b}}$ $\boxed{\dfrac{1}{R_c}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}-\dfrac{1}{h_c}}$

**Prueba**

- Por la fórmula básica, se tiene:

$$\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S_{\Delta ABC}} \quad ; \quad \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S_{\Delta ABC}} \quad y$$

$$\frac{1}{h_a}=\frac{b}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}=\frac{b+c-a}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}=\frac{p-a}{2S_{\Delta ABC}} \qquad ...(1)$$

- Pero: $S_{\Delta ABC}=R_a(p-a)$

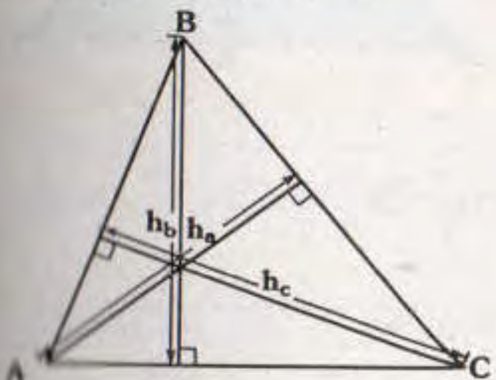
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_a}=\frac{p-a}{2S_{\Delta ABC}} \qquad ...(2)$$

- De (1) y (2):

$$\frac{1}{R_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$$

**Observación**

Con los resultados anteriores se demuestra fácilmente una expresión para el área en función de las alturas.




$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{R_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$$

$$\frac{1}{R_b}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}$$

$$\frac{1}{R_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}$$

Sea $H=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_a}\right)$

Usando: $S_{\Delta ABC}=\sqrt{rR_aR_bR_c}$

Tendremos:

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4\sqrt{H\left(H-\frac{1}{h_a}\right)\left(H-\frac{1}{h_b}\right)\left(H-\frac{1}{h_c}\right)}}}$$

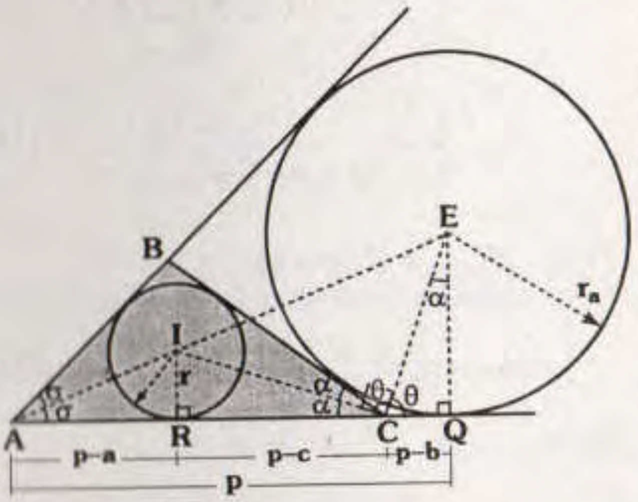
**OTRA MANERA DE DEMOSTRAR LA FÓRMULA DE HERÓN**

Sea $AB = c$

$BC = a$

$AC = b$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$




- Trazamos la circunferencia inscrita y la exinscrita relativa a $\overline{BC}$ y sean **r** y $r_a$ sus respectivos radios.
- Por teorema de circunferencia:

  $AR=p-a$; $RC=p-c$; $CQ=p-b$ y

  $AQ=p$

- $⊿IRC \sim ⊿CQE$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{p-c} = \frac{p-b}{r_a}$$

$$\Rightarrow \quad rr_a = (p-c)(p-b) \qquad ...(1)$$

- $⊿AQE \sim ⊿ARI$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p} \qquad ...(2)$$

- De (1) y (2):

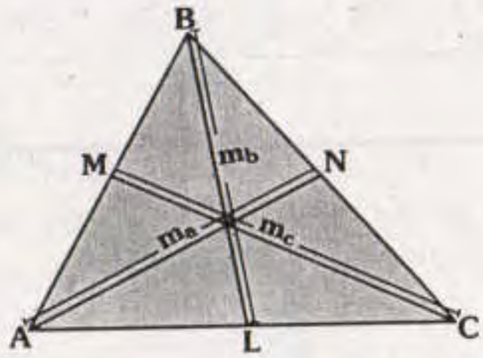
$$r^2p = (p-a)(p-c)(p-b)$$

$$\underbrace{r^2p^2}_{(S_{\Delta ABC})^2} = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\therefore \quad S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

## ÁREA EN FUNCIÓN DE LAS MEDIANAS

En el gráfico, $\overline{AN}$, $\overline{CM}$ y $\overline{BL}$ son medianas.

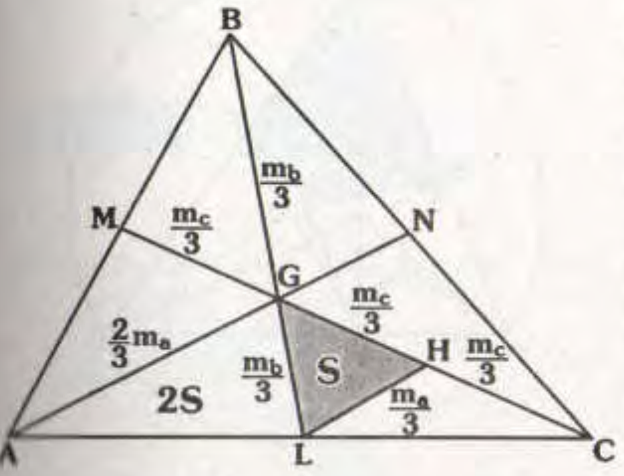



$$\text{Sea } M = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$$

Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)}}$$

**Prueba**




- Se traza $\overline{LH} // \overline{AG}$, luego:

$$LH = \frac{AG}{2} \quad y \quad GH = LC$$

- Luego tenemos:

$$S_{\Delta ABC} = 12\underbrace{S_{\Delta LGH}}_{S} \qquad ....(1)$$

- Para el $\Delta LGH$ : usemos el teorema de Heron:

Sea $p = \frac{1}{2}\left(\frac{m_a + m_b + m_c}{3}\right) \Rightarrow p = \frac{M}{3}$

$$S = \sqrt{p\left(p - \frac{m_a}{3}\right)\left(p - \frac{m_b}{3}\right)\left(p - \frac{m_c}{3}\right)}$$

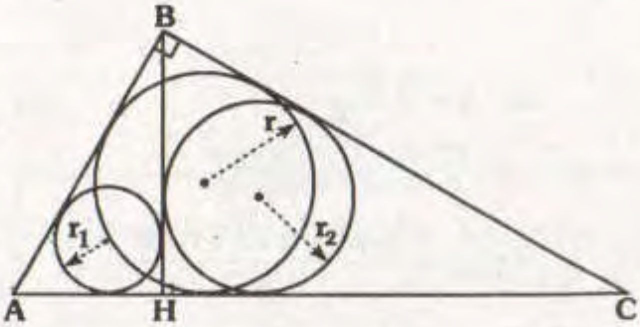
$$S = \frac{1}{9}\sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}$$

- En (1):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}$$

## TEOREMA

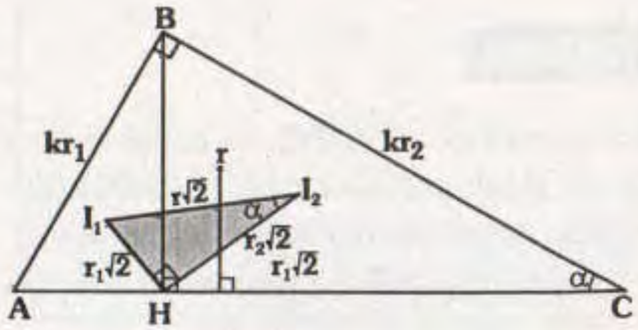
En el gráfico, r, r y $r_2$ son inradios de los triángulos ABC, AHB y BHC respectivamente.




Se cumple:

$$S_{\Delta ABC} = r^2 \frac{(r_1 + r_2 + r_3)}{(r_1 + r_2 - r)}$$

**Demostración:**




- Notemos que $\triangle ABC \sim \triangle I_1HI_2$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle I_1HI_2}} = \frac{r^2}{x^2} \qquad ...(1)$$

Donde "x" es inradio del $\triangle I_1HI_2$

- Propiedad:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow I_1I_2 = r\sqrt{2}$$

• En $\triangle I_1HI_2$:

$$r_1\sqrt{2}+r_2\sqrt{2}=r\sqrt{2}+2x$$

$$\Rightarrow\ r_1+r_2-r=\sqrt{2}x$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{(r_1+r_2-r)}{\sqrt{2}} \qquad ...(2)$$

• $$S_{\triangle I_1HI_2}=\frac{(r_1\sqrt{2}+r_2\sqrt{2}+r\sqrt{2})}{2}x$$

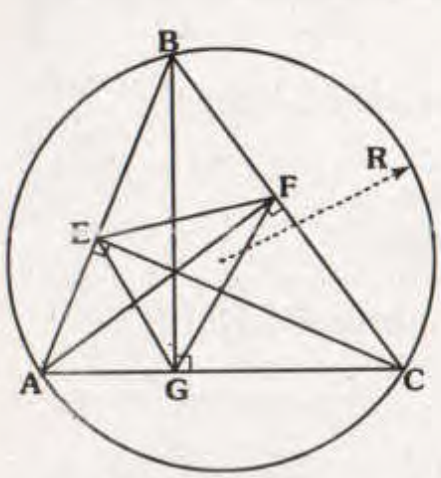
$$=\frac{(r_1+r_2+r)}{2}(r_1+r_2+r) \quad ...(3)$$

• De (1), (2) y (3):

$$S_{\triangle ABC}=r^2\left(\frac{r_1+r_2+r}{r_1+r_2-r}\right)$$

## TEOREMA

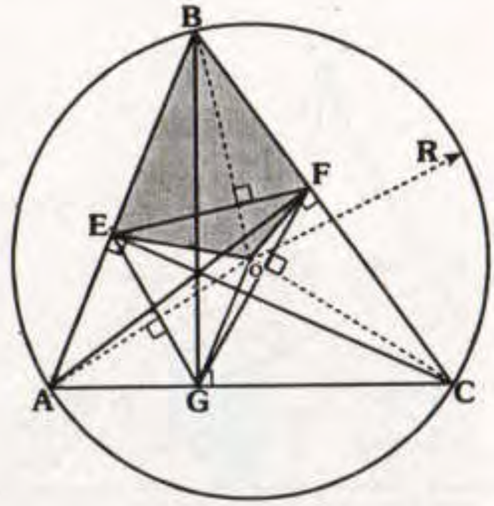
En el gráfico, el $\Delta ABC$ es acutángulo y "p" es el semiperímetro del triángulo órtico EFG.




Se cumple :

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=pR}$$

***Demostración:***




• Por teorema de puntos notables:

$$\overline{OB}\perp\overline{EF};\ \overline{OA}\perp\overline{EG}\ \text{y}\ \overline{OC}\perp\overline{EG}$$

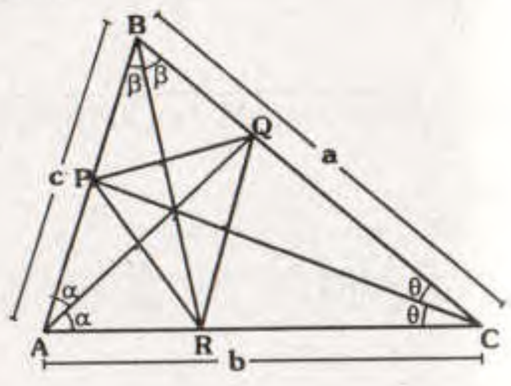
• $$S_{\Delta ABC}=\underbrace{S_{\square EOFB}}_{\frac{(EF)R}{2}}+\underbrace{S_{\square AEOG}}_{\frac{(EG)R}{2}}+\underbrace{S_{\square FOGC}}_{\frac{(FG)R}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=R\underbrace{\left(\frac{EF+EG+FG}{2}\right)}_{p}$$

$$\therefore\quad S_{\Delta ABC}=pR$$

## TEOREMA

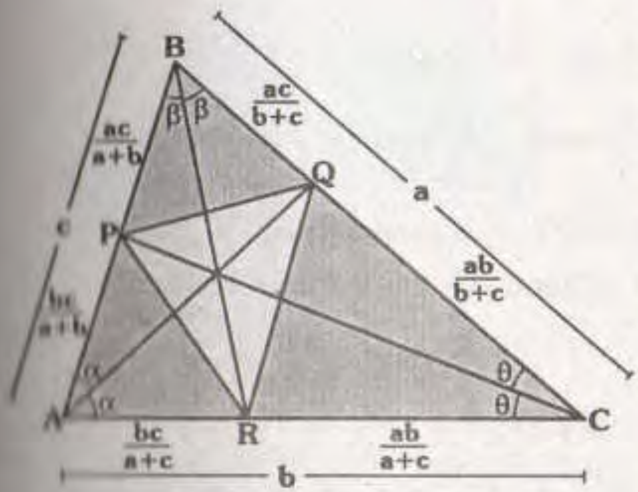
En el gráfico, el $\Delta PQR$ es el triángulo incéntrico.



Se cumple:

$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

**Prueba**




- Primero hallemos cada uno de las longitudes de los segmentos determinados por las bisectrices, por ejemplo:

$$AP=\frac{bc}{a+b} \quad y \quad PB=\frac{ac}{a+b}$$

$$\frac{S_{\Delta PBQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(PB)(BQ)}{ac}$$

$$\frac{S_{\Delta PBQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{ac}{(a+b)(b+c)} \quad ...(1)$$

- Análogamente:

$$\frac{S_{\Delta APR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{bc}{(a+b)(a+c)} \quad ...(2)$$

$$\frac{S_{\Delta CQR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{ab}{(a+c)(b+c)} \quad ...(3)$$

- Sumando (1), (2) y (3):

$$\frac{S_{\Delta ABC}-S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{ac}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ab}{(a+c)(b+c)}$$

- Ordenando tenemos:

$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

**Observación**

Usando el resultado anterior y apoyandonos en el teorema de las medias para los lados:

$$\frac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac}$$

$$\frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}$$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

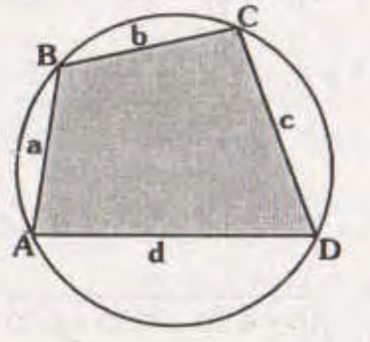
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\geq\frac{2abc}{(a+c)(b+c)(a+b)}$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}\leq\frac{1}{4}$$

## ÁREA DE UNA REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO INSCRITO O INSCRIPTIBLE

**(Fórmula de Brahmagupta)**

En el gráfico, el ⏢ABCD es inscrito.



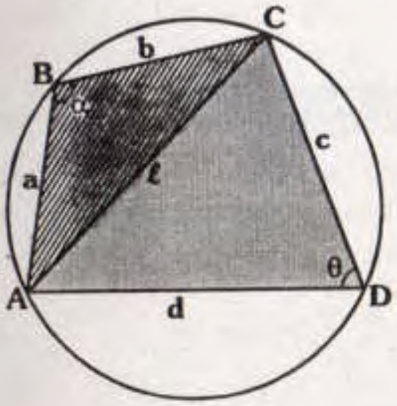

Sea:

$$p=\frac{a+b+c+d}{4}$$

Se cumple: $\boxed{S_{\square ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$

**Demostración:**

- Como no sabemos si los lados opuestos son paralelos y para no considerar casos, optemos por obtener el área total por partes, así:




$$\underbrace{S_{\square ABCD}}_{S}=\underbrace{S_{\Delta ABC}}_{\frac{ab}{2}\operatorname{sen}\alpha}+\underbrace{S_{\Delta ACD}}_{\frac{cd}{2}\operatorname{sen}\theta}$$

$$S=\frac{ab}{2}\operatorname{sen}\alpha+\frac{cd}{2}\operatorname{sen}\theta$$

- Como $\alpha+\theta=180° \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\theta$

$\Rightarrow\ 2S=(ab+cd)\operatorname{sen}\theta \Rightarrow 4S=(2ab+2cd)\operatorname{sen}\theta$ ...(1)

- Usando teorema de cosenos en $\Delta ABC$ y $\Delta ACD$:

$$\left.\begin{array}{r}\ell^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha\\ \ell^2=d^2+c^2-2cd\cos\theta\\ \text{Como } \alpha+\theta=180°\Rightarrow\cos\alpha=-\cos\theta\end{array}\right\}\ c^2+d^2-a^2-b^2=(2ab+2cd)\cos\theta$$

- Sumando los cuadrados de las expresiones (1) y (2)

$$16S^2+(c^2+d^2-a^2-b^2)=(2ab+2cd)^2\underbrace{(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}$$

$$\Rightarrow\ 16S^2=(2ab+2cd)^2-(c^2+d^2-a^2-b^2)^2$$

$$16S^2=(2ab+2cd+c^2+d^2-a^2-b^2)(2ab+2cd-c^2-d^2+a^2+b^2)$$

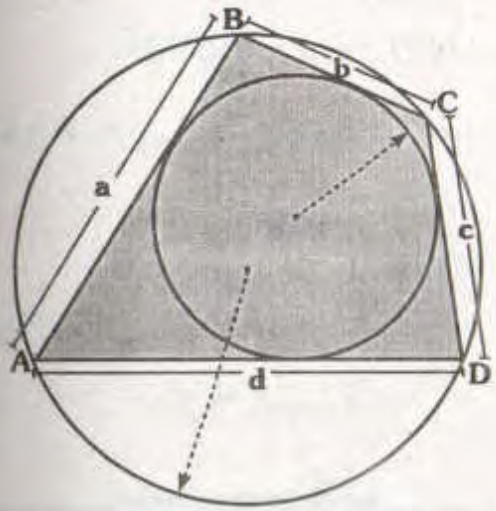
- Ordenando: $16S^2=[(c+d)^2-(a-b)^2][(a+b)^2-(c-d)^2]$

$$16S^2=\underbrace{(c+d+a-b)}_{(2p-2b)}\underbrace{(c+d+b-a)}_{(2p-2a)}\underbrace{(a+b+c-d)}_{(2p-2d)}\underbrace{(a+b+d-c)}_{(2p-2c)}$$

$$\Rightarrow\ 16S^2=2(p-b)2(p-a)2(p-d)2(p-c)$$

$$\therefore\quad S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

## PARA UN CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO E INSCRITO A LA VEZ (Bicéntrico)




En el gráfico, el ⏢ABCD es inscrito y circunscrito, al cual se denomina cuadrilátero bicéntrico.

Se cumple:

$$S_{\square ABCD} = \sqrt{abcd}$$

*Prueba*

- Usando el teorema de Pitot:

$$a+c=b+d=p$$

- Por teorema de Brahmagupta:

$$S_{\square ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$a+b \quad a+b \quad c+d \quad c+d$$

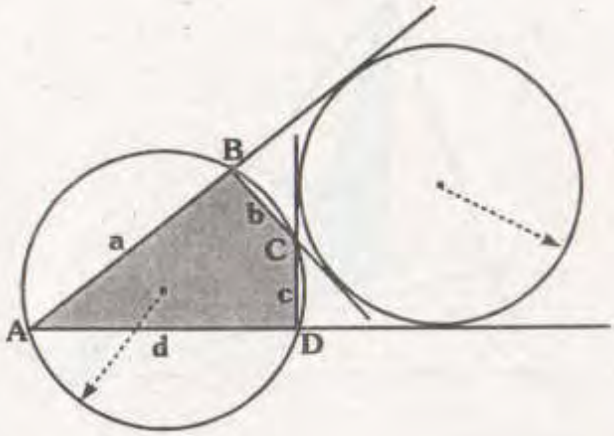
$\therefore \ S_{\square ABCD} = \sqrt{abcd}$

*Observación*

- *El teorema también es válida para un cuadrilátero es inscriptible y circunscriptible a la vez.*

## PARA UN CUADRILÁTERO INSCRITO Y EXINSCRITO A LA VEZ

En el gráfico, el ⏢ABCD es inscrito y exinscrito.




Se cumple:

$$S_{\square ABCD} = \sqrt{abcd}$$

*Prueba*

- Por la fórmula de Brahmagupta:

$$S_{\square ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad ...(1)$$

$$\text{con } p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

- Por teorema de Steiner:

$$a-c=d-b$$

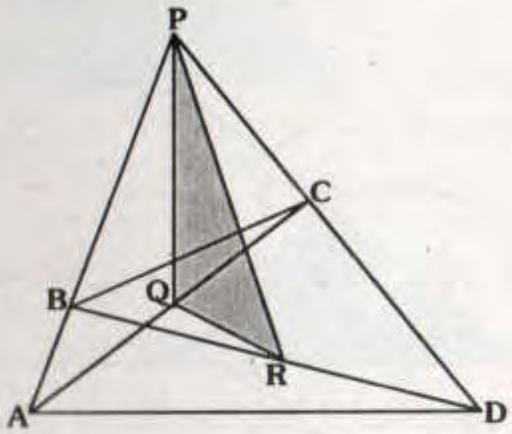
$$\Rightarrow a+b=c+d=p$$

• En (1)

$$S_{\square ABCD} = \sqrt{badc}$$

## TEOREMA

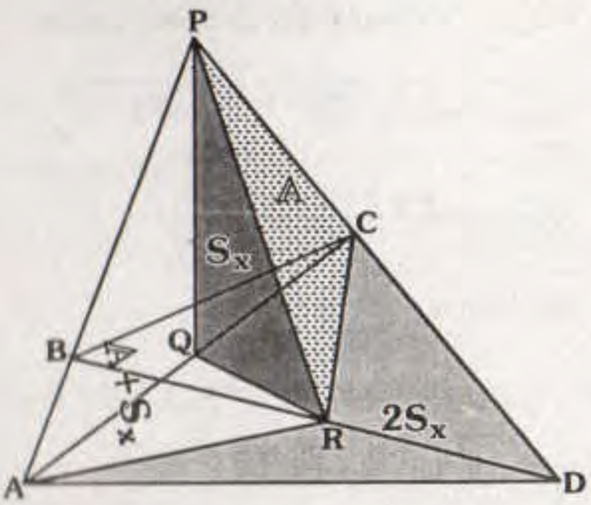
Sea el cuadrilátero convexo ABCD; sea p la intersección de las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$; Q y R son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente.




Se cumple:

$$\boxed{S_{\square ABCD} = 4S_{(\Delta QPR)}}$$

**Demostración:**




• Sea $S_{\Delta PRC} = \mathbb{A}$ y $S_{\Delta PQR} = S_x$

• En $\square$APCR:

$$S_{\square RQPC} = S_{\measuredangle APQR} = \mathbb{A} + Sx$$

• En $\Delta$APD : como BR=RD

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta ARP} = S_{\measuredangle ADPR} = \mathbb{A} + 2S_x$$

$$\Rightarrow \quad S_{\measuredangle ADCR} = 2S_x$$

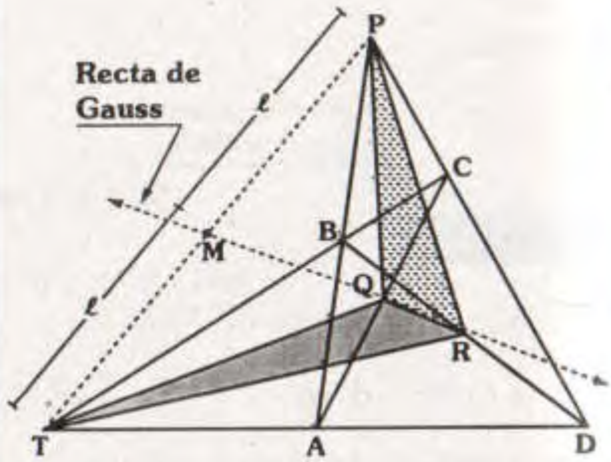
• En $\square$ABCD:

$$S_{\square ABCR} = S_{\measuredangle ADCR} = 2S_x$$

$$S_{\square ABCD} = 4S_x$$

**Observación**

• Usando el resultado anterior, tendremos:



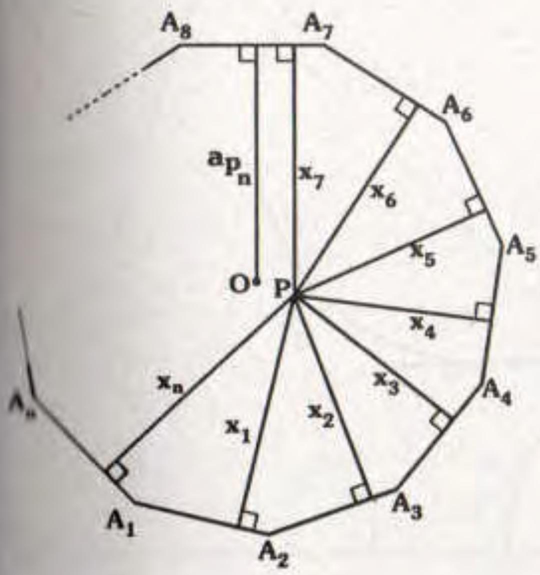

Si AQ=QC y BR=RD

$$\Rightarrow \boxed{S_{\Delta TQR} = S_{\Delta QPR}}$$

• Además la prolongación de $\overline{RQ}$, llegará al punto medio de $\overline{TP}$, a dicha recta se le conoce como: "RECTA DE GAUSS"

## TEOREMA DE VIVIANI

La suma de las distancias de un punto interior a todos los lados es igual al producto entre el número de lados con su respectivo apotema.



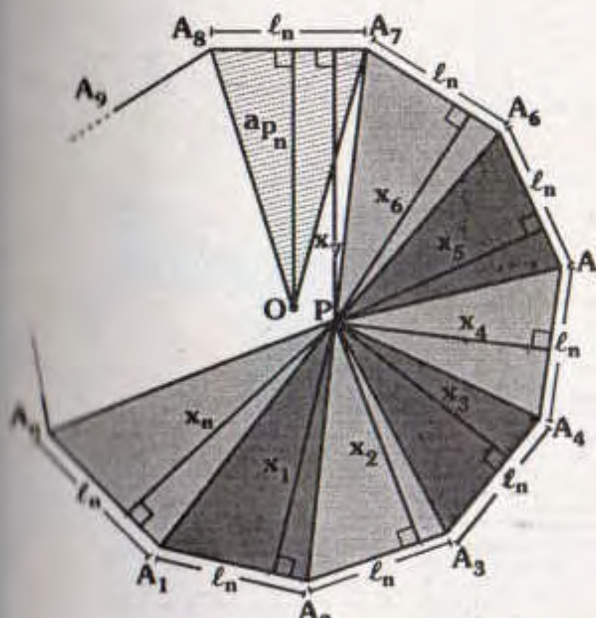

Sea $A_1A_2A_3...A_n$ un polígono regular de "n" lados y centro O, P es un punto interior del polígono.

Se cumple:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n(ap_n)}$$

**Demostración:**

• Sea "S" el área de la región polígonal




$$\Rightarrow \quad S = n(\underbrace{S_{\Delta A_7OA_8}}_{\frac{(\ell_n)a_P}{2}})$$

$$S = n\frac{(\ell_n)(a_P)}{2} \qquad ...(1)$$

• También:

$$S = \underbrace{S_{\Delta PA_1A_2}}_{\frac{(\ell_n)x_1}{2}} + S_{\Delta PA_2A_3} + S_{\Delta PA_3A_4} + .... + S_{\Delta PA_nA_1}$$

$$\frac{(\ell_n)x_1}{2} + \frac{(\ell_n)x_2}{2} + \frac{(\ell_n)x_3}{2} + ... + \frac{(\ell_n)x_n}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{(\ell_n)}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + .... + x_n) \qquad ...(2)$$

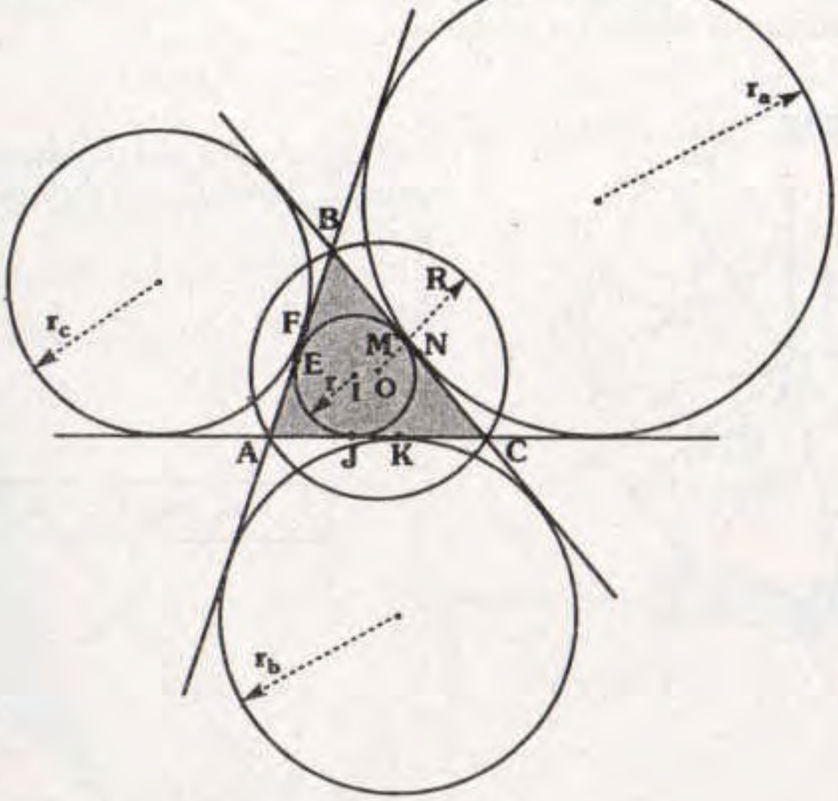
• De (1) y (2):

$$\frac{n(\ell_n)(a_P)}{2} = \frac{(\ell_n)}{2}(x_1 + x_2 + .... + x_n)$$

$$\therefore \quad n(ap_n) = x_1 + x_2 + x_3 + .... + x_n$$

**El siguiente grupo de teoremas se deja como ejercicio para el lector:**

Consideremos el siguiente gráfico:




Sean AB=c; BC=a y AC=b con: $a \geq b \geq c$

$h_a$; $h_b$ y $h_c$ : alturas relativas a los lados que miden a, b y c

p: semiperímetro de ABC

Se cumple:

$$S_{\Delta IJK} = S_{\Delta IMN} + S_{\Delta IEF}$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{R}{2} h_a h_b h_c} = \frac{2R^2}{abc} h_a h_b h_c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{abch_a h_b h_c}$$

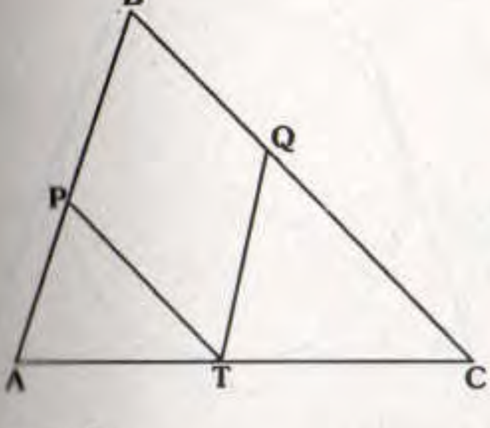
$$S_{\Delta ABC} = r\frac{ar_a}{r_a - r} = r\frac{br_b}{r_b - r} = r\frac{cr_c}{r_a - r}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{r(a+b)r_c}{r+r_c} = \frac{r(a+c)r_b}{r+r_b} = \frac{r(b+c)r_a}{r+r_a}$$

$$ab = rr_c + r_a r_b \qquad bc = rr_a + r_b r_c \qquad ac = rr_b + r_a r_c$$

$$S_{(IJK)} = S_{(IEF)} + S_{(IMN)}$$

En el gráfico, TPBQ es paralelogramo.

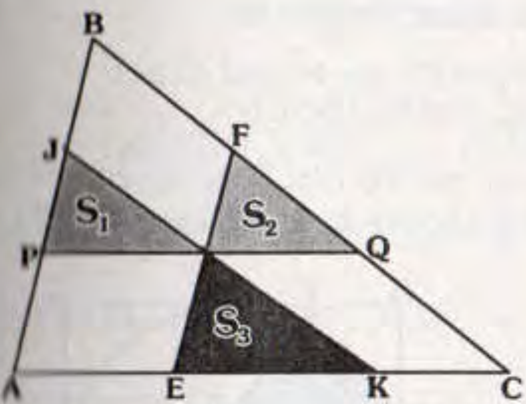



Se cumple:

$$\sqrt{S_{\Delta ABC}} = \sqrt{S_{\Delta APT}} + \sqrt{S_{\Delta TQC}}$$

En el gráfico,

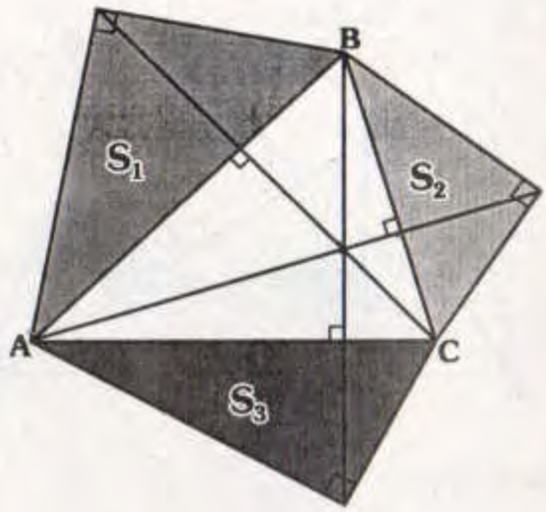
$\overline{PQ} // \overline{AC}$ ; $\overline{JK} // \overline{BC}$ y $\overline{EF} // \overline{AB}$




Se cumple:

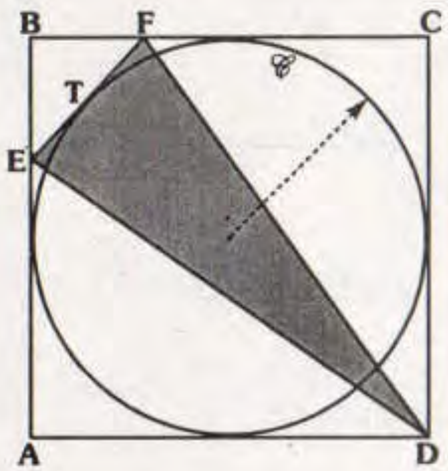
- $$\sqrt{S_{\Delta ABC}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$$
- $$S_{\Delta ABC} \leq 3(S_1 + S_2 + S_3)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} \geq \frac{9}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}}$$

En el gráfico se cumple:



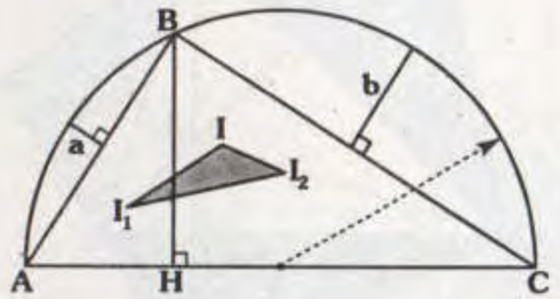

- $$(S_{\Delta ABC})^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$
- $$3S_{\Delta ABC} \geq S_1 + S_2 + S_3$$

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD y T es punto de tangencia.




Se cumple: $$\frac{S_{\Delta EFD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{1}{4}$$

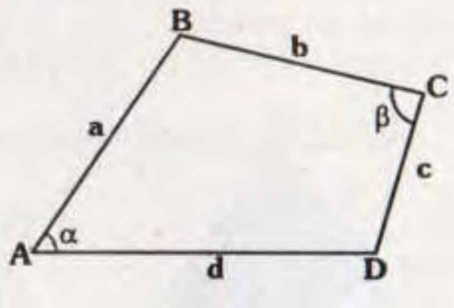
En el gráfico, I, $I_1$ e $I_2$ son incentros de ABC, AHB y BHC respectivamente "a" y "b" son flechas




Se cumple:

$$S_{\Delta II_1I_2}=\frac{ab\sqrt{2ab}}{a+b+2ab}$$

**Una expresión general**

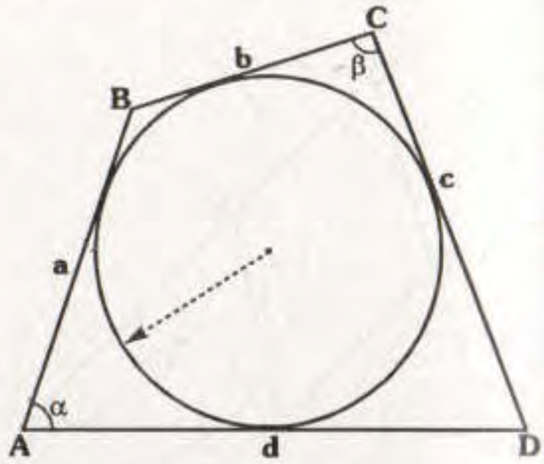



Sea: $p=\frac{a+b+c+d}{4}$

Se cumple:

$$(S_{\square ABCD})^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

- Si el $\square$ABCD es circunscrito




Se cumple

$$S_{\square ABCD}=abcd\ \text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

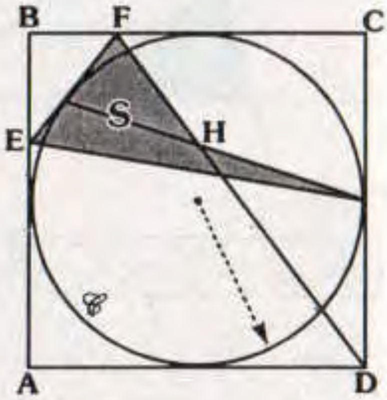
**Nota**

*El último resultado también es válido si el cuadrilátero es exinscrito.*

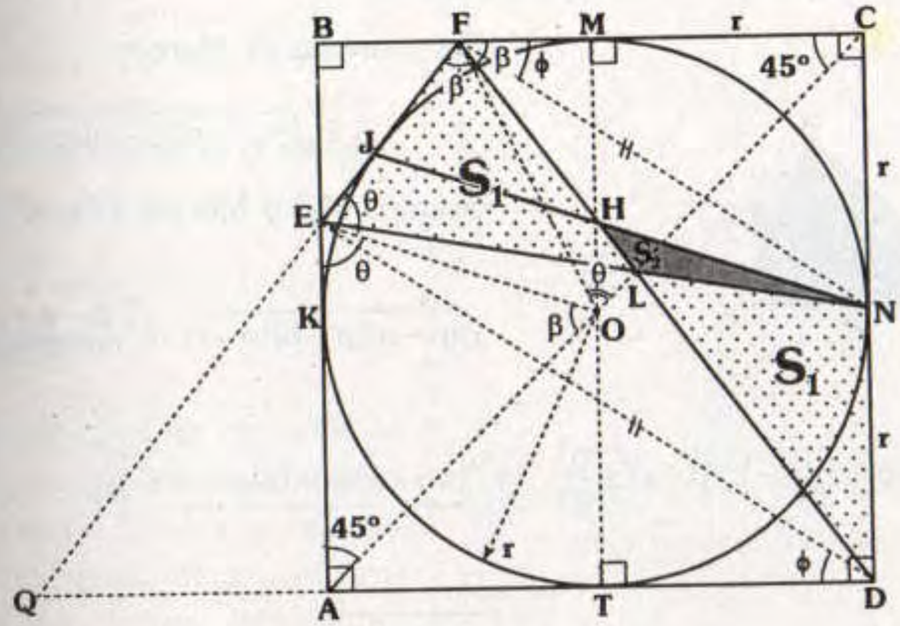
**Un buen resultado:**

Propuesto por Miguel Yépez (FC–UNMSM;2010)

En el gráfico ABCD es un cuadrado y $\mathscr{C}$ está inscrito en el pentágono AEFCD




Se cumple: $\frac{S}{S_{(ABCD)}}=\frac{1}{8}$



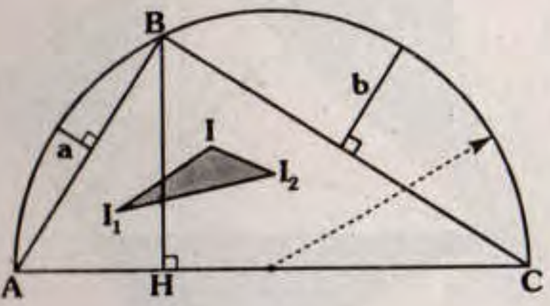

- Notemos que: $\Delta AEO \sim \Delta COF$

$$\Rightarrow \frac{AE}{OC}=\frac{AO}{FC} \quad \Rightarrow \frac{AE}{r\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{FC} \quad \Rightarrow \frac{AE}{2r}=\frac{2r}{FC}$$

- Luego: $\measuredangle EAD \sim \measuredangle NCF \Rightarrow \overline{ED} // \overline{FN}$
- Como $\overline{ED} // \overline{FN} \Rightarrow S_{\Delta ELF} = S_{\Delta LND} = S_1$
- El área pedida "S" es $S_1 + S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 + S_2 = S_{\Delta HND}$
- Por teorema de Newton en $\triangle QFCD$: $\overline{JN}$, $\overline{TM}$, $\overline{FD}$ y $\overline{QC}$ concurren en H.
- Como $\overline{TM}$ es diámetro $\Rightarrow$ MT=2r $\quad \Rightarrow \underbrace{S_1 + S_2}_{S} = S_{\Delta HND} = \frac{r.r}{2} = \frac{r^2}{2}$
- $S_{(ABCD)} = (2r)^2 = 4r^2$

$$\therefore \frac{S}{S_{(ABCD)}} = \frac{1}{8}$$

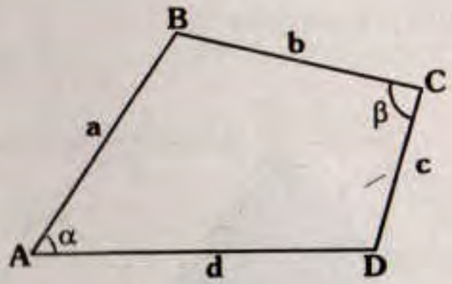
En el gráfico, I, $I_1$ e $I_2$ son incentros de ABC, AHB y BHC respectivamente "a" y "b" son flechas




Se cumple:

$$S_{\Delta II_1I_2} = \frac{ab\sqrt{2ab}}{a+b+2ab}$$

**Una expresión general**

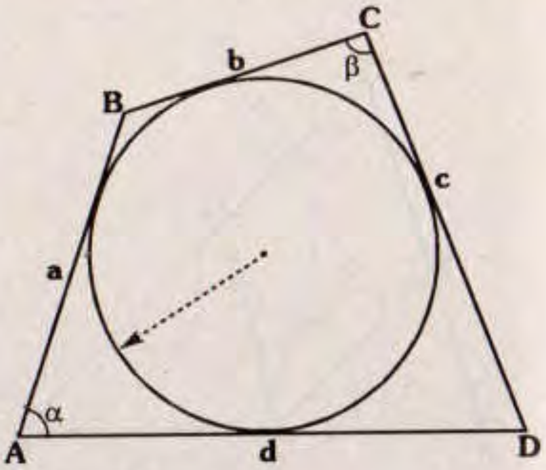



Sea: $p = \frac{a+b+c+d}{4}$

Se cumple:

$$(S_{\square ABCD})^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

- Si el $\square$ABCD es circunscrito




Se cumple

$$S_{\square ABCD} = abcd\ \text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

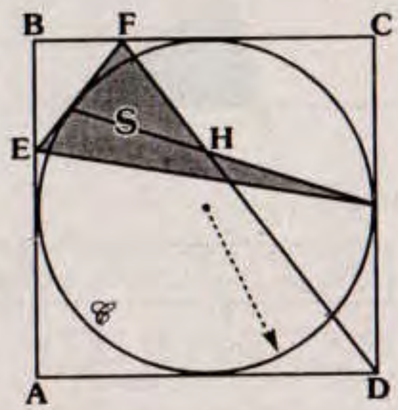
**Nota**

*El último resultado también es válido si el cuadrilátero es exinscrito.*

**Un buen resultado:**

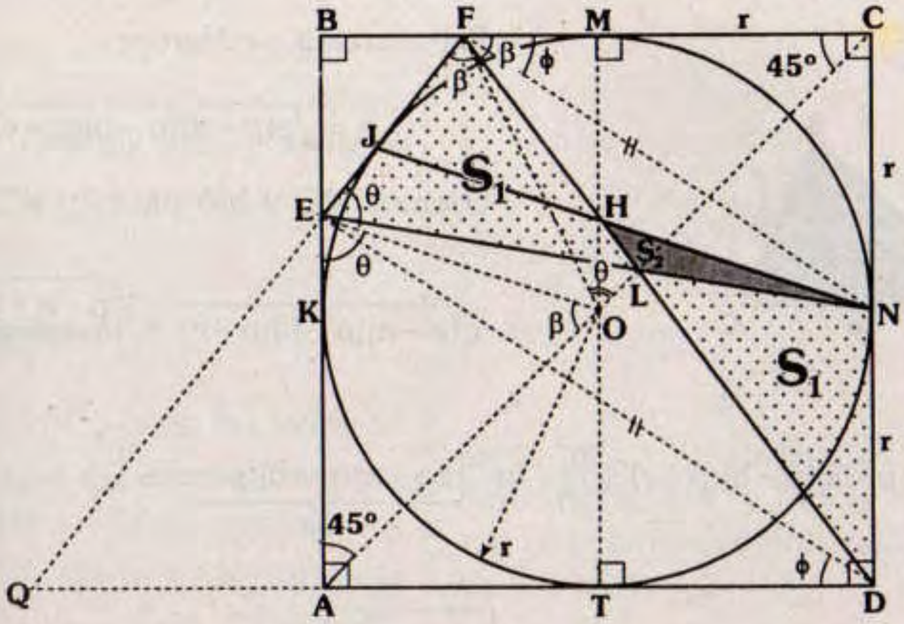
Propuesto por Miguel Yépez (FC–UNMSM;2010)

En el gráfico ABCD es un cuadrado y $\mathscr{C}$ está inscrito en el pentágono AEFCD




Se cumple: $\frac{S}{S_{(ABCD)}} = \frac{1}{8}$

Prueba 9




- Notemos que: $\Delta AEO \sim \Delta COF$

$$\Rightarrow \frac{AE}{OC}=\frac{AO}{FC} \quad \Rightarrow \frac{AE}{r\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{FC} \quad \Rightarrow \frac{AE}{2r}=\frac{2r}{FC}$$

- Luego: $\measuredangle EAD \sim \measuredangle NCF \;\Rightarrow\; \overline{ED}//\overline{FN}$

- Como $\overline{ED}//\overline{FN} \Rightarrow S_{\Delta ELF}=S_{\Delta LND}=S_1$

- El área pedida "S" es $S_1+S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1+S_2=S_{\Delta HND}$

- Por teorema de Newton en ⏢QFCD: $\overline{JN}$, $\overline{TM}$, $\overline{FD}$ y $\overline{QC}$ concurren en H.

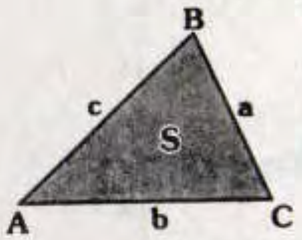
- Como $\overline{TM}$ es diámetro $\Rightarrow$ MT=2r $\quad \Rightarrow \underbrace{S_1+S_2}_{S}=S_{\Delta HND}=\frac{r.r}{2}=\frac{r^2}{2}$

- $S_{(ABCD)}=(2r)^2=4r^2$

$$\therefore \; \frac{S}{S_{(ABCD)}}=\frac{1}{8}$$

## RELACIÓN ENTRE EL ÁREA Y SEMIPERÍMETRO

Sea el $\Delta ABC$ de área "S" y semiperímetro "p".




Por teorema de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Usemos MG y MA para "p–a", "p–b", "p–c"

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{\overbrace{p-a+p-b+p-c}^{p}}{3}$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27} \Rightarrow \underbrace{p(p-a)(p-b)(p-c)}_{S^2} \leq \frac{p^4}{27}$$

$$\therefore \quad \boxed{S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}}$$

La igualdad se cumple en el triángulo equilátero.

## RELACIÓN ENTRE EL ÁREA E INRADIO

- Sea el $\Delta ABC$ de inradio r.
- Usando la expresión anterior para el $\Delta ABC$ de inradio r.

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow Sr^2 \leq \frac{p^2r^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow Sr^2 \leq \frac{S^2}{3\sqrt{3}}$$

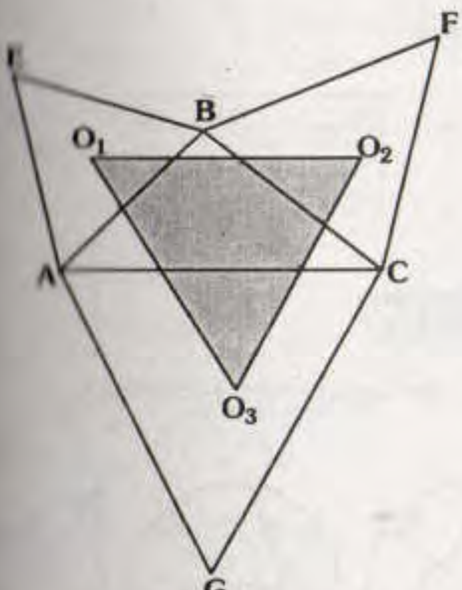
$$\therefore \quad \boxed{S \geq 3\sqrt{3}\, r^2}$$

# TEMAS SELECTOS

Los temas tratados a continuación no son motivo de examen de admisión, son algunos de ellos deducibles con ayuda de la trigonometría, sirven para profundizar un poco más el tema de áreas y también como entrenamiento para alumnos preolímpicos.

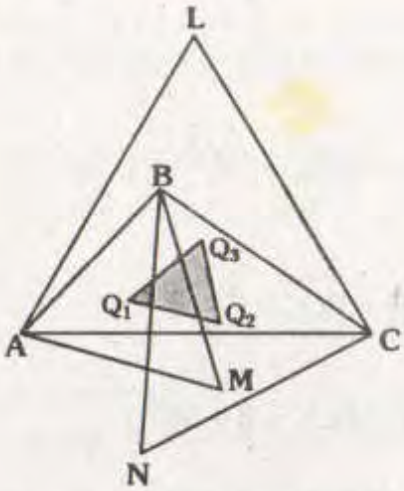
## TEOREMA DE NAPOLEÓN

Sea el triángulo ABC, sobre los lados se construyen triángulo equiláteros llamemos $T_1$ al triángulo cuyos vértices son los centros de dichos triángulos, ahora construyamos sobre los lados triángulos equiláteros interiores sea $T_2$ el triángulo cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros.




Se cumple:

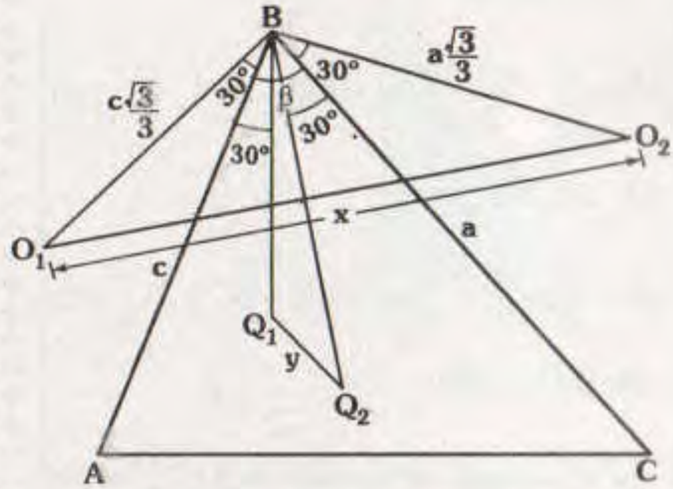
$$S_{(\Delta ABC)} = S_{T_1} - S_{T_2}$$




En el gráfico, los triángulos AEB, BFC, AGC, AMB, BNC y ALC son equiláteros, sus respectivos centros son $O_1$, $O_2$, $O_3$, $Q_1$, $Q_2$ y $Q_3$.

**Demostración:**

Usemos el siguiente resultado los triángulos $O_1O_2O_3$ y $Q_1Q_2Q_3$ son equiláteros, lo cual ya fue probado (ver una prueba en la publicación de puntos notables: fascículo 7), consideremos el siguiente gráfico:




Sea $BC=a$, $AB=c$ y $m\sphericalangle ABC=\alpha$

$$\Rightarrow \ S_{\Delta ABC} = \frac{ac}{2}\text{sen}\alpha \qquad ....(I)$$

También:

- $$BO_1 = BQ_1 = \frac{c\sqrt{3}}{3}$$
- $$BO_2 = BQ_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$
- $$m\sphericalangle O_1BO_2 = \beta + 60^\circ$$
- $$m\sphericalangle Q_1BQ_2 = \beta - 60^\circ$$

$$\Rightarrow \ S_{(\Delta O_1O_2O_3)} = S_{T_1} = x^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{(\Delta Q_1Q_2Q_3)} = S_{T_2} = y^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Luego:

$$S_{T_1} - S_{T_2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - y^2) \qquad ...(II)$$

- Por teorema de cosenos:

– En $\Delta O_1BO_2$:

$$x^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{c^2}{3} - \frac{2}{3}ac.\cos(\beta + 60^\circ) \qquad ...(III)$$

– En $\Delta Q_1BQ_2$:

$$y^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{c^2}{3} - \frac{2}{3}ac.\cos(\beta - 60^\circ) \qquad ...(IV)$$

- De (III) y (IV):

$$x^2 - y^2 = \frac{2}{3}ac[\underbrace{\cos(\beta - 60^\circ) - \cos(\beta + 60^\circ)}_{2\text{sen}\beta\text{sen}60^\circ}] = \frac{2\sqrt{3}}{3}ac.\text{sen}\beta \qquad ....(V)$$

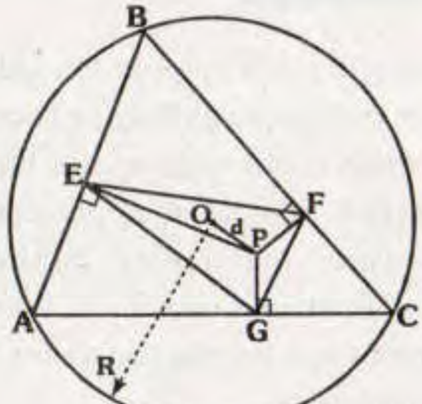
- (V) en (II)

$$S_{T_1} - S_{T_2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}ac.\text{sen}\beta\right) = \underbrace{\frac{ac}{2}\text{sen}\beta}_{S_{\Delta ABC}}$$

$$\therefore \quad S_{\Delta ABC} = S_{T_1} - S_{T_2}$$

## TEOREMA DE EULER

En el gráfico: $d<R$

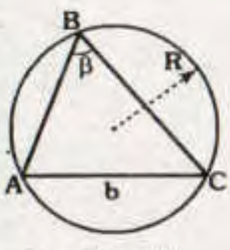



Se cumple:

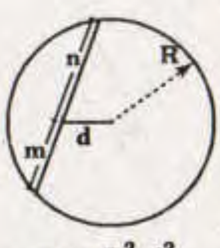
$$\boxed{\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}}$$

### Prueba

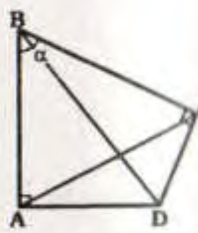
Usemos los siguientes teoremas:




**$b=2R\text{sen}\beta$**

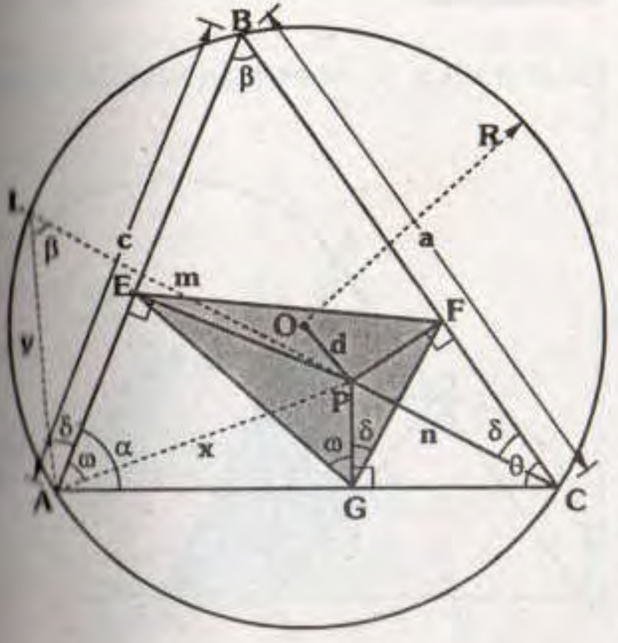



**$mn=R^2-d^2$**




**$AC=BD.\text{sen}\alpha$**

Ampliemos el gráfico inicial:




- Sea CP=n y PL=m
- Usemos razón de áreas:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta LAP}}=\dfrac{(EG)(GF)}{xy}\\[2ex]\dfrac{S_{\Delta LAP}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{my}{ac}\end{array}\right\}\quad \dfrac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{(EG)(GF)m}{xac}$$

- En los cuadriláteros AEPG y CGPF

$$EG = x\ \text{sen}\alpha$$
$$FG = n\ \text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow\ \frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{mn\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta}{ac}\qquad ...(*)$$

- Pero $\quad a = 2R\ \text{sen}\alpha$

$\qquad\qquad c=2R\ \text{sen}\theta$

- Como: $mn = R^2 - d^2$

$$\Rightarrow\ \frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{R^2-d^2}{4R^2}$$

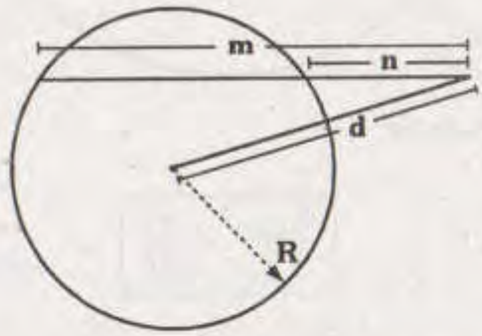
**Observación**

- Como el punto P es interior a la circunferencia, entonces:

$$R^2-d^2\le R^2\ \Rightarrow\ \frac{R^2-d^2}{4R^2}\le\frac{1}{4}$$

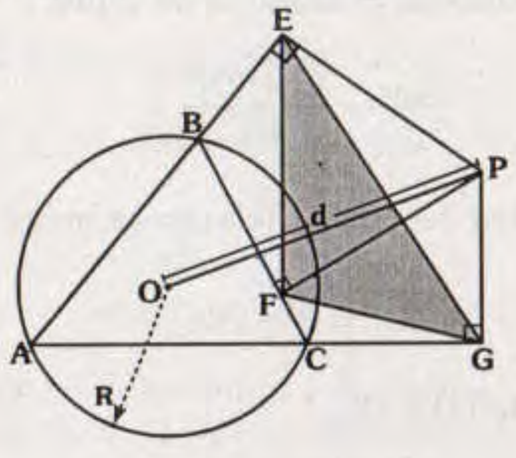
$$\Rightarrow\ \frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}\le\frac{1}{4}$$

- La igualdad se da cuando d=0, es decir P es el circuncentro.
- Si P es un punto exterior con las mismas notaciones y usando:




$$\boxed{d^2-R^2=mn}$$

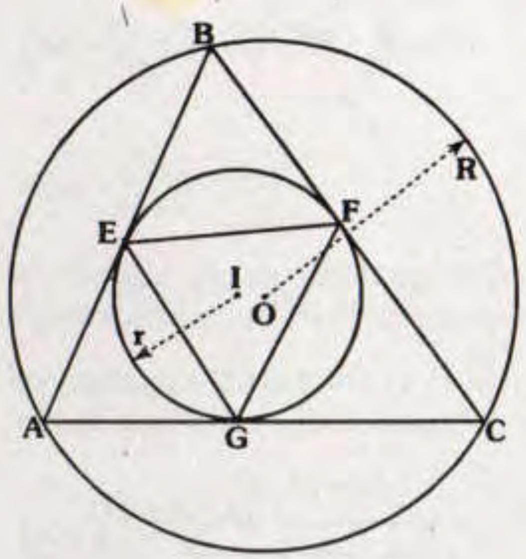
Se demuestra:




$$\boxed{\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{d^2-R^2}{4R^2}}$$

## TEOREMA

En el gráfico, R y r son circunradio e inradio del triángulo ABC




Se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{r}{2R}}$$

**Prueba**

- Usando el teorema de Euler:

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{R^2-(IO)^2}{4R^2} \qquad \text{....(1)}$$

- Por teorema (Relaciones métricas):

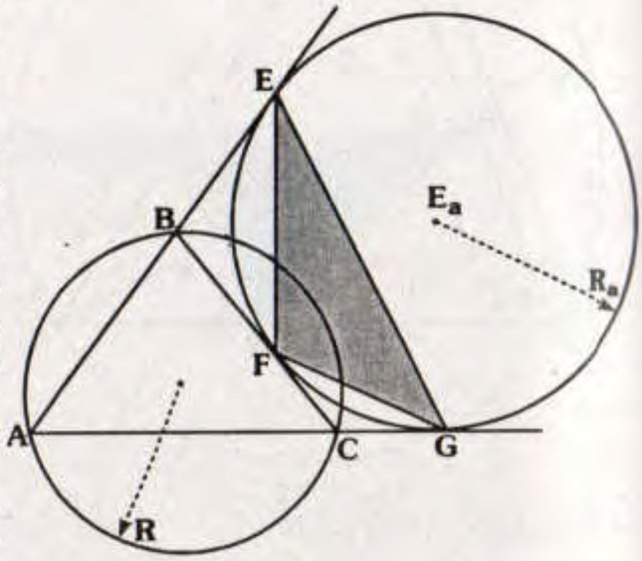
$$(IO)^2=R^2-2Rr \qquad \text{...(2)}$$

- De (1) y (2):

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{r}{2R}$$

## TEOREMA

En el gráfico, $R_a$ es exradio relativo a $\overline{BC}$.




Se cumple:

$$\boxed{\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{R_a}{2R}}$$

**Demostración:**

- Por teorema de Euler(para áreas)

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(E_aO)^2-R^2}{4R^2} \qquad \text{...(1)}$$

- Por teorema de relaciones métricas:

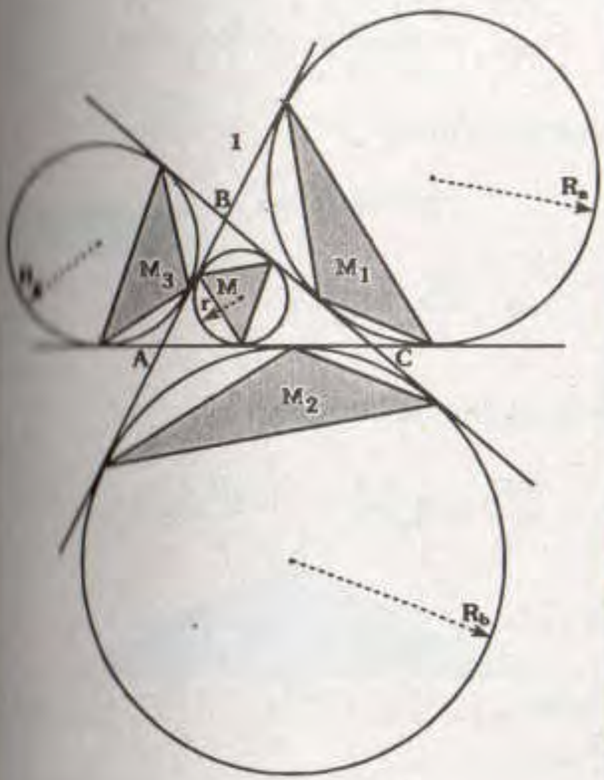
$$(E_aO)^2=R^2+2RR_a \qquad \text{...(2)}$$

- De (1) y (2):

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{R_a}{2R}$$

**Observación**

Como consecuencia de los últimos dos teoremas, tenemos:




Sea R el circunradio del $\Delta ABC$, y usando:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}$$

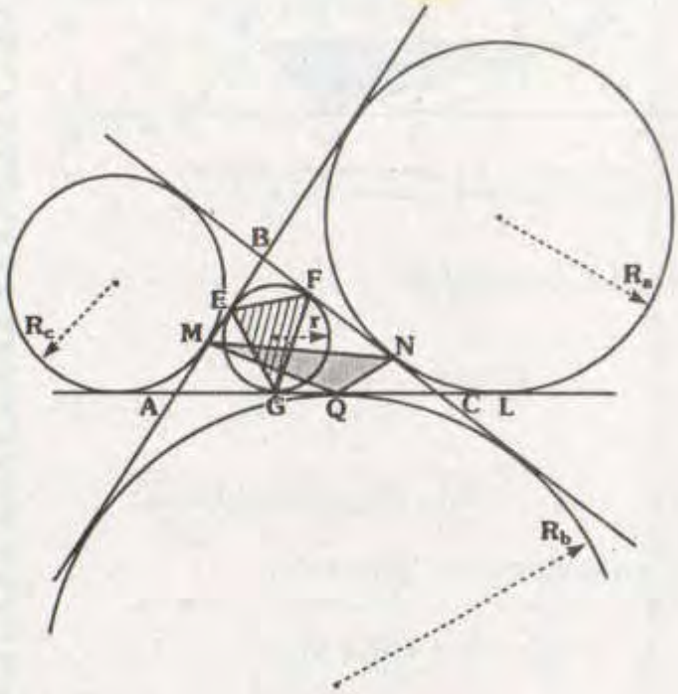
$$\Rightarrow \frac{2R}{r}=\frac{2R}{R_a}+\frac{2R}{R_b}+\frac{2R}{R_c}$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{M}=\frac{S_{\Delta ABC}}{M_1}+\frac{S_{\Delta ABC}}{M_2}+\frac{S_{\Delta ABC}}{M_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{M}=\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}+\frac{1}{M_3}}$$

## TEOREMA

En el gráfico, se muestra las circunferencias exinscritas y la inscrita.




Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta EFG}=S_{\Delta MNQ}}$$

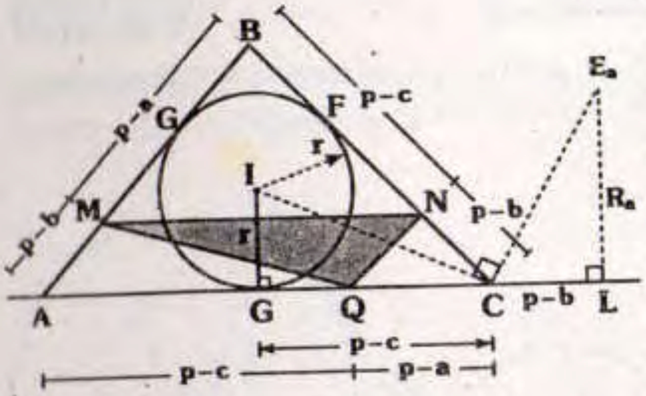
**Demostración:**

- Sea R el circunradio del $\Delta ABC$
- Por teorema (página 56)

$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{r}{2R} \qquad ...(\alpha)$$

- Solo grafiquemos la circunferencia inscrita, sean AB=c; BC=a; AC=b

y $p=\dfrac{a+b+c}{2}$




• $\triangle CGI \sim \triangle E_aLC$

$$\Rightarrow \frac{r}{p-c}=\frac{p-b}{R_a}$$

$$\Rightarrow rR_a=(p-b)(p-c)$$

• Análogamente tenemos:

$$rR_b=(p-a)(p-c) \quad y$$

$$rR_c=(p-a)(p-b) \qquad ...(2)$$

• Comparemos áreas:

$$\frac{S_{\Delta AMQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=\frac{rR_a}{bc} \qquad ...(3)$$

$$\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(p-a)(p-c)}{ac}=\frac{rR_b}{ac} \qquad ...(4)$$

$$\frac{S_{\Delta CNQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(p-b)(p-a)}{ba}=\frac{rR_c}{ab} \qquad ...(5)$$

• Sumando (3), (4) y (5):

$$\frac{S_{\Delta ABC}-S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{rR_a}{bc}+\frac{rR_b}{ac}+\frac{rR_c}{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=1-\left(\frac{rR_a}{bc}+\frac{rR_b}{ac}+\frac{rR_c}{ab}\right) \qquad ...(6)$$

• Usando: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{4R}=pr$

• En (6):

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=1-\left(\frac{aR_a}{4Rp}+\frac{bR_b}{4Rp}+\frac{cR_c}{4Rp}\right) \qquad ...(7)$$

• Ahora usemos:

$$pr=R_a(p-a)$$

$$\Rightarrow \frac{aR_a}{p}=R_a-r$$

• Análogamente tenemos:

$$\frac{bR_b}{p}=R_b-r \quad y \quad \frac{cR_c}{p}=R_c-r$$

• En (7):

$$\frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=1-\frac{(R_a-r+R_b-r+R_c-r)}{4R} \qquad ...(8)$$

• Por teorema de Steiner:

$$R_a+R_b+R_c=4R+r$$

• En (8):

$$\frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{4R-(4R+r-3r)}{4R}$$

$$\frac{S_{\Delta MNQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{r}{2R} \qquad ...(\beta)$$

• De $(\alpha)$ y $(\beta)$:

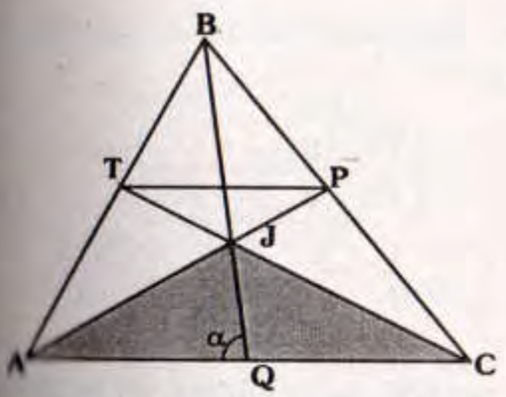
$$S_{\Delta EFG}=S_{\Delta MNQ}$$

## TEOREMA

Si en un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes AP, CT y BQ en F. Se cumple:

$$\boxed{\frac{JQ}{BQ}+\frac{JP}{AP}+\frac{JT}{CT}=1}$$

**Prueba**




Usemos:

$$\left.\begin{aligned}(AJC)&=\frac{(AC)(JQ)}{2}\operatorname{sen}\alpha\\ (ABC)&=\frac{(AC)(BQ)}{2}\operatorname{sen}\alpha\end{aligned}\right\}\ \frac{JQ}{BQ}=\frac{(AJC)}{(ABC)}\ \ldots(1)$$

Análogamente tenemos:

$$\frac{JP}{AP}=\frac{(BJC)}{(ABC)}\qquad\ldots(2)$$

$$\frac{JT}{CT}=\frac{(AJB)}{(ABC)}\qquad\ldots(3)$$

Sumando (1), (2) y (3):

$$\frac{JQ}{BQ}+\frac{JP}{AP}+\frac{JT}{CT}=\frac{(AJC)+(BJC)+(AJB)}{(ABC)}$$

$$\therefore\quad \frac{JQ}{BQ}+\frac{JP}{AP}+\frac{JT}{CT}=1$$

**Observación**

Veamos algunas consecuencias de este resultado

- Si J es circuncentro y el circunradio es R, entonces:

  $JQ=BQ-R$ ; $JP=AP-R$ y $JT=CT-R$

Luego:

$$\frac{BQ-R}{BQ}+\frac{AP-R}{AP}+\frac{CT-R}{CT}=1$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{1}{BQ}+\frac{1}{AP}+\frac{1}{CT}=\frac{2}{R}}$$

- Si usamos: $MH\le MA$, para

$$\frac{JQ}{BQ}\ ;\ \frac{JP}{AP}\ \text{y}\ \frac{JT}{CT}$$

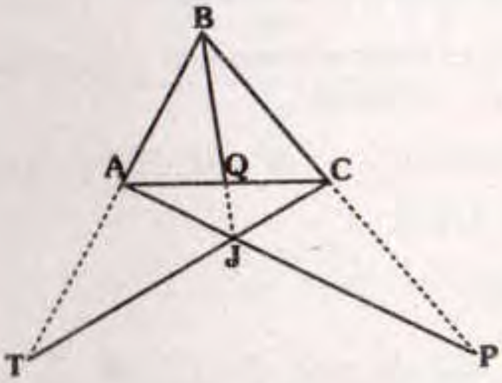
$$\frac{3}{\dfrac{BQ}{JQ}+\dfrac{AP}{JP}+\dfrac{CT}{JT}}\le\frac{\overbrace{\dfrac{JQ}{BQ}+\dfrac{JP}{AP}+\dfrac{JT}{CT}}^{1}}{3}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{BQ}{JQ}+\frac{AP}{JP}+\frac{CT}{JT}\ge 9}$$

- También: $\frac{9}{2}R\le BQ+AP+CT$, donde $\overline{BQ}$, $\overline{AP}$ y $\overline{CT}$ son cevianas interiores que pasan por el circuncentro.

## TEOREMA

- En el gráfico, respecto del $\Delta ABC$, $\overline{BQ}$ es ceviana interior, $\overline{CT}$ y $\overline{AP}$ son cevianas exteriores concurrentes en J.



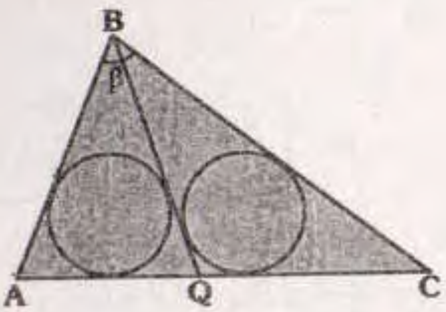

Se cumple:

$$\frac{JT}{CT}+\frac{JP}{AP}-\frac{JQ}{BQ}=1$$

La prueba es análoga a la anterior se deja como ejercicio para el lector.

## TEOREMA

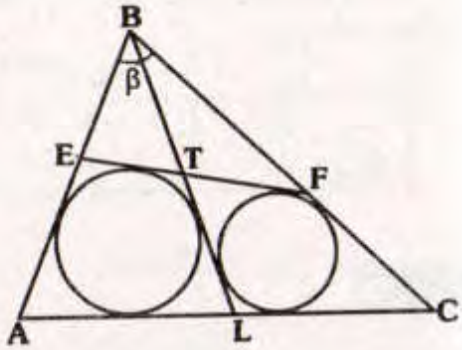
- En el gráfico, las circunferencias inscritas en los triángulos ABQ y CBQ son congruente.




Se cumple: $S_{\Delta ABC}=(BQ)^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$

***Demostración:***

- Usemos los siguientes teoremas:



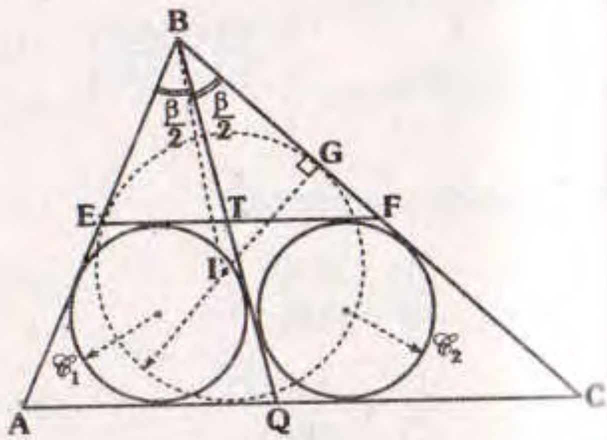

- Para cualquier ceviana interior, se cumple:

$$BL=p_{\Delta EBF}$$
$$BT=p_{\Delta ABC}-AC$$

$p_{\Delta EBF}$ : Semiperímetro del $\Delta EBF$

La prueba, se realizará en la publicación de circunferencia.

***En el gráfico inicial:***




- En el gráfico, $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2$
- Se traza $\overline{EF}$ tangente común a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ como $\mathscr{C}_1 \cong \mathscr{C}_2 \Rightarrow \overline{EF} // \overline{AC}$

- $\Delta ABC \sim \Delta EBF$ :

$$\frac{BT}{BQ} = \frac{p_{\Delta EBF}}{p_{\Delta ABC}}$$

- $BQ = p_{\Delta EBF}$

- Como $BT = p_{\Delta ABC} - AC$ y

$$\underbrace{BG}_{r\ ctg\frac{\beta}{2}} = p_{\Delta ABC} - AC$$

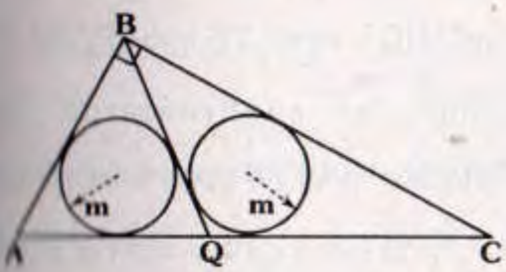
$$\Rightarrow \ BT = r\ ctg\frac{\beta}{2}$$

- $$\underbrace{r\ p_{\Delta ABC}}_{S_{\Delta ABC}}\ ctg\frac{\beta}{2} = (BQ)^2$$

$$\therefore \ S_{\Delta ABC} = (BQ)^2 tg\frac{\beta}{2}$$

**COROLARIO**

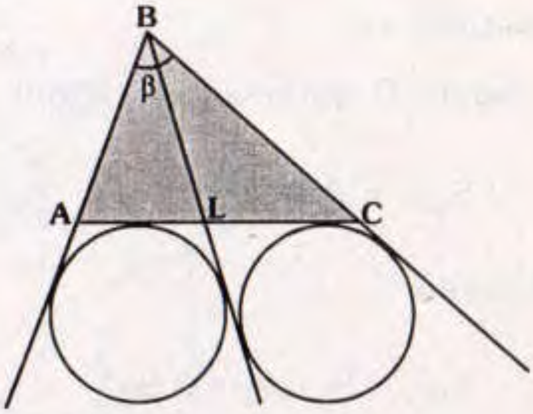
Cuando $\beta = 90°$ , tenemos:




$$\Rightarrow \ \boxed{S_{\Delta ABC} = (BQ)^2}$$

**Observación**

Con el mismo criterio, si dos circunferencias exinscritas de los $\Delta$s ABL y BLC relativas a $\overline{AL}$ y $\overline{LC}$ respectivamente son congruentes.

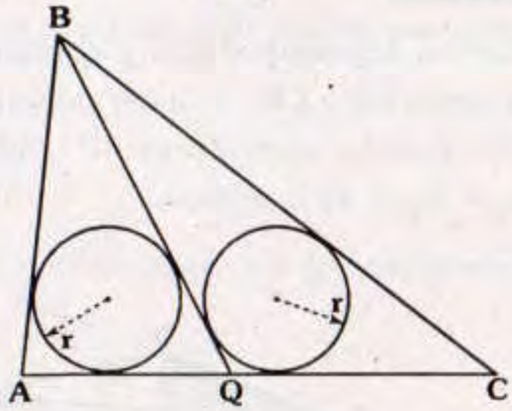



Se cumple:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = (BL)^2 tg\frac{\beta}{2}}$$

## TEOREMA

En el gráfico, se muestra las circunferencias inscritas en los $\Delta$s ABQ y QBC.




Sea p el semiperímetro del $\Delta ABC$ y $AC=b$.

Se cumple:

$$\boxed{BQ=\sqrt{p(p-b)}}$$

**Prueba**

Sea AB=c, BC=b, AC=a y

$m\measuredangle ABC=\beta$

- Usando el teorema (pag. N°69)

$$S_{\Delta ABC}=(BQ)^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \qquad ...(1)$$

- Usando:

$$S_{\Delta ABC}=(p-a)(p-c)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \qquad ...(2)$$

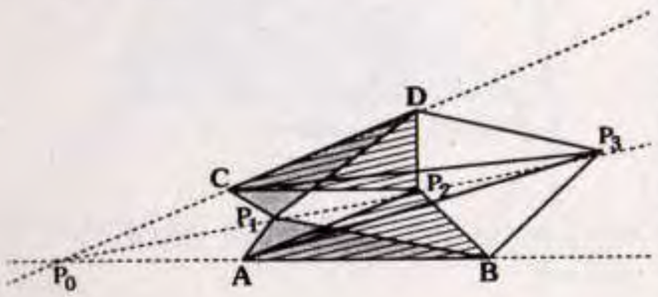
- Multiplicando las expresiones (1) y (2):

$$\underbrace{(S_{\Delta ABC})^2}_{p(p-a)(p-b)(p-c)}=(BQ)^2(p-a)(p-c)$$

$$\therefore \quad BQ=\sqrt{p(p-b)}$$

## TEOREMA

Dados los segmentos fijos y coplanares, tales como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, el lugar geométrico de los puntos coplanares "P" tal que $S_{\Delta APB}=S_{\Delta CPD}$ es una recta.




Si: $\quad S_{(\Delta P_1AB)}=S_{(\Delta P_1CD)}$

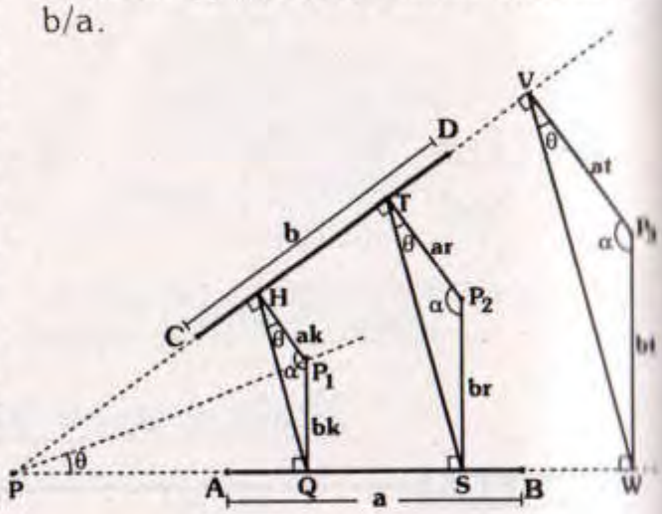
$S_{(\Delta P_2AB)}=S_{(\Delta P_2CD)}$

$S_{(\Delta P_3AB)}=S_{(\Delta P_3CD)}$

$\Rightarrow \; P_1, P_2, P_3, ....$ son colineales

**Demostración:**

**a)** Analicemos primero si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son paralelos como las áreas de $AP_1B$ y $CP_1B$ son iguales y siendo AB y CD fijos (sea $\overline{AB}$=a y $\overline{CD}$=b), entonces la razón de sus respectivas alturas es b/a.




- Notemos que los $\Delta$s $HP_1Q$ , $TP_2S$ y $VP_3W$ son semejantes

$m\measuredangle P_1HQ=m\measuredangle P_2TS=m\measuredangle P_3VW=\theta$

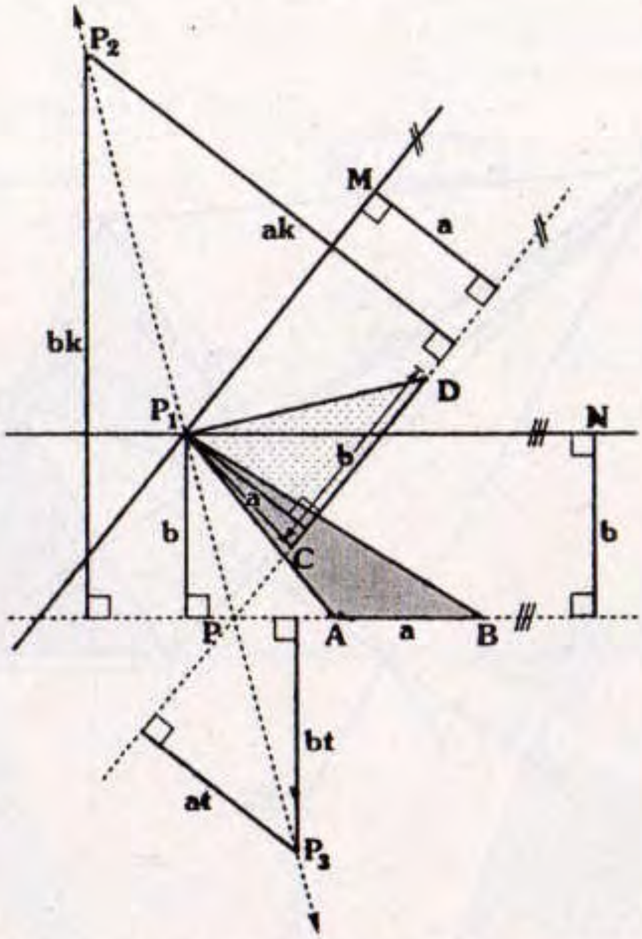
- Como los cuadriláteros $PHP_1Q$, $PTP_2S$ y $PVP_3W$ son inscriptibles

$m\measuredangle P_1PQ=m\measuredangle P_2PS=m\measuredangle P_3PW=\theta$

- Es decir la prolongación de $\overline{PP_1}$ pasará por $P_2$ y $P_3$

$\therefore \; P, P_1, P_2$ y $P_3$ son colineales

- Analicemos ahora puntos exteriores
- Se podría partir de la misma forma como en el primer caso, se llegará al mismo resultado. Optemos por ubicar la recta.




- Ubiquemos M y N tal que la distancia de M a $\overleftrightarrow{CD}$ sea "a" y la distancia de N a $\overleftrightarrow{AB}$ sea "b"
- Por M se traza la paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ y por N la paralela $\overleftrightarrow{AB}$ dicha paralelas se cortan en $P_1$

$$\Rightarrow \; S_{\Delta P_1AB} = S_{\Delta P_1CD} = \frac{ab}{2}$$

- Cualquier punto de la recta que pasa por P y $P_1$ sumple que la condición.

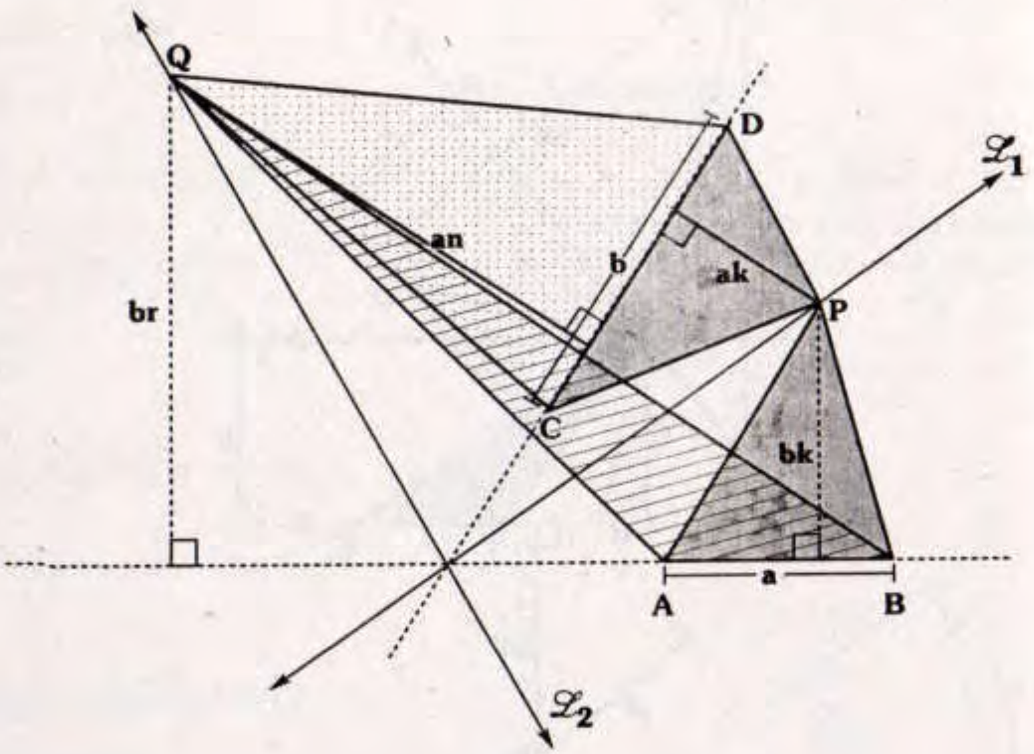
Por ejemplo:

– $S_{\Delta P_2AB} = S_{\Delta P_2CD}$

– $S_{\Delta P_3AB} = S_{\Delta P_3CD}$

Nota

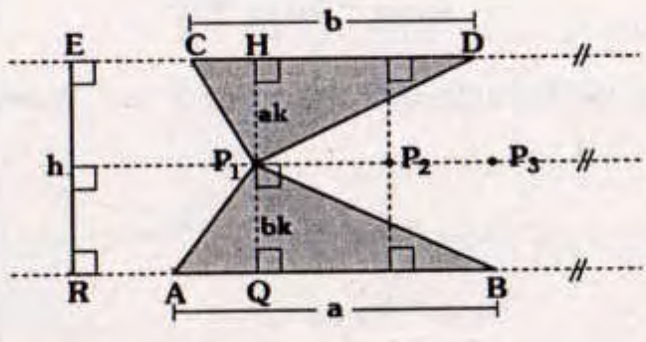
• *Cuando los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son paralelos, se tendrán dos rectas que cumple tal condición:*




• *Todo punto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, cumple:* $\boxed{S_{\Delta APB} = S_{\Delta CPD}}$

• *Todo punto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, cumple:* $\boxed{S_{\Delta AQB} = S_{\Delta CQD}}$

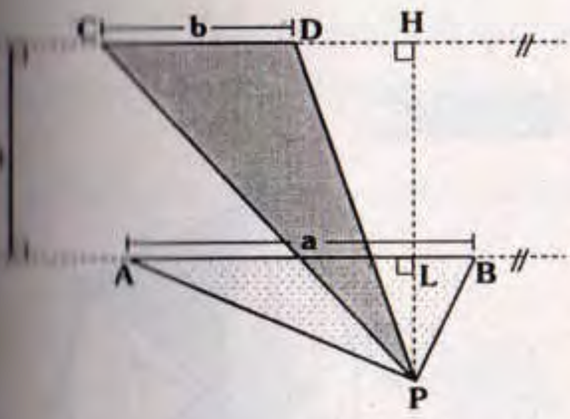
**b)** Ahora analicemos cuando $\overline{AB} // \overline{CD}$



Si un punto ($P_1$) cumple que:

$S_{\Delta P_1AB}=S_{\Delta P_1CD} \Rightarrow \frac{P_1Q}{P_1H}=\frac{b}{a}$, si la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es h es $P_1Q=\frac{hb}{a+b}$; lo mismo para cada punto entre las paralelas ($P_2$ y $P_3$ por ejemplo), es decir $P_1$, $P_2$, $P_3$,....$P_i$ son colineales.

- Veamos ahora puntos exteriores, para ello consideremos: $AB \neq CD$ ya que si $AB=CD$, solo habrán puntos entre las rectas que contengan a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
- Sea a>b.




- Si P cumple la condición, entonces:

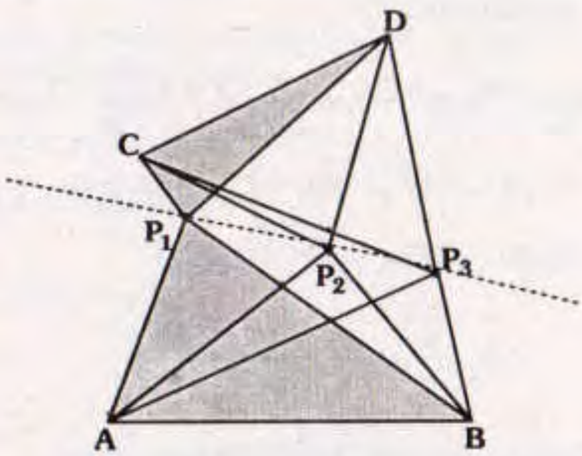
$$S_{\Delta APB}=S_{\Delta APCD} \Rightarrow \frac{PL}{PH}=\frac{b}{a}$$

- Luego $PL=\frac{b}{(a-b)}h$, luego "PL" es constante.
- Todo punto ubicado en la paralela a AB y que pase por P cumple la condición.

c) Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ están ubicado sobre una misma recta, la unica posibilidad de encontrar puntos tal que $S_{\Delta APB}=S_{\Delta CPD}$ es que AB=CD y cualquier punto cumpliría tal condición:

## TEOREMA

Dados los segmentos fijos y coplanares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, el lugar geométrico de los puntos "P" en dicho plano tal que "$S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PCD}$" es constante es una recta.




En el gráfico:

Si:

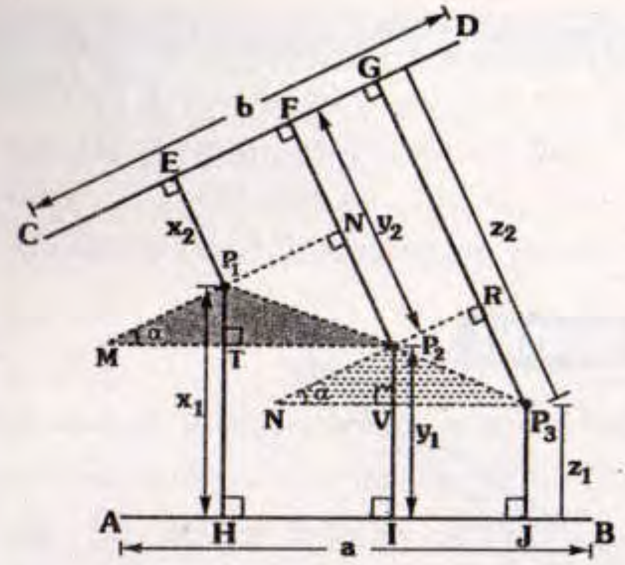
$$S_{\Delta P_1AB}+S_{\Delta P_1CD}=S_{\Delta P_2AB}+S_{\Delta P_2CD}=S_{\Delta P_3AB}+S_{\Delta P_3CD}=...$$

Se cumple:

$P_1$, $P_2$, $P_3$,.... son colineales

**Demostración:**

- Analicemos solo tres puntos, sea AB>CD.




- Los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ cumplen la condición:

$$S_{\Delta P_1AB}+S_{\Delta P_1CD}=S_{\Delta P_2AB}+S_{\Delta P_2CD}=S_{\Delta P_3AB}+S_{\Delta P_3CD}$$

$$\Rightarrow\ ax_1+bx_2=ay_1+by_2=az_1+az_2$$

- Luego: $a(x_1-y_1)=b(y_2-x_2)$

$$\Rightarrow\ \frac{a}{b}=\frac{y_2-x_2}{x_1-y_1}=\frac{P_2N}{P_1T}$$

- Análogamente, tendremos:

$$\frac{a}{b}=\frac{z_2-y_2}{y_1-z_1}=\frac{RP_3}{P_2V}$$

- Como:

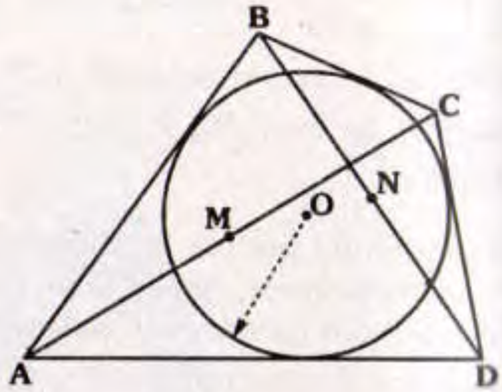
$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle MTP_1\sim\measuredangle MNP_2\Rightarrow\dfrac{MP_2}{MP_1}=\dfrac{a}{b}\\ \measuredangle NVP_2\sim\measuredangle NRP_3\Rightarrow\dfrac{NP_3}{NP_2}=\dfrac{a}{b}\end{array}\right\}\ \Delta P_1MP_2\sim\Delta P_2NP_3$$

$$\Rightarrow\ m\measuredangle MP_2P_1=m\measuredangle NP_3P_2$$

$$\Rightarrow\ P_1,P_2\text{ y }P_3\text{ son colineales}$$

## TEOREMA DE NEWTON

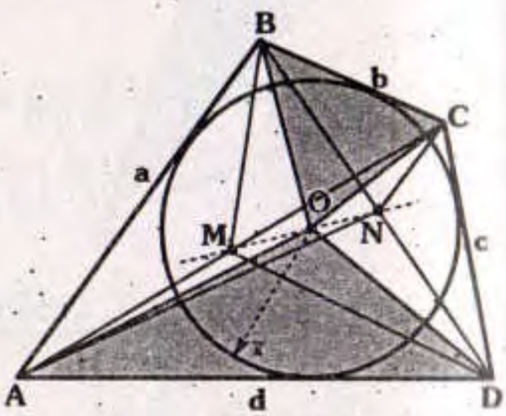
En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, se cumple que los puntos medios de las diagonales y el centro de dicha circunferencia son colineales.




En el gráfico, el ⏢ABCD es circunscrito, AM=MC y BN=ND. Se cumple:

M, O y N son colineales

**Prueba**




- Notemos:

$$S_{\Delta MAD}=S_{\Delta MCD}=\frac{S_{\Delta ABC}}{2}$$

$$S_{\Delta MCB}=S_{\Delta MAB}=\frac{S_{\Delta ACD}}{2}$$

$$S_{\Delta MAD}=S_{\Delta MBC}=\frac{S_{\ ABCD}}{2}\qquad\ldots(1)$$

Análogamente:

$$S_{\Delta NAD} = S_{\Delta NBC} = \frac{S_{\ ABCD}}{2} \qquad ...(2)$$

También:

$$S_{\Delta OAD} + S_{\Delta OBC} = \frac{br}{2} + \frac{dr}{2} = r\frac{(b+d)}{2} = \frac{S_{\ ABCD}}{2}$$

De (1), (2) y (3):

Los puntos M, O y N cumplen la condición considerando los segmentos fijos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ $\Rightarrow$ M, O y N son colineales, por el teorema anterior.

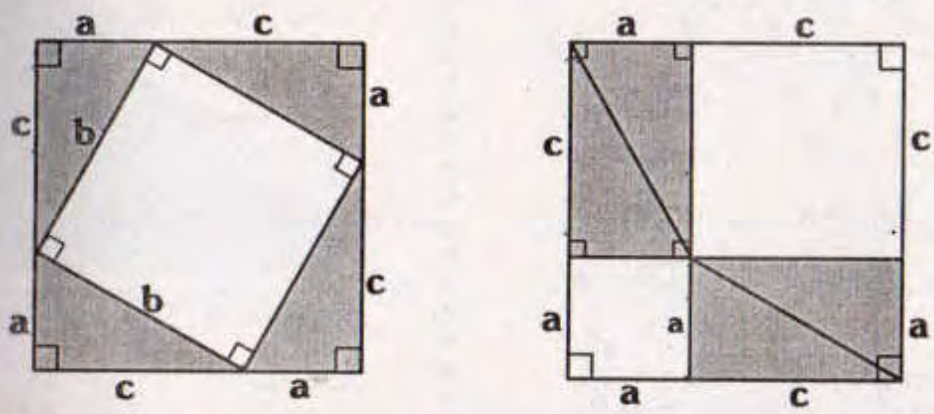
## ALGUNAS DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Su descubrimiento del teorema recae sobre la escuela pitagórica, en la actualidad cuenta con un mayor número de demostraciones diferentes.

En el libro de E.S.Loomis (1927) aparecen 367 pruebas diferentes.

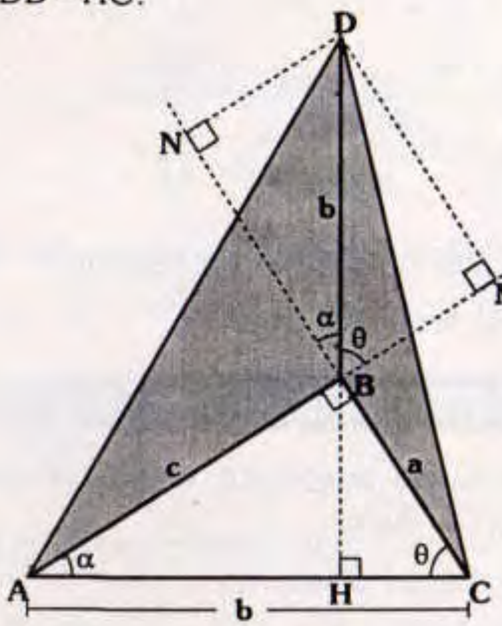
Aquí damos algunas pruebas, basadas en la idea de áreas.

**1** Partimos de un cuadrado cuyo lado mide "a+c"




Se puede considerar una prueba visual, notemos que a un cuadrado de lado "a+c", en la izquierda le hemos quitado cuatro triángulos congruentes de catetos "a" y "c". Al cuadrado de la derecha le hacemos algo similar, entonces: $b^2 = a^2 + c^2$

Partimos así, se traza el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura $\overline{BH}$, se ubica D en la prolongación de $\overline{HB}$ tal que BD=AC.




- En el gráfico, sea S, el área de la región cuadrangular no convexa ADCB.

$$\Rightarrow S=\frac{b.b}{2}=\frac{b^2}{2}$$

Pero: $S=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta DBC}$

- También:

$\measuredangle BMD \cong \measuredangle BCA \Rightarrow DM=c$

$\measuredangle BND \cong \measuredangle BAC \Rightarrow DN=a$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABD}=\frac{c^2}{2} \quad y \quad S_{\Delta DBC}=\frac{a^2}{2}$$

Finalmente:

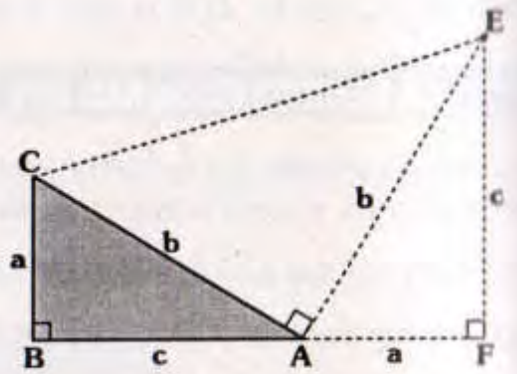
$$S=\frac{b^2}{2}=\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore\ b^2=a^2+c^2$$

En los anexos veremos una prueba física del teorema de pitágoras.

## Demostración de James A. Garfield (1876)

- Dado el $\measuredangle ABC$, se ubica F en la prolongación de $\overline{BA}$, se ubica E en el mismo semiplano de C, determinado por $\overleftrightarrow{AB}$, tal que $m\measuredangle AFE=90°$, AF=BC=a y FE=AB=c.




- $\measuredangle ABC \cong \measuredangle EFA$

$$\Rightarrow AC=AE=b \quad y$$

$$m\measuredangle EAC=90°$$

- Podemos asegurar:

$$S_{\square EFBC}=S_{\measuredangle CBA}+S_{\measuredangle CAE}+S_{\measuredangle AFE}$$

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)(a+c)=\frac{ac}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{ac}{2}$$

$$\therefore\ a^2+c^2=b^2$$

## Demostración de Leonardo da Vinci:

Del gráfico notamos que:

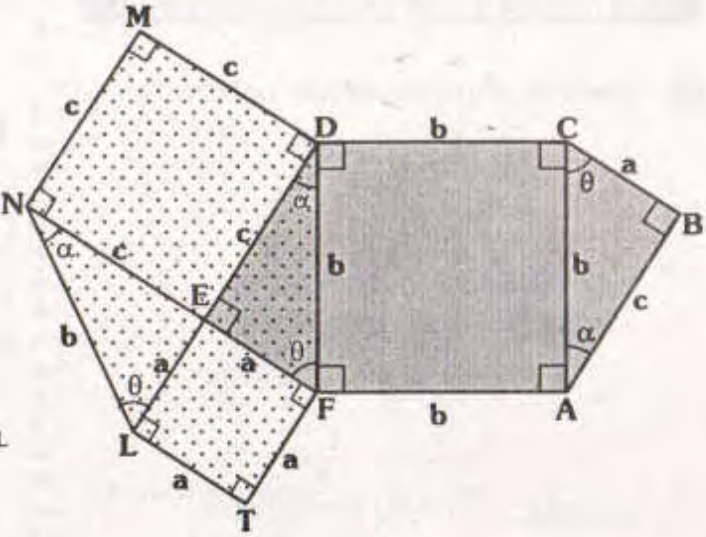
$\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle NEL$

También: ⬡ABCDEF ≅ ⬡NLTFDM

$S_{(ABCDEF)} = S_{(NLTFDM)}$

$S_{\triangle ABC} + b^2 + S_{\triangle DEF} = c^2 + S_{\triangle DEF} + a^2 + S_{\triangle NEL}$

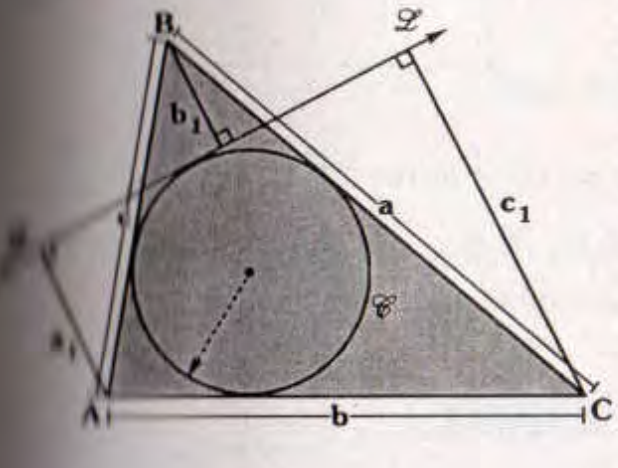
$\therefore \quad b^2 = c^2 + a^2$




## TEOREMA DE HARCOUT

**Para la circunferencia inscrita:**

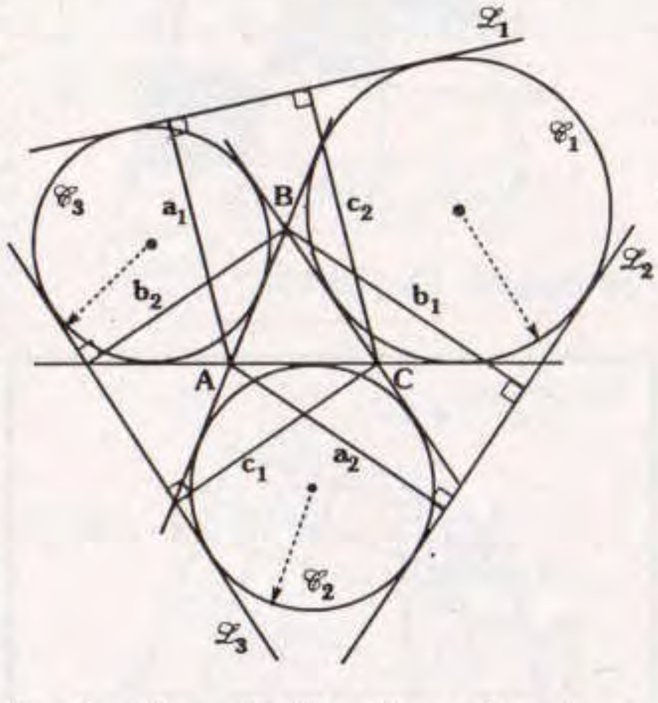
En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita, $\mathscr{L}$ es tangente a $\mathscr{C}$.




Se cumple:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{aa_1 + cc_1 - bb_1}{2}$$

**Para las circunferencias exinscritas**



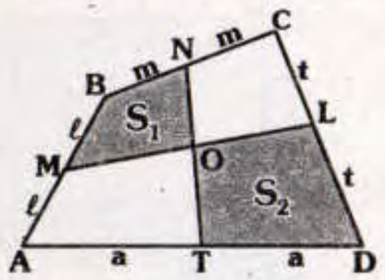

En el gráfico, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son las circunferencias exinscritas y $\vec{\mathscr{L}_1}$, $\vec{\mathscr{L}_2}$ y $\vec{\mathscr{L}_3}$ son rectas tangentes.

Se cumple: $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$

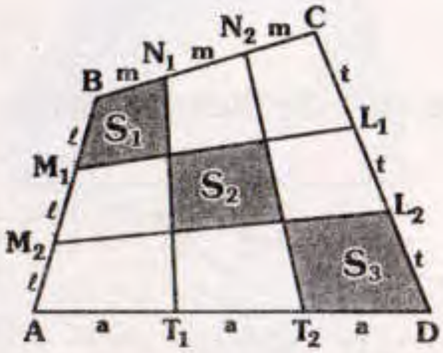
Estos teoremas fueron probadas sintéticamente por el profesor Juan Carlos Salazar, sugiero: http://www.oei.es/oim/revistaiom.

## UN RESULTADO EXTRAORDINARIO

Veamos algunos casos previos:

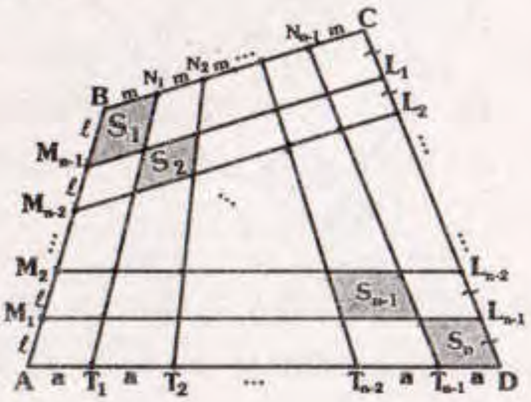



Se cumple: $S_1 + S_2 = \dfrac{S_{\square ABCD}}{2}$




Se cumple: $S_1 + S_2 + S_3 = \dfrac{S_{\square ABCD}}{3}$

En general:




Se cumple:

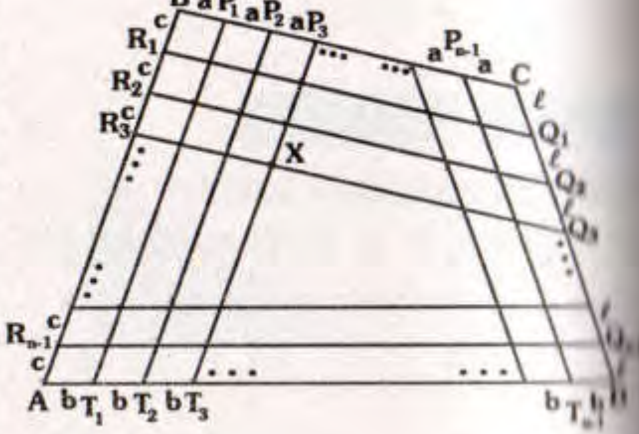
$$S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{n-1} + S_n = \frac{S_{\square ABCD}}{n}$$

**Demostración:**

- Primero hagamos algunas pruebas

**LEMA**

Sea el cuadrilátero convexo ABCD, cada lado lo dividimos en "n" partes iguales ($n \geq 2$). Se unen los puntos correspondientes (ver gráfico), para formar un tablero de $n \times n$.




Se cumple:

Los segmentos: "$\overline{P_1T_1}$, $\overline{P_2T_2}$......$\overline{P_{n-1}T_{n-1}}$ y $\overline{R_1Q_1}$, $\overline{R_2Q_2}$......$\overline{R_{n-1}Q_{n-1}}$", están también divididos en partes iguales.

**Prueba**

- Elijamos por ejemplo "X" ubicado en $\overline{R_3Q_3}$ y $\overline{P_3T_3}$, bastará probar:

$$\frac{P_3X}{XT_3} = \frac{BR_3}{R_3A} \quad \wedge \quad \frac{R_3X}{XQ_3} = \frac{BP_3}{P_3C}$$

- Lo cual es inmediato, pues:

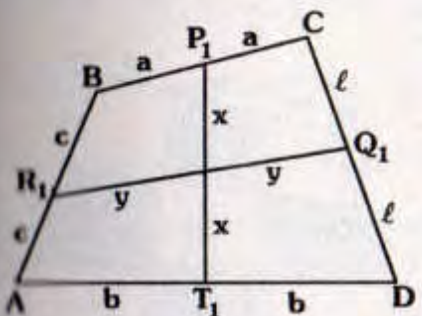
$\overline{R_3P_3} // \overline{AC} // \overline{T_3Q_3} \Rightarrow \Delta R_3XP_3 \sim \Delta Q_3XT_3$

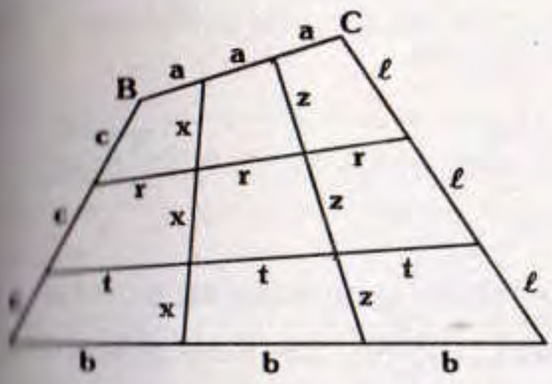
luego:

$$\frac{P_3X}{XT_3} = \frac{R_3X}{XQ_3} = \frac{R_3P_3}{T_3Q_3} = \frac{\dfrac{R_3P_3}{AC}}{\dfrac{T_3Q_3}{AC}} = \frac{\dfrac{BR_3}{AB}}{\dfrac{DT_3}{AD}}$$

$$= \frac{\dfrac{3}{n}}{\dfrac{n-3}{n}} = \frac{3}{n-3} = \frac{BR_3}{R_3A} = \frac{BP_3}{P_3C}$$

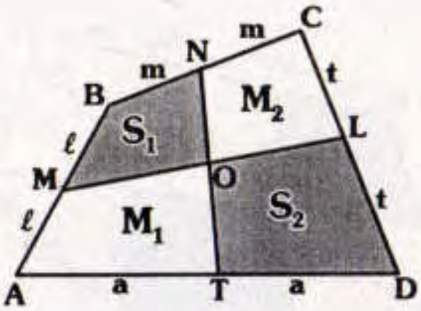
- Se pudo haber elejido cualquier punto en general, la prueba es análoga.
- Veamos algunos casos partículares:




Antes de las pruebas en general analicemos el tablero de "2×2" y "3×3" encontraremos más resultados que se pueden extender.

**<u>En el tablero "2×2"</u>**




se cumple:

$$S_1 + S_2 = M_1 + M_2 = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

La prueba es directa pues: MNLT es paralelogramo de centro O, como $\overline{MN} // \overline{AC} // \overline{TL}$

$$\Rightarrow S_{\square ABCD} = \underbrace{S_{\Delta ABC}} + \underbrace{S_{\Delta ACD}}$$

$$4S_{\Delta MBN} + 4S_{\Delta LTD}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\square ABCD}}{4} = S_{\Delta MBN} + S_{\Delta LTD}$$

Análogamente:

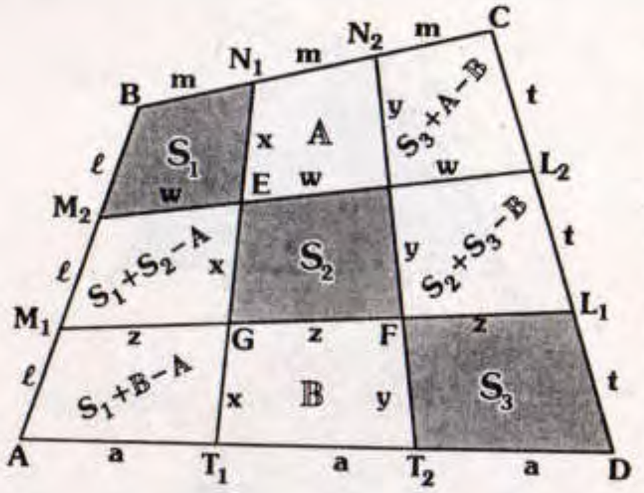
$$\frac{S_{\square ABCD}}{4} = S_{\Delta AMT} + S_{\Delta NCL}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta MBN} + S_{\Delta LTD} = S_{\Delta AMT} + S_{\Delta NCL}$$

$$\text{Como}: S_{\Delta MON} + S_{\Delta OLT} = S_{\Delta MOT} + S_{\Delta NOL}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = M_1 + M_3$$

**En el tablero "3×3"**




- Usando el lema, entonces:

  $\overline{M_1L_1}$, $\overline{M_2L_2}$, $\overline{N_1T_1}$, $\overline{N_2T_2}$ y $\overline{M_1L_1}$ son tri-secados.

- Notamos tableros de "2×2":

  $M_1BN_2F$, $GN_1CL_1$, $T_1EL_2D$ y $AM_2HT_2$

- Usemos la propiedad anterior, tenemos:

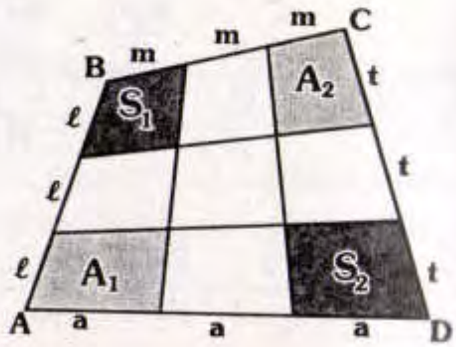
$$S_{\triangle ABCD} = 3(S_1 + S_2 + S_3)$$

$$\Rightarrow \; S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S_{\triangle ABCD}}{3} \; ....(1)$$

También: si trazamos $\overline{M_2N_1}$, $\overline{GH}$ y $\overline{T_2L_1}$, notemos: $S_1 + S_3 = 2S_2$

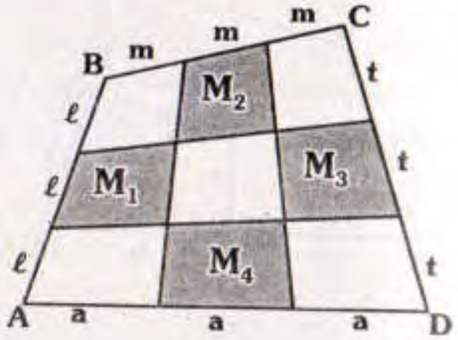
En (1): $S_2 = \dfrac{S_{\triangle ABCD}}{9}$

**Consecuencias para el tablero de "3×3"**




Se cumple:

$$\boxed{S_1 + S_2 = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 = \frac{2}{9} S_{\triangle ABCD}}$$



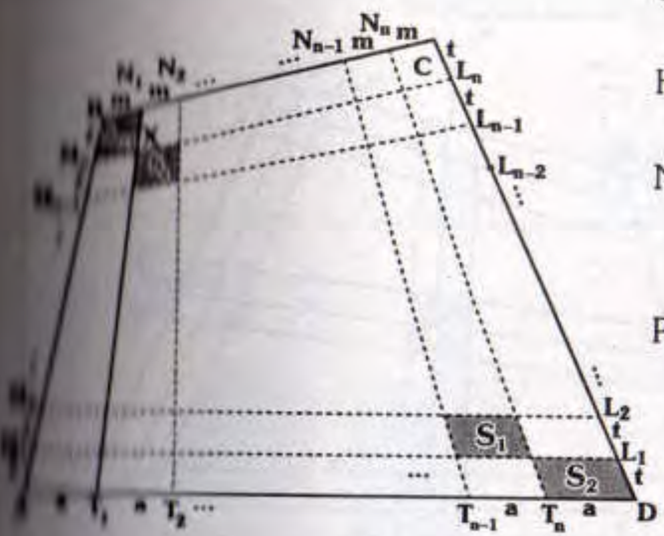

Se cumple

$$\boxed{\mathbb{M}_1 + \mathbb{M}_2 + \mathbb{M}_3 + \mathbb{M}_4 = \frac{4}{9} S_{\triangle ABCD}}$$

**Hagamos la prueba en general**

Dada la forma que tiene el resultado, la prueba se hará por inducción, hemos visto que para n=2 y n=3, ya fue probado. Supongamos que cumpla para todo "n", demostremos ahora para "n+1"

Sea el tablero de $(n+1)\times(n+1)$




Sea: $\quad S_{M_nBN_1X} = S_{n+1}$

Hipotesis inductiva: $\sum_{i=1}^{n} Si = \frac{1}{n} S_{T_1XL_nD}$

Notemos: $\quad AM_n = \ell n$

$N_1C = mn$

Por lema: $\frac{N_1X}{XT_1} = \frac{M_nX}{XL_n} = \frac{1}{n}$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} Si + S_{n+1}}_{\sum_{i=1}^{n+1} Si} = \frac{1}{n} S_{T_1XL_nD} + S_{\Delta BXM_n} + S_{\Delta BXC}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} Si = \frac{1}{n}(S_{\Delta T_1XD} + S_{\Delta L_nXD}) + \frac{1}{n+1} S_{\Delta BXA} + \frac{1}{n+1} S_{\Delta BXC} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1} S_{\Delta AXD} + \frac{n}{n+1} S_{\Delta CXD}\right) + \frac{1}{n+1} S_{\Delta BXA} + \frac{1}{n+1} S_{\Delta BXC}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} Si = \frac{1}{n+1}(S_{\Delta AXD} + S_{\Delta CXD} + S_{\Delta BXA} + S_{\Delta BXC}) = \frac{1}{n+1} S_{ABCD}$$

**Con lo cual queda probado el teorema**

- Ahora veamos algunos resultados para todo tablero de "n×n" cuyas pruebas se dejan como desafíos para el lector.

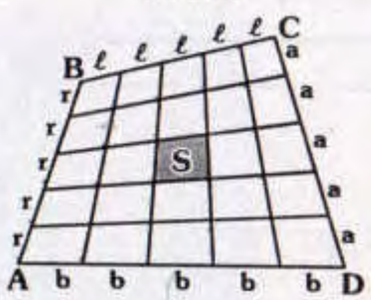
**Para n: impar**

La región sombreada está ubicada en la **mitad de la diagonal.**

**Tablero de 3×3**

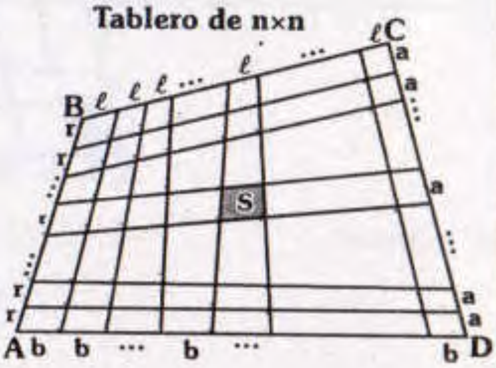
$$S = \frac{S_{\square ABCD}}{9}$$

**Tablero de 5×5**



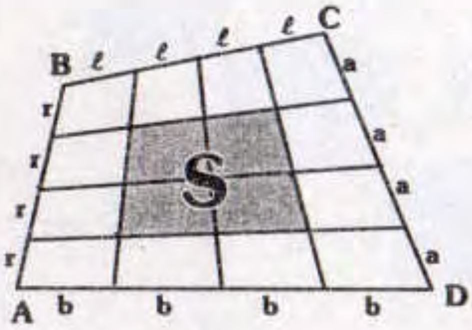

$$S = \frac{S_{\square ABCD}}{25}$$

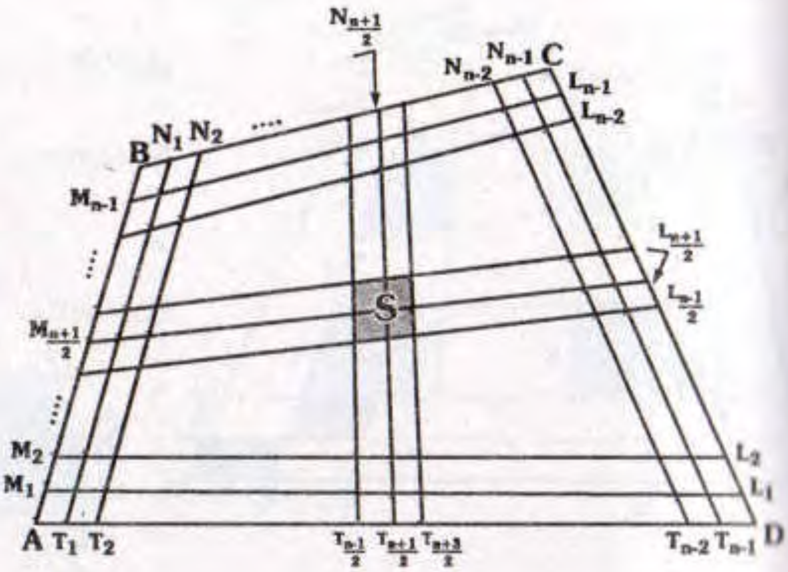
**Tablero de n×n**




$$S = \frac{S_{\square ABCD}}{n^2}$$

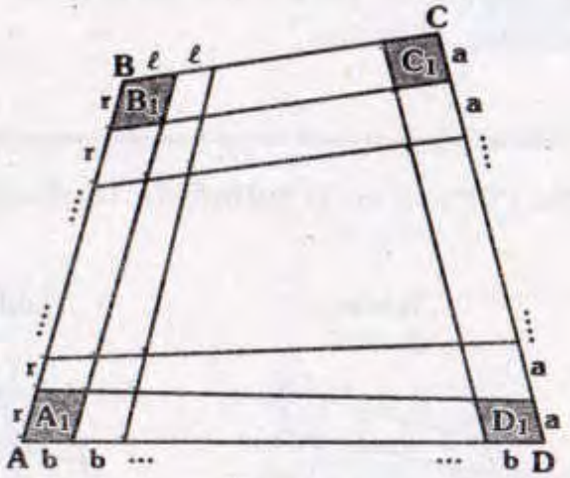
## Para n: par




Se cumple: $S = \frac{4}{n^2}$

## Para todo "n"



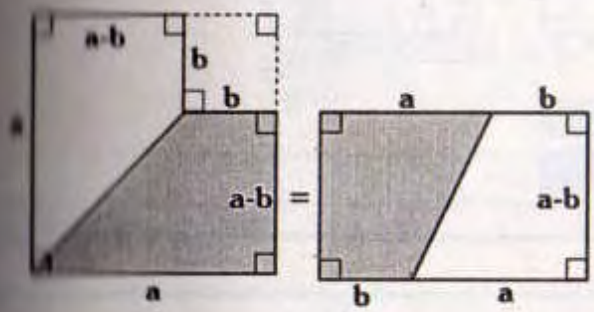

Se cumple:

$$A_1 + C_1 = B_1 + D_1$$

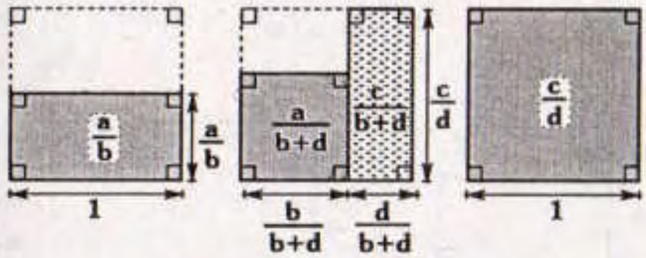
Algo realmente maravilloso es que si sombreamos "n" cualesquiera de los "$n^2$" escaques, con la condición de que no pertenezcan a la misma fila o columna, entonces la suma de estas áreas es "1/n" del total

## PRUEBAS VISUALES

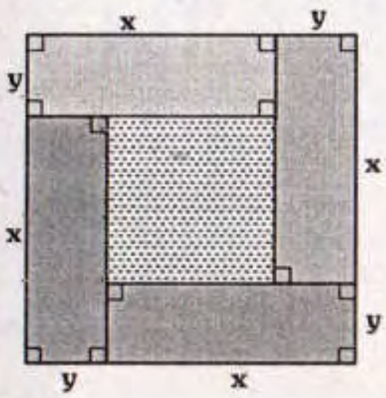
*"Los teoremas han de ser notables, sorprendentes, elegantes, intrigantes, rigurosos, creativos.... y sobre todo, comprensibles"* **H. Zeeman**




$$\Rightarrow \quad \boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$




Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; con a, b, c, d >0 $\quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} < \frac{c}{d}$

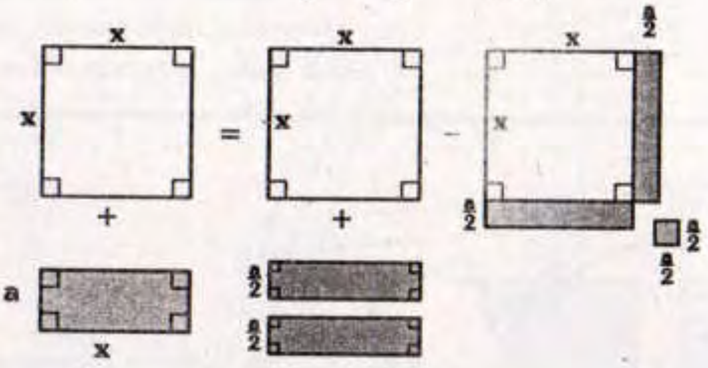



Sea $x \geq y$

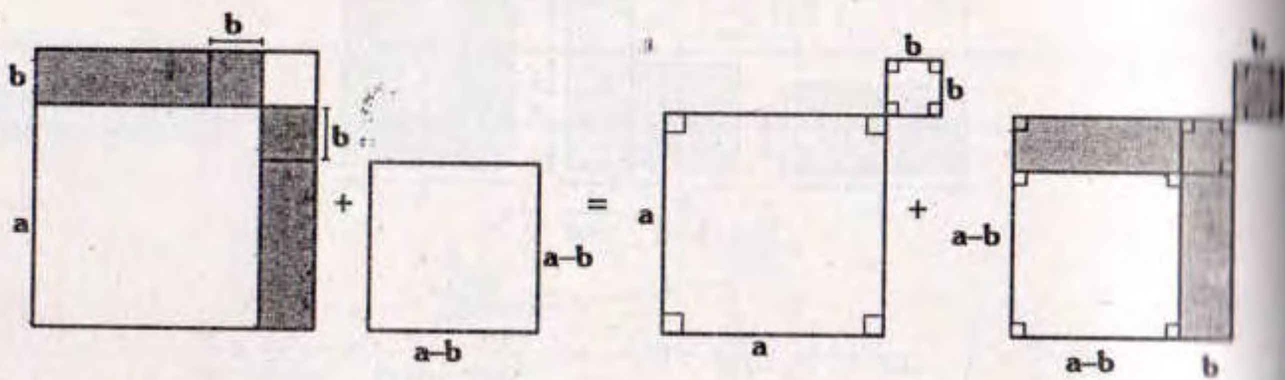
$(x+y)^2 \geq 4xy$

$$\boxed{\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}}$$

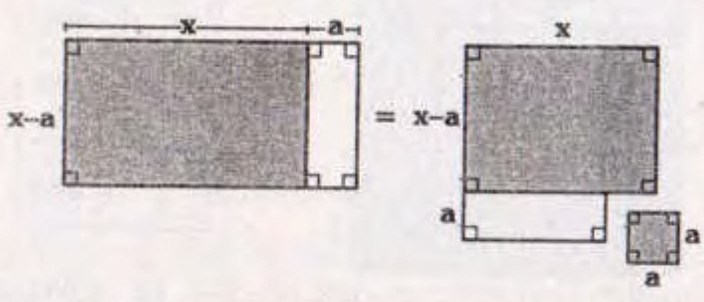
$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



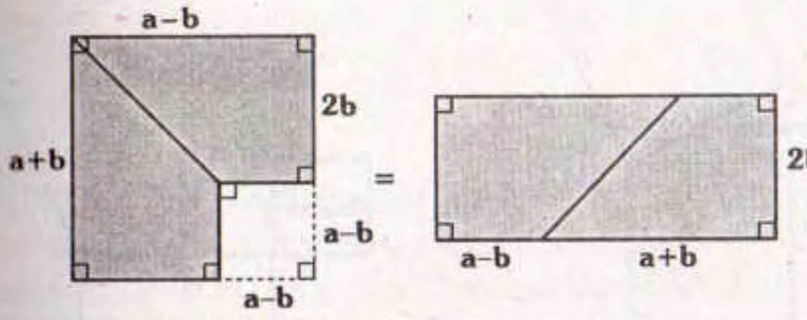

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

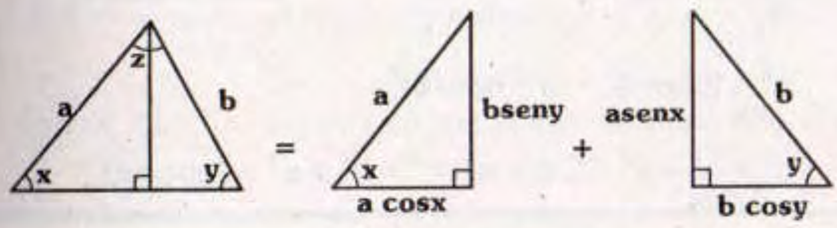



$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$



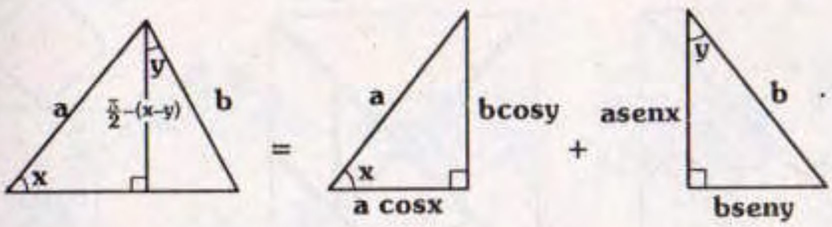
$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$$



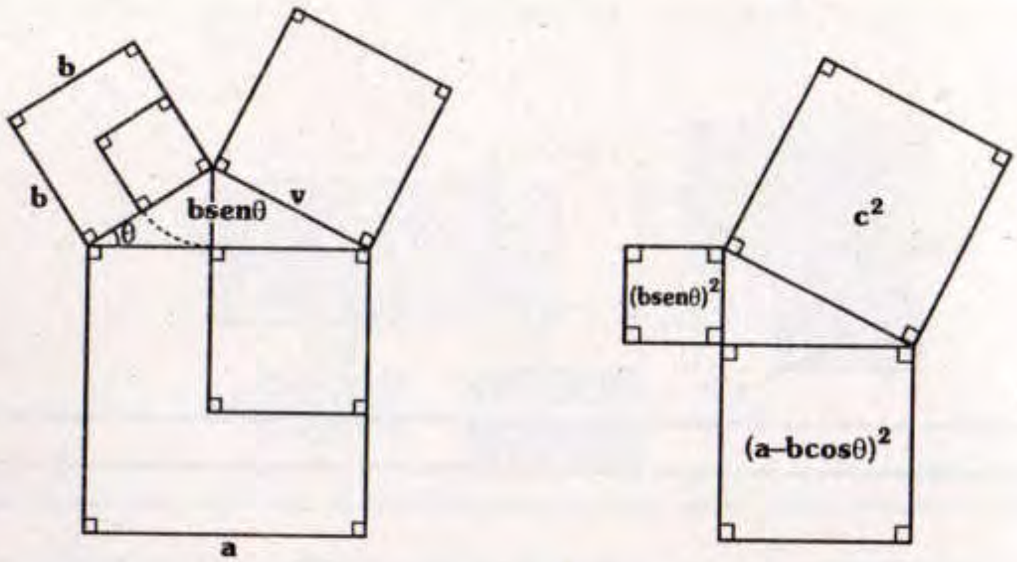




$$\frac{ab}{2}\operatorname{sen}z=\frac{ab}{2}\operatorname{sen}y\cos x+\frac{ab}{2}\operatorname{sen}x\cos y$$

$$\operatorname{sen}z=\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}y\cos x+\operatorname{sen}x\cos y$$




$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-(x-y)\right)=\cos(x-y)=\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$$

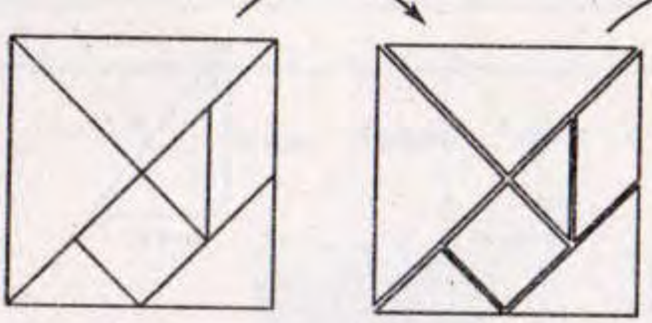


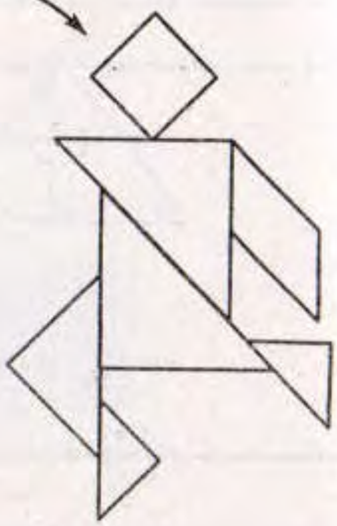

$$c^2 = (b\text{sen}\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta$$

## SOBRE EL TANGRAM (siete tableros de astusia)

Es un juego chino antiguo, consiste en formar siluetas con las sietes piezas dadas sin sobreponerse. Es un juego que potencia la percepción visual, estimula la planificación de estrategias y desarrolla la orientación espacial.





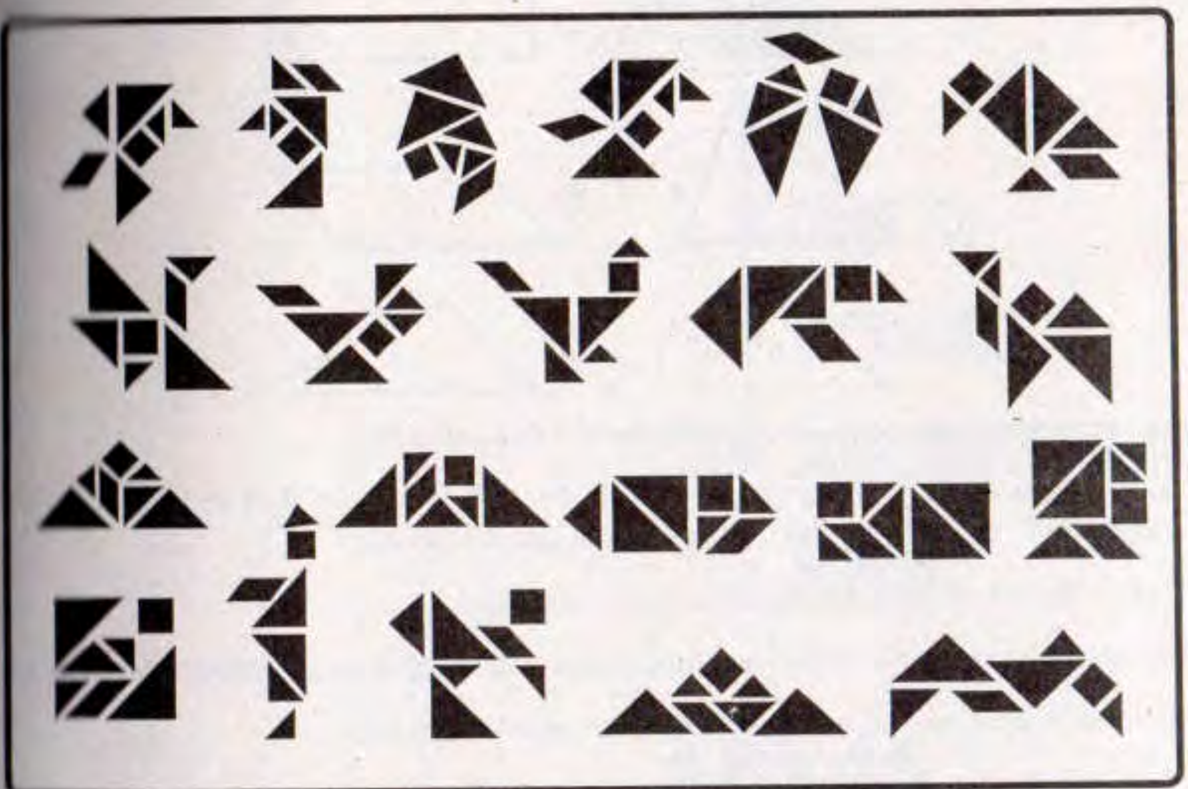
***Notar que con las siete piezas se formó la figura de la derecha, es decir la figura es equivalente al "cuadrado inicial".***

Es quizás uno de los juegos más antiguos del mundo. Hoy en día el Tangram no sólo se usa como entretenimiento también se utiliza en psicología, en filosofía y particularmente en pedagogía. En matemáticas el Tangram se emplea para introducir conceptos geométricos de equivalencias de áreas y para promover el desarrollo de capacidades psicomotrices e intelectuales de los niños, pues permite ligar de manera lúdica la manipulación concreta de materiales con la formación de ideas abstractas.

En el siglo XV era llamado "rompecabezas chino" se volvió tan popular que jugaban niños y adultos, personas comunes y personalidades del mundo de las ciencias y artes. Napoleón Bonaparte se convirtió en un especialista en Tangram desde su exilio en la isla de Santa Helena.

En cuanto a la cantidad de figuras que se pueden realizar, en 1973 los diseñadores holandeses Joost Elffers y Michael Schuyt produjeron 7500 nuevas figuras.

A continuación veamos algunas figuras equivalentes al cuadrado inicial:



# EQUIDESCOMPOSICIÓN DE POLÍGONOS

En este breve espacio analizaremos sobre la equidescomponibilidad de polígonos, el problema se origina de la pregunta siguiente: si dos regiones poligonales tiene áreas iguales, ¿es factible dividir uno de ellos en un número finito de partes las cuales puedan rearreglarse para formar el otro?

Observemos las siguientes figuras:

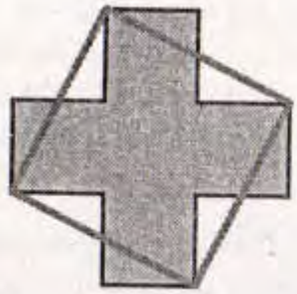


Fig. 1

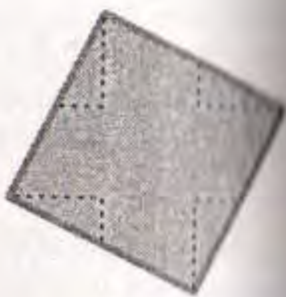
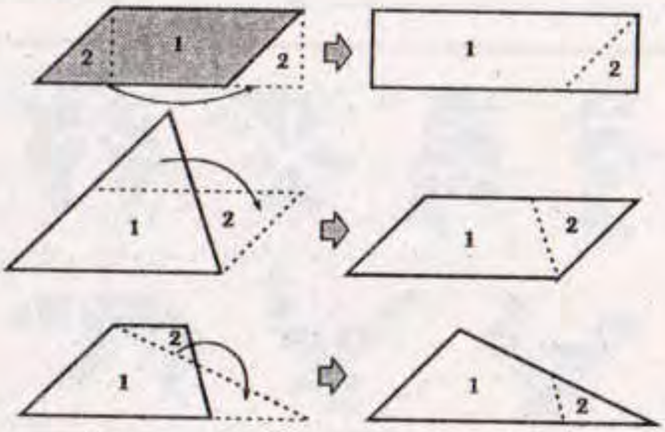


Fig. 2

La figura 1 representa una cruz tiene igual área que la figura2 que es un cuadrado, notemos que ambas figuras tiene igual área. Este hecho se expresa así: las figuras representadas son equidescomponibles. Dos figuras son equidescomponibles, si es factible descomponer una de ellas en un número finito de partes, las cuales puedan rearreglarse para formar la segunda figura. Es evidente que dos figuras equidescomponibles tienen áreas iguales.

Veamos estos casos, también sencillos:




A continuación daremos una serie de proposiciones sin demostración:

- Si una figura A es equidescomponible con una figura B , y la figura B es equidescomponible con una figura C, entonces las figuras A y C son equidescomponibles.
- Todo triángulo es equidescomponible con un rectángulo;
- Dos paralelogramos que tienen una base común y la misma área son equidescomponibles.
- Dos rectángulos que tienen áreas iguales son equidescomponibles.
- Todo polígono es equidescomponible con algún rectángulo.
- ( Teorema de Bolyai ) Dos polígonos que tienen áreas iguales son equidescomponibles.

# ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

## ÁREAS DE REGIONES PLANAS

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

**PROBLEMA Nº 1**

En el gráfico, CD = 10 y BR = 6. Calcule el área de la región sombreada.

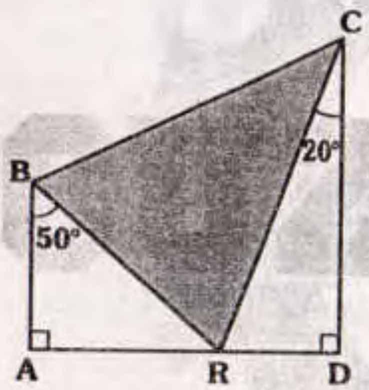
A) 60

B) 30

C) 15

D) 20

E) 25




**PROBLEMA Nº 2**

En el gráfico, DB = 10 y CE = 8, calcule el área de la región sombreada.

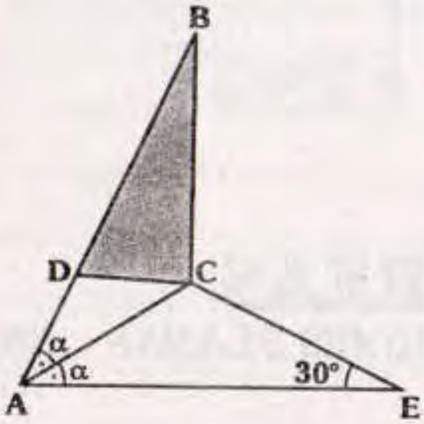
A) 30

B) 15

C) 25

D) 20

E) 10




**PROBLEMA Nº 3**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, si $m\widehat{CP} = 37°$, calcule el área de la región sombreada.

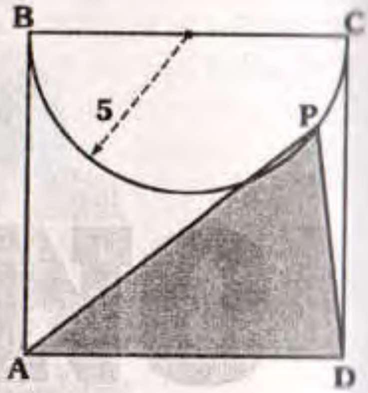
A) 30

B) 35

C) 40

D) 25

E) 20




**PROBLEMA Nº 4**

Se tiene el cuadrado ABCD, cuyo lado mide 10, se traza la circunferencia $\mathscr{C}$ cuyo radio es 1, la cual es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Si: $P \in \mathscr{C}$, calcule el área mínima de la región triangular PAD.

A) 20 B) 30 C) 40

D) 28 E) 25

**PROBLEMA Nº 5**

Se tiene la región triangular ABC de área $8m^2$, se ubica D en la prolongación de $\overline{AC}$ tal que AC = CD, M es punto medio de $\overline{BC}$. Calcule el área de la región trian-

...gulo MCD.

A) 8m² B) $4m^2$ C) $6m^2$

D) 9m² E) $5m^2$

**PROBLEMA Nº 6**

Se tiene el triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10. Calcule el área de la región triangular cuyos vértices son el ortocentro, baricentro y circuncentro del triángulo inicial.

A) 2 B) 1 C) 0,5

D) 4 E) 2,5

**PROBLEMA Nº 7**

En el gráfico, T y P son puntos de tangencia. (AC)(AD) = 20 y $m\widehat{TP}=53°$. Calcule el área de la región sombreada.

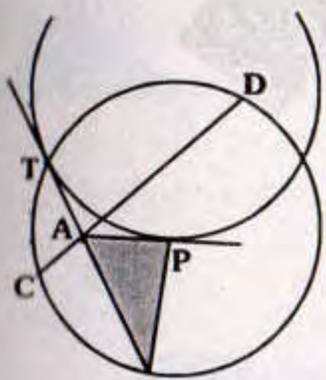
A) 8

B) 10

C) 12

D) 15

E) 18




**PROBLEMA Nº 8**

En el gráfico, T es punto de tangencia, si $m\widehat{TQ}=120°$ y AT = 4. Calcule el área de la región sombreada.

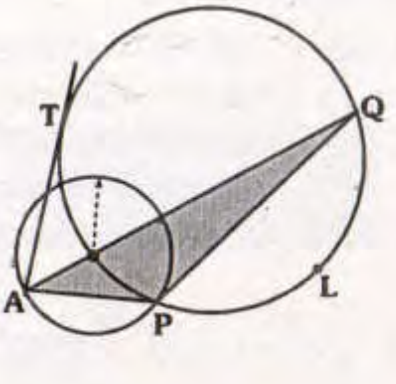
A) $2\sqrt{3}$

B) 4

C) 8

D) $4\sqrt{3}$

E) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$




**PROBLEMA Nº 9**

Los lados de un triángulo miden 4 y 6. Calcule el área máxima de dicha región triangular.

A) 12 B) $12\sqrt{2}$ C) 15

D) $6\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 10**

Se tiene el triángulo ABC, ubicamos M en $\overline{AC}$ y N en $\overline{BC}$ tal que $\overline{AB}//\overline{MN}$ en el triángulo MNC se traza la altura CH, si AB = NC y (HC)(BC) = 10. Calcule el área de la región ABC.

A) 5 B) 10 C) 15 D) 7,5 E) 12,5

**PROBLEMA Nº 11**

En el triángulo rectángulo ABC, recto en "B", se sabe que AC = $8\sqrt{2}$ y $m\measuredangle A=67,5°$. Calcule el área de la región ABC.

A) 16 B) $16\sqrt{2}$ C) 32 D) $32\sqrt{2}$ E) 24

**PROBLEMA Nº 12**

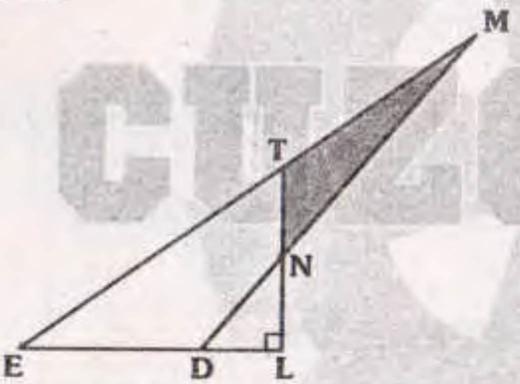
Calcule el área de la región correspondiente a un hexágono equiángulo ABCDEF, si AB = 3, CD = 6, DE = 2 y EF = 4.

A) $20\sqrt{3}$  B) $18\sqrt{3}$  C) $\frac{85}{4}\sqrt{3}$

D) $\frac{93}{4}\sqrt{3}$  E) $\frac{83}{4}\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 13**

En el gráfico, TN = NL = 4, 5(ED) = 7(DL) = 35. Calcule el área de la región sombreada.




A) 30

B) 40

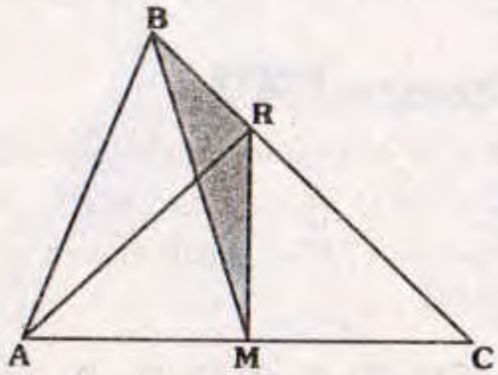
C) 50

D) 60

E) 70

**PROBLEMA Nº 14**

Calcule el área de la región triangular BRM, si área de la región ABR es 10 y AM = MC.




A) 10

B) 5

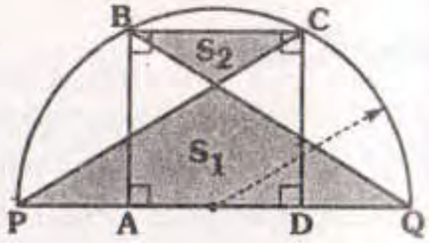
C) 15

D) 20

E) 25

**PROBLEMA Nº 15**

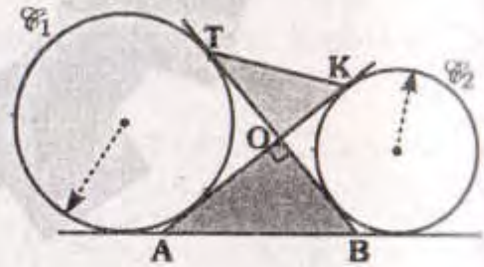
En la figura, ABCD es un cuadrado y $S_2=2$. Calcule $S_1$.




A) 4  B) 6  C) 8  D) 9  E) 10

**PROBLEMA Nº 16**

Calcule el área de la región triangular TOK, si el área de la región triangular AOB es 6 ($\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias exinscritas para el triángulo ABC).




A) 4,5  B) 5,5  C) 6

D) 3  E) 1,5

**PROBLEMA Nº 17**

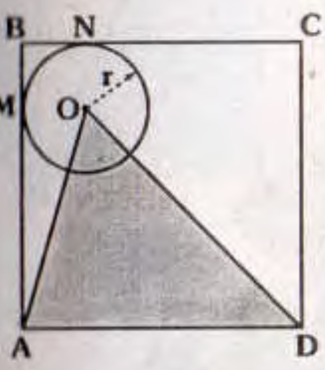
Se tiene el triángulo equilátero ABC en donde "M" es punto medio de $\overline{AB}$. Calcule el área de la región CGK, si "K" es ortocentro del triángulo ABC, "G" es baricentro del triángulo BCM y BC = 6.

A) 2  B) $\sqrt{3}$  C) $2\sqrt{6}$

D) [illegible]$\sqrt{3}/3$ E) $\sqrt{6}$

**PROBLEMA Nº 18**

Si el lado del cuadrado ABCD mide a. Calcule el área de la región triangular AOD. (M y N son puntos de tangencia)




A) ar/2 B) a(a - r)/2

C) r(a - r)/2 D) ar

E) a(a + r)/2

**PROBLEMA Nº 19**

En un triángulo rectángulo ABC, recto en "B", se ubica en $\overline{BC}$ el punto "M" tal que AB = MC, luego se traza la altura $\overline{BH}$. Si AH = 4, calcule el área de la región triangular AMH.

A) [illegible] B) $4\sqrt{3}$ C) 16

D) 8 E) $6\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 20**

En un triángulo escaleno se cumple que su área es numéricamente igual al triple de su perímetro. Calcule la medida del radio de la circunferencia inscrita en este triángulo.

A) 2 B) 3 C) 6 D) 4 E) 1,5

## ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

**PROBLEMA Nº 21**

En el gráfico, R = 8u, r = 6u, $m\widehat{BN} = 27°$ y $m\widehat{AO} = 18°$. Calcule el área de la región sombreada.

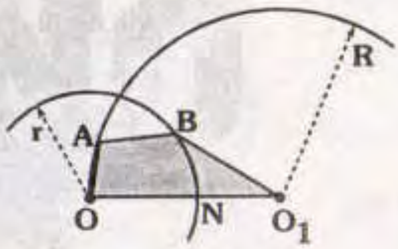
A) $12\sqrt{2}u^2$

B) $13\sqrt{2}u^2$

C) $14\sqrt{3}u^2$

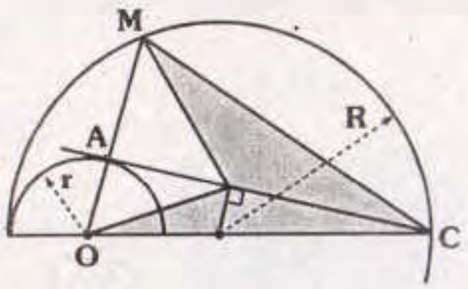
D) $16\sqrt{3}u^2$

E) $10\sqrt{3}u^2$




**PROBLEMA Nº 22**

En el gráfico, A es punto de tangencia. Si (OM)(AC)=24, R=5 y r=2, calcule el área de la región sombreada.




A) 24 B) 12 C) 15 D) 15/2 E) 20

**PROBLEMA Nº 23**

Se tiene el hexágono convexo ABCDEF que cumple que los lados opuestos son de igual longitud y paralelos. Calcule $\frac{S_{\Delta ACE}}{S_{ABCDEF}}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

**PROBLEMA Nº 24**

En la figura, ab=40, calcule el área de la región sombreada (B es punto de tangencia).

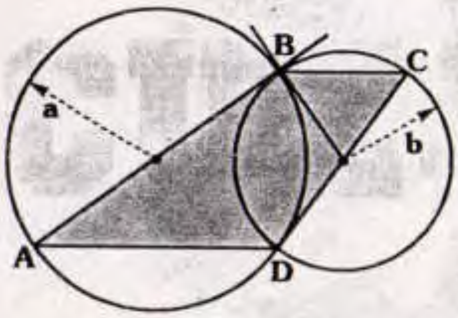
A) 40

B) 60

C) 80

D) 100

E) 90




**PROBLEMA Nº 25**

En el gráfico, D, G, H y F son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{AE}$, $\overline{EC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$ son las áreas de la regiones sombreadas. Calcule $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}}+\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{T}}$.

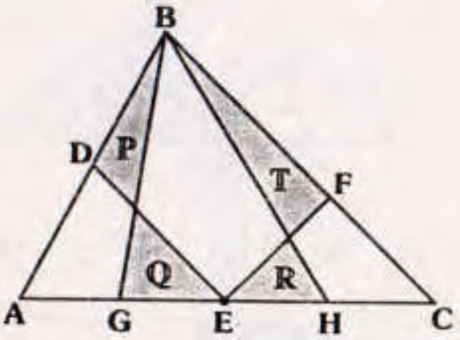
A) 1

B) 2

C) 3/2

D) 4/3

E) 3




**PROBLEMA Nº 26**

En el gráfico ABCD y PQRD son cuadrados, si PC=6, calcule la diferencia de áreas de las regiones sombreadas.

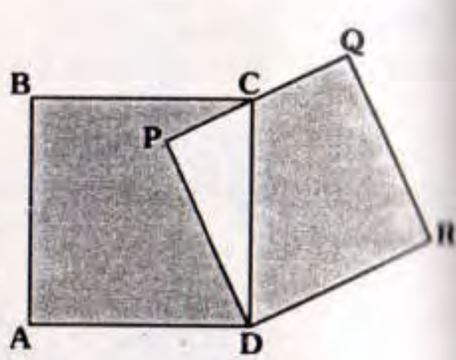
A) 6

B) 12

C) 18

D) 36

E) $12\sqrt{2}$



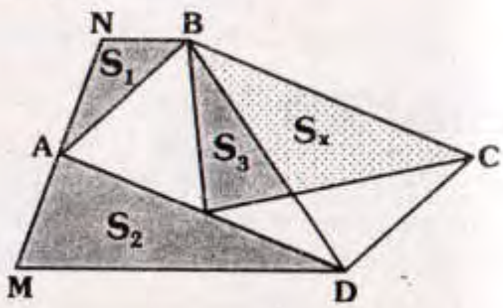

**PROBLEMA Nº 27**

Se tienen los paralelogramos ABCD y PQRD, tal que $P \in \overline{AB}$ y $C \in \overline{QR}$. Calcule $\frac{S_{\square ABCD}}{S_{\square PQRD}}$.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

**PROBLEMA Nº 28**

Según el gráfico, $S_1$ ; $S_2$ ; $S_3$ y $S_x$ son áreas de las regiones sombreadas. Si ABCD es un paralelogramo, $\overline{MD} // \overline{NB}$ y MA = AN, se cumple:



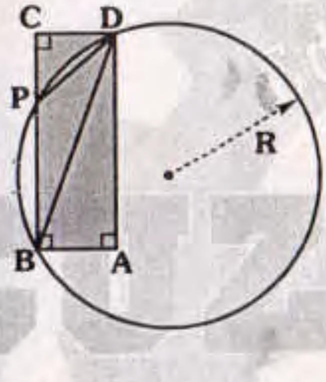
A) $S_x = S_1 - S_2 + S_3$ B) $S_x = S_1 + S_2 + S_3$

C) $S_x = S_1 + S_2 - S_3$ D) $S_x = \dfrac{S_1S_2}{S_3}$

E) $S_x = S_2 + S_3 - S_1$

**PROBLEMA Nº 29**

Si BD = 6; PD = 4 y BC = $\dfrac{3R}{2}$; calcule el área de la región sombreada.




A) 18

B) 12

C) 15

D) 16

E) 14

**PROBLEMA Nº 30**

Se tiene una región hexagonal regular ABCDEF cuya área es $6\sqrt{3}$ ; calcule el área de la región cuadrangular cuyos vértices son los puntos medios de $\overline{AB}$ , $\overline{CD}$ , $\overline{DE}$ y $\overline{AF}$ .

A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$

D) $5\sqrt{6}$ E) $\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

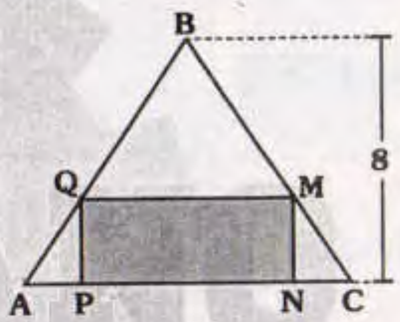
**PROBLEMA Nº 31**

En un trapecio ABCD sus diagonales se cortan en O; en $\overline{CD}$ y en la base $\overline{AD}$ se ubican los puntos M y N tal que $\overline{MN} // \overline{AC}$ ; $\overline{MN}$ corta a $\overline{BD}$ en E; MD = 2(CM) y las áreas de las regiones triangulares BOC y END son iguales a 4, calcule el área de la región trapecial ABCD.

A) 10 B) 30 C) 36 D) 54 E) 25

**PROBLEMA Nº 32**

Si el área de la región rectangular sombreada es 32 y AC = 16; calcule QM.




A) 5 B) 9 C) 6 D) 8 E) 12

**PROBLEMA Nº 33**

Según el gráfico, calcule el área de la región sombreada siendo "I" el incentro del triángulo ABC y AI + IC = 12.

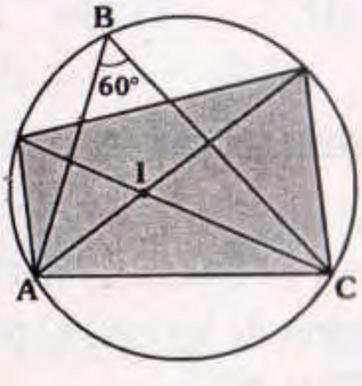
A) 36

B) $48\sqrt{2}$

C) $12\sqrt{3}$

D) $20\sqrt{3}$

E) $36\sqrt{3}$



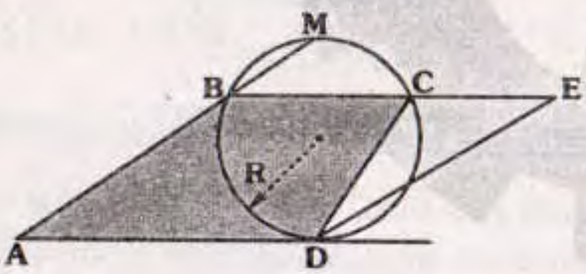
**PROBLEMA Nº 34**

En el trapecio ABCD ( $\overline{BC}//\overline{AD}$ ), se traza la diagonal AC; en $\overline{AB}$ se ubica M tal que $\overline{DM}\cap\overline{AC}=\{N\}$. Si las áreas de las regiones AMN y CND es $2cm^2$ y $10cm^2$ respectivamente. Calcule el área de la región BDM.

A) 8 $cm^2$  B) 10 $cm^2$  C) 6 $cm^2$
D) 4 $cm^2$  E) 12 $cm^2$

**PROBLEMA Nº 35**

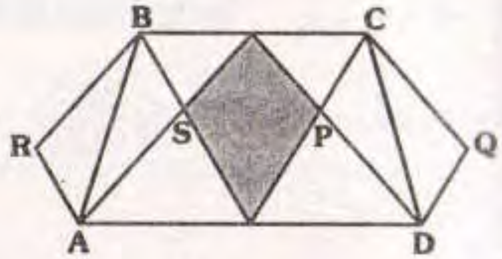
En el gráfico, D es punto de tangencia y ABED es paralelogramo.
Si $m\widehat{BM}=m\widehat{MC}=53°$ y R = 5, calcule el área de la región sombreada.




A) 92  B) 82  C) 102
D) 112  E) 144

**PROBLEMA Nº 36**

Según el gráfico, $\overline{BC}//\overline{AD}$ y el área de la región sombreada es 6. Calcule la suma de áreas de la regiones paralelográmicas ARBS y PCQD.




A) 18  B) 10  C)12  D) 6  E) 9

**PROBLEMA Nº 37**

En la figura, ABC es equilátero, AM = MC = 3 y PQ = 4. Calcule el área de la región sombreada.

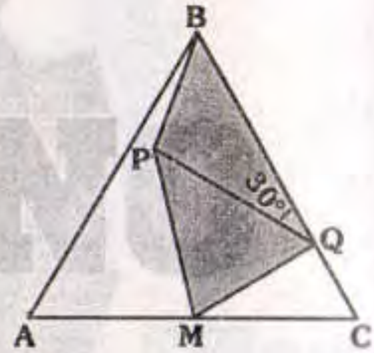
A) 6

B) 9

C) $3\sqrt{3}$

D) 4

E) $2\sqrt{3}$




**PROBLEMA Nº 38**

Si G es baricentro de la región triangular ABC. Si AB=7; BC=9 y AC=4, calcule el área de la región paralelográmica sombreada.

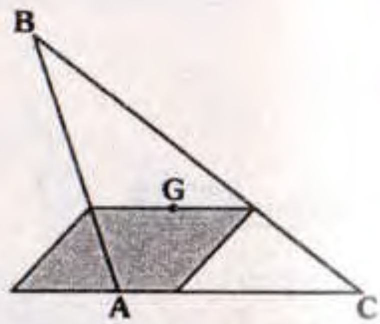
A) $6\sqrt{2}$

B) $6\sqrt{5}$

C) $4\sqrt{3}$

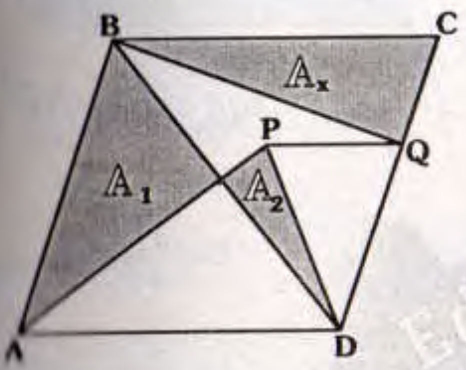
D) $5\sqrt{5}$

E) $\frac{8}{3}\sqrt{5}$



**PROBLEMA Nº 39**

En el gráfico, ABCD es un romboide y $\overline{PQ}//\overline{BC}$. Calcule el área $\mathbb{A}_x$ en función de las áreas $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$.



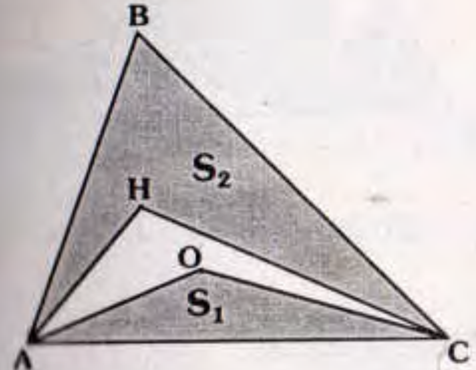

A) $\frac{\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2}{2}$  B) $2(\mathbb{A}_1-2\mathbb{A}_2)$

C) $\mathbb{A}_1-\mathbb{A}_2$  D) $3(\mathbb{A}_1-2\mathbb{A}_2)$

E) $\mathbb{A}_1-2\mathbb{A}_2$

**PROBLEMA Nº 40**

En el gráfico, H y O son ortocentro y circuncentro del triángulo ABC. Calcule $\frac{S_2}{S_1}$.



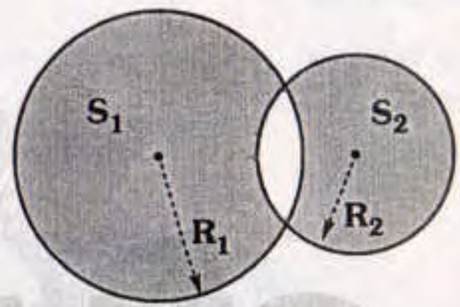

A) 2  B) 1  C) 3

D) 3/2  E) 2/3

## ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

**PROBLEMA Nº 41**

En el gráfico, $S_1$ y $S_2$ son las áreas de las regiones sombreadas. Si $R_1=9$ y $R_2=4$, calcule $S_1-S_2$.




A) $36\pi$  B) $65\pi$  C) $49\pi$

D) $25\pi$  E) $72\pi$

**PROBLEMA Nº 42**

Se tiene el triángulo ABC, con AB=10, BC=12 y AC=14 está inscrito en la circunferencia de centro O. Halle el área de la corona circular limitada por las circunferencias concéntricas de centro O y tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

A) $24\pi$  B) $12\pi$  C) $11\pi$

D) $25\pi$  E) $16\pi$

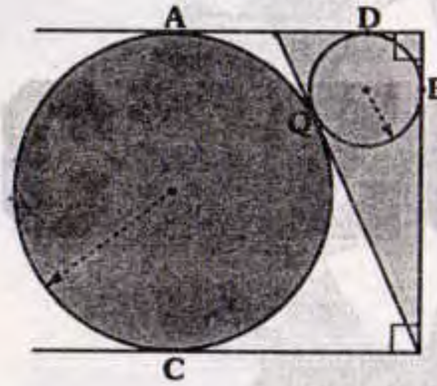
**PROBLEMA Nº 43**

Si $m\widehat{AB}=60°$, calcule la razón de áreas de las regiones sombreadas.

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

**PROBLEMA Nº 44**

Calcule la razón de áreas de las regiones sombreadas. (A, Q, C, D y E son puntos de tangencia)




A) $\pi$

B) $\frac{3}{2}\pi$

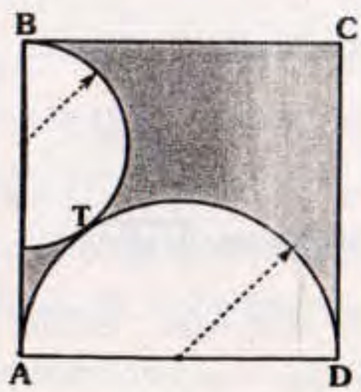
C) $2\pi$

D) $\sqrt{2}\pi$

E) $\frac{5}{4}\pi$

**PROBLEMA Nº 45**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado. T es punto de tangencia. Si AB = 6, calcule el área de la región sombreada.




A) $36-10\pi$

B) $15-2\pi$

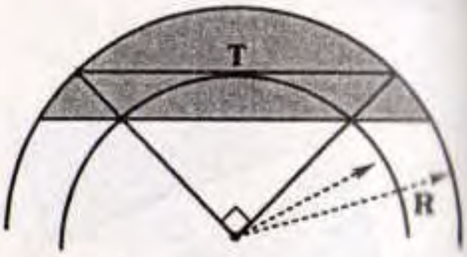
C) $9-\pi$

D) $36-4\pi$

E) $36-\frac{13}{2}\pi$

**PROBLEMA Nº 46**

T es punto de tangencia y $R=2\sqrt{2}$, cal-
cule el área de la región sombreada.



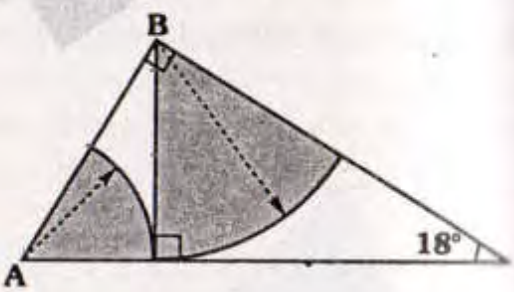

A) $\frac{4}{3}(\pi-\sqrt{3})$ B) $\frac{4}{3}(\pi-\sqrt{2})$

C) $\frac{2}{3}(\pi-\sqrt{3})$ D) $\frac{2}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$

E) $\frac{4}{3}(4\pi-3)$

**PROBLEMA Nº 47**

En el gráfico, halle la suma de áreas de las regiones sombreadas, si $AB=\sqrt{5}$.

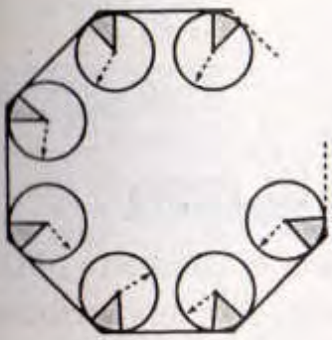



A) $\pi$ B) $2\pi$ C) $3\pi$ D) $4\pi$ E) $\pi/2$

**PROBLEMA Nº 48**

En el gráfico, las circunferencias son congruentes de radio 2 y son tangentes a los lados del polígono convexo mostrado. Ha-

[illegible] la suma de las áreas de las regiones sombreadas.



A) [illegible]

B) π

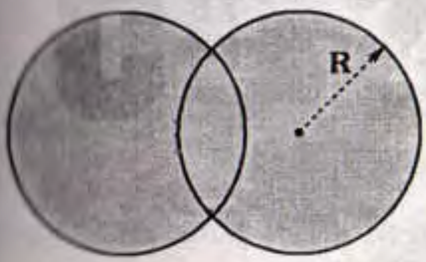
C) 4π

D) [illegible]

E) [illegible]

**PROBLEMA Nº 49**

En el gráfico, las circunferencias son ortogonales y congruentes, halle el área de la región sombreada.

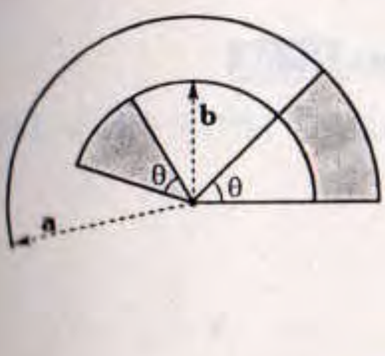



A) $2\pi R^2$ B) $4\pi R^2$ C) $\frac{3}{2}\pi R^2$

D) $\frac{3}{4}\pi R^2+R^2$ E) $\frac{3}{2}\pi R^2+R^2$

**PROBLEMA Nº 50**

En el gráfico las regiones sombreadas son equivalentes. Halle a/b.

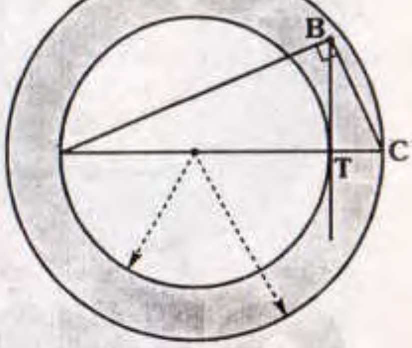



A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 51**

En el gráfico, BC = 6u. Siendo T punto de tangencia, calcule el área de la región sombreada.

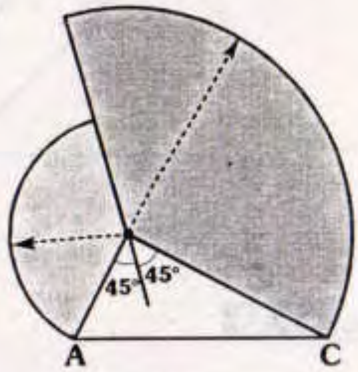



A) $16\pi u^2$ B) $18\pi u^2$ C) $6\sqrt{2}\pi u^2$

D) $36\pi u^2$ E) $24\pi u^2$

**PROBLEMA Nº 52**

En el gráfico, AC=a, calcule el área de la región sombreada.




A) $\pi a^2$ B) $\frac{3}{4}\pi a^2$ C) $\frac{1}{2}\pi a^2$

D) $\frac{3}{8}\pi a^2$ E) $\frac{2}{3}\pi a^2$

**PROBLEMA Nº 53**

En el gráfico, C es punto de tangencia y AB = BC. Calcule $S_x$ en función de S.

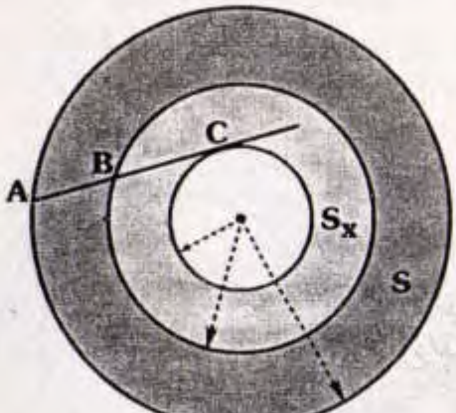
A) $\frac{S}{3}$

B) 2S

C) $\frac{S}{2}$

D) $\frac{S}{4}$

E) $\frac{3}{2}S$




**PROBLEMA Nº 54**

En el gráfico, calcule $S_x$ en función de r.

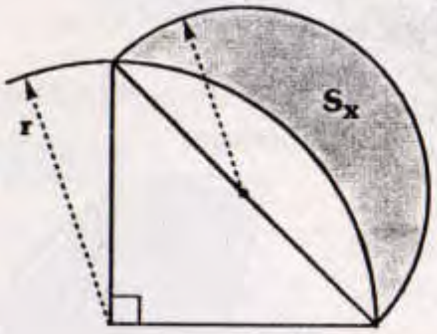
A) $\frac{\pi r^2}{2}$

B) $r^2$

C) $2r^2$

D) $2\pi r^2$

E) $\frac{r^2}{2}$




**PROBLEMA Nº 55**

Se tiene el cuadrado ABCD se ubica M y N en $\overline{AC}$ tal que la circunferencia que contiene a M y N es tangente a $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$. Si AM = MN = NC = $\sqrt{2}$, calcule el área del círculo limitado por la circunferencia.

A) $\pi$ B) $2\pi$ C) $4\pi$

D) $8\pi$ E) $6\pi$

**PROBLEMA Nº 56**

Se tiene el cuadrado JFDC, M es punto medio de $\overline{FD}$, una circunferencia pasa por M y es tangente a $\overline{JC}$ en J, el segmento tangente a la circunferencia trazado por D a la circunferencia mide $4\sqrt{3}$. Calcule el área del círculo limitado por la circunferencia.

A) $16\pi$ B) $9\pi$ C) $25\pi$

D) $49\pi$ E) $20\pi$

**PROBLEMA Nº 57**

En el gráfico, T es punto de tangencia calcule $S_1/S_2$.

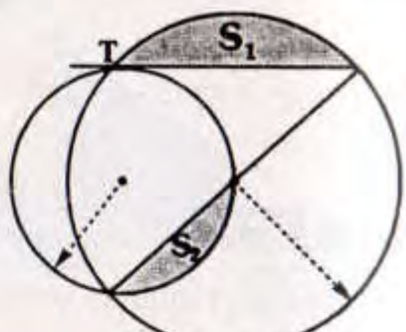
A) 1

B) $\sqrt{2}$

C) 2

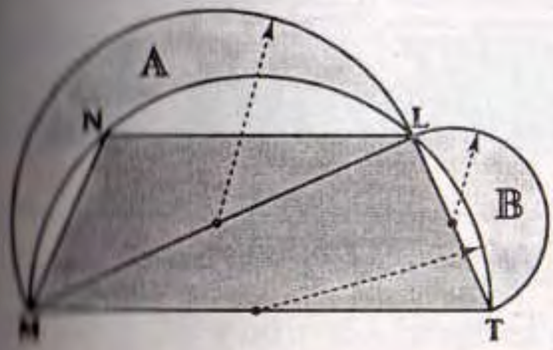
D) $\pi$

E) $\frac{\pi+1}{\pi}$




**PROBLEMA Nº 58**

En el gráfico, MN = NL = LP, calcule $\frac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{S_{(MNLT)}}$.




A) 1 B) 2 C) 3/2

D) 2/3 E) 4/3

**PROBLEMA Nº 59**

En la circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio 6, se ubican los puntos A y B, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias de diámetros $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$, si $m\widehat{AB}=90°$, calcule el área de la región externa a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ e interna a $\mathscr{C}$.

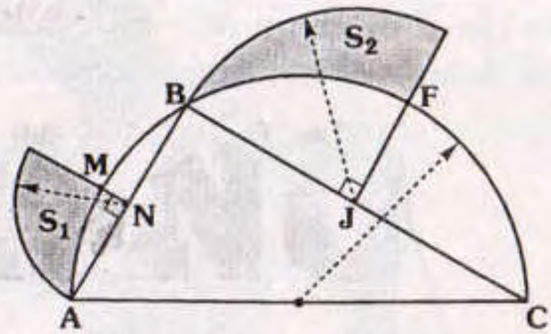
A) $\frac{45}{2}\pi-9$ B) $\frac{99}{2}\pi-9$

C) $\frac{115\pi}{4}-10$ D) $20\pi-6$

E) $\frac{99}{4}\pi-12$

**PROBLEMA Nº 60**

En el gráfico, $\overline{MN}$ y $\overline{FJ}$ son flechas relativas a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $S_1=3$ y $S_2=4$. Halle el área de la región ABC.



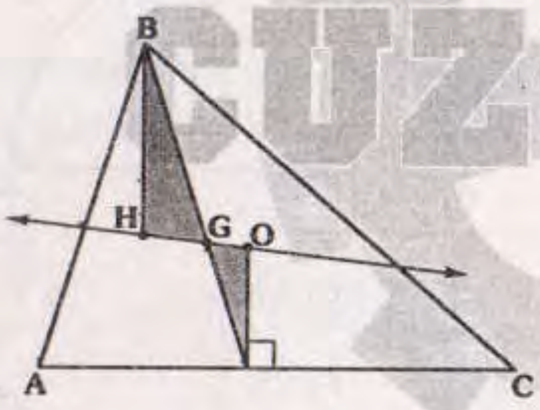

A) 5 B) 10 C) 7

D) 14 E) 25

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

**PROBLEMA N° 61** Seminario

En la figura mostrada, H es el ortocentro y G el baricentro del triángulo ABC. Si AB=13u, BC=15u y AC=14u. Halle la suma de áreas de las regiones sombreadas.




A) 55/8 B) 33/4 C) 44/3

D) 17/3 E) 23/4

**PROBLEMA N° 62** Seminario

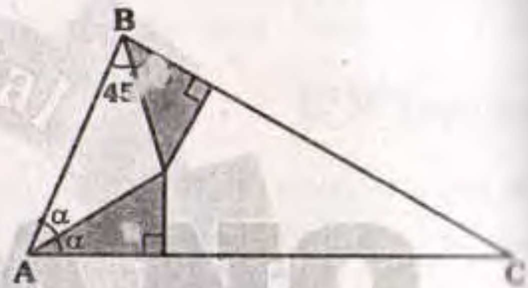
En el triángulo ABC, AB < BC, $\overline{BE}$ es bisectriz interior y $\overline{BD}$ es bisectriz exterior, demostrar:

$$A_{\Delta ABD} = A_2\left(\frac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2}\right)$$

donde: $A_1 = A_{\Delta CBE}$ y $A_2 = A_{\Delta EBA}$

**PROBLEMA N° 63** Seminario

En la figura, AB = 6u y BC = 8u. Hallar la suma de áreas de las regiones sombreadas.




A) $10u^2$ B) $8u^2$ C) $4u^2$

D) $2u^2$ E) $6u^2$

**PROBLEMA N° 64** Seminario

En un triángulo rectángulo ABC, se traza la altura BH y una recta secante que interseca a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N; además contiene a los incentros de los triángulos rectángulos AHB y BHC. Si MB = m, MA = $\ell$ y CN = n. Halle el área de AMNC.

A) $\frac{3}{2}\ell(m+n)$ B) $\frac{\ell}{2}(m+n)+\frac{mn}{2}$

C) $\frac{3\ell}{2}(m+n)-\frac{mn}{2}$ D) $\frac{mn}{2}+\frac{3\ell}{2}(m+n)$

E) $mn+\ell(m+n)$

**PROBLEMA Nº 65** Seminario

En un triángulo ABC, cuyos lados miden a, b y c y las alturas relativas a dichos lados son $h_1$, $h_2$ y $h_3$ respectivamente. Hallar el área de la región ABC.

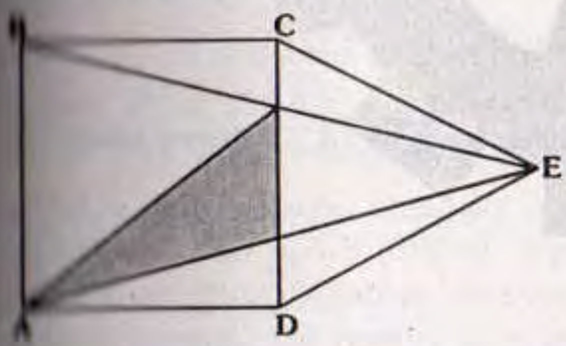
A) $\sqrt[3]{abch_1h_2h_3}$ B) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{abch_1h_2h_3}$

C) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{abch_1h_2h_3}$ D) $\sqrt[3]{\frac{abch_1h_2h_3}{2}}$

E) $2\sqrt[3]{abch_1h_2h_3}$

**PROBLEMA Nº 66** Seminario

ABCD es un cuadrado cuyo lado mide "$\ell$" y DCE es un triángulo equilátero. Hallar el área de la región sombreada.




A) $\frac{\ell^2}{2}(3\sqrt{3}-2)$ B) $\frac{\ell^2}{2}(2\sqrt{3}-3)$

C) $\frac{\ell^2}{2}(\sqrt{3}-1)$ D) $\frac{\ell^2}{2}(2\sqrt{3}-1)$

E) $\frac{\ell^2}{2}(4\sqrt{3}-3)$

**PROBLEMA Nº 67** Seminario

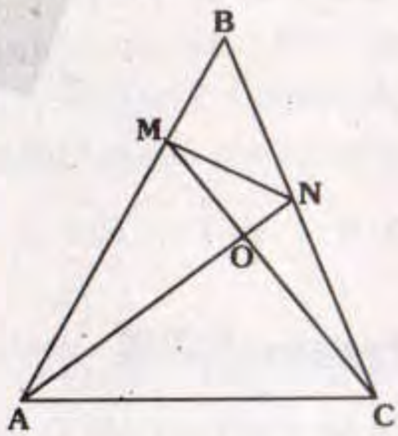
En un triángulo isósceles ABC, AB = BC, AC = b, las medianas congruentes son perpendiculares. Halle el área de la región triangular ABC.

A) $\frac{3}{8}b^2$ B) $\frac{3}{4}b^2$ C) $\frac{3}{2}b^2$

D) $2b^2$ E) $3b^2$

**PROBLEMA Nº 68** Seminario

En la figura, $A_{\Delta MBN} = \mathbb{X}u^2$, $A_{\Delta MON} = \mathbb{Y}u^2$, $A_{\Delta AOC} = \mathbb{Z}u^2$. Halle el área de la región triangular ABC.




A) $\frac{3}{2}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}+\mathbb{Z})$

B) $\frac{\mathbb{X}\mathbb{Y}}{\mathbb{Z}}$

C) $\frac{\mathbb{X}\mathbb{Z}}{\mathbb{Y}}$

D) $\frac{\mathbb{Y}\mathbb{Z}}{\mathbb{X}}$

E) $\frac{2}{3}(\mathbb{X}+2\mathbb{Y}+\mathbb{Z})$

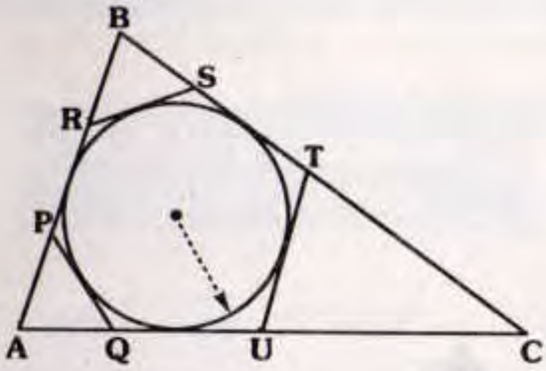
**PROBLEMA Nº 69** Seminario

Si p representa al semiperímetro y

$$(p_{APQ})(p_{RBS})(p_{TCU}) = 336$$

$$p_{APQ} + p_{RBS} + p_{TCU} = 21$$

Halle el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.




A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**PROBLEMA Nº 70** Seminario

En un triángulo ABC se ubica el ortocentro O, $\overline{BH}$ es altura del triángulo ABC, F es un punto de la prolongación de $\overline{BH}$, tal que $m\measuredangle AFC = 90°$. Si $(AC)(BH) = 32u^2$ y $(AC)(OH) = 8u^2$. Halle el área de la región triangular AFC en $u^2$.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**PROBLEMA Nº 71** Seminario

En un cuadrado ABCD sobre el lado $\overline{BC}$ se construye exteriormente el triángulo rectángulo BMC (recto en M). Si el producto de las áreas de las regiones triangulares ABM y MCD es $36u^4$, entonces el área de la región triangular BMC (en $u^2$) es:

A) 18 B) 15 C) 12 D) 6 E) 5

**PROBLEMA Nº 72** Seminario

Se tiene un triángulo de lados 9u, 10u y 11u. Calcule el área de la región triangular cuyos vértices son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo.

A) $\frac{80}{11}\sqrt{2}$ B) $\frac{40}{13}\sqrt{2}$ C) $\frac{20}{33}\sqrt{2}$

D) $\frac{80}{11}\sqrt{3}$ E) $\frac{40}{11}\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 73** Seminario

En un triángulo ABC se ubica D en la prolongación de $\overline{AC}$ tal que $AC : CD :: 3:1$, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{DM} \cap \overline{AB} = \{N\}$. Halle la relación entre las áreas de las regiones BMN y ANMC.

A) 1: 5 B) 1: 6 C) 1: 9

D) 2: 9 E) 2: 5

**PROBLEMA Nº 74** Examen parcial

En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado de lado 8 con una circunferencia inscrita de centro O. Después del vértice A se traza el arco BD, luego el área de la región triangular AOM es:

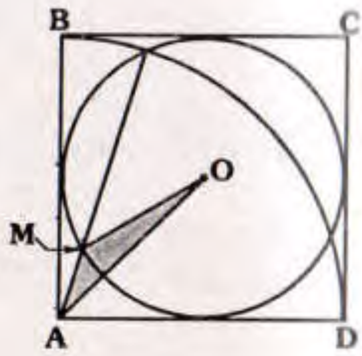
A) $\sqrt{7}$

B) 2,5

C) $\sqrt{6}$

D) 3

E) $\sqrt{5}$



**PROBLEMA Nº 75** Seminario

Siendo $\mathbb{A}$ el área de una región triangular, hallar el área de la región triangular cuyos vértices son los puntos medios de las medianas.

A) $\mathbb{A}/4$ B) $\mathbb{A}/6$ C) $\mathbb{A}/8$

D) $\mathbb{A}/16$ E) $\mathbb{A}/24$

**PROBLEMA Nº 76** Seminario

En un triángulo ABC, se cumple que BC=a, AC=b y AB=c, el incentro es I; la bisectriz del ángulo B corta a la circunferencia circunscrita en F; si r y $r_b$ representan las longitudes del inradio y exradio relativo a $\overline{AC}$, probar que el área de la región AIF tiene por expresión: $\dfrac{bc(r+r_b)}{4(a+c)}$

**PROBLEMA Nº 77** Seminario

En un cuadrilátero inscriptible ABCD, AB=7cm; BC=CD=15cm y AD=25cm. Hallar el área del triángulo ABC.

A) $24cm^2$ B) $48cm^2$ C) $20cm^2$

D) $42cm^2$ E) $50cm^2$

**PROBLEMA Nº 78** Seminario

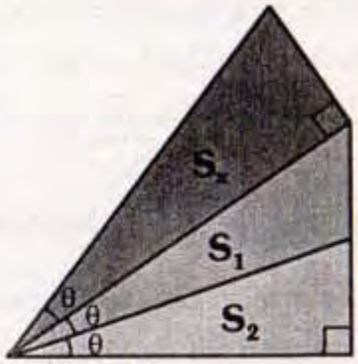
Calcula el área de la región triangular cuyos lados miden $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$.

A) $\dfrac{\sqrt{35}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{59}}{4}$ C) $\dfrac{49}{15}$

D) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)$ E) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{105}}\right)$

**PROBLEMA Nº 79** Seminario

De la figura, hallar $S_x$ en función de $S_1$ y $S_2$.




A) $S_1^2/S_2$

B) $\sqrt{S_1^2+S_2^2}$

C) $\sqrt{S_1S_2}$

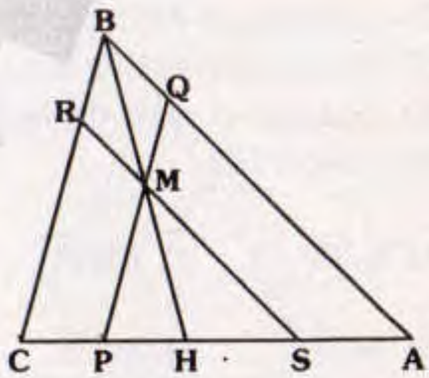
D) $S_2^2/S_1$

E) $S_1+S_2$

**PROBLEMA Nº 80** Seminario

En la figura $\overline{PQ}//\overline{CB}$, $\overline{RS}//\overline{BA}$, AH=2(HC), $S_{\Delta ABC}=120u^2$ BM=MH.

Hallar $S_{AQMS}-S_{MRCP}$.




A) 40

B) 80

C) 90

D) 60

E) 30

**PROBLEMA Nº 81** Seminario

En el triángulo ABC, I es incentro y G es baricentro. Si AB = 15u, BC = 13u y AC = 14u. Calcule $S_{\Delta BIG}$.

A) 2 B) 1 C) 4/3

D) 2/3 E) 5/3

**PROBLEMA Nº 82** Práctica Calificada

En un triángulo ABC, se cumple que AC=6, AB+BC=18 y su inradio mide 2. Calcule el área de la superficie del triángulo ABC.

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

**PROBLEMA Nº 83** Práctica Calificada

En un triángulo ABC (recto en B), I es incentro, AI=a, IC= $b\sqrt{2}$ . Calcule el área de la superficie triangular AIC.

A) 2ab B) ab C) $\frac{ab}{2}$

D) $\frac{1}{4}ab$ E) $\frac{a^2+b^2}{2}$

**PROBLEMA Nº 84** Práctica Calificada

En un triángulo ABC dos lados miden 9 y 13, la mediana relativa al tercer lado mide 10. Calcule el área de la superficie del triángulo ABC.

A) $8\sqrt{14}$ B) $10\sqrt{14}$ C) $12\sqrt{14}$

D) $14\sqrt{14}$ E) $16\sqrt{14}$

**PROBLEMA Nº 85** Práctica Calificada

En un triángulo acutángulo ABC, la $m\measuredangle ABC=72°$, se trazan las alturas $\overline{AF}$ y $\overline{CH}$ . Entonces, el área de la región triangular HBF es $(a-b\sqrt{5})$ veces el área de la región triangular ABC. Calcule **a/b**.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**PROBLEMA Nº 86** Práctica Calificada

El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero ABC mide 1u. Halle el área de la región triangular ABC (en u²).

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 87** Práctica Calificada

Una región triangular ABC, de baricentro G tiene k u² de área. Por G se traza una paralela a $\overline{AC}$ que interseca a los lados AB y BC en P y Q respectivamente. Halle el área de la región APQC (en u²).

A) $\frac{k}{6}$ B) $\frac{k}{5}$ C) $\frac{2}{5}k$

D) $\frac{3}{7}k$ E) $\frac{5}{9}k$

**PROBLEMA Nº 88** Práctica Calificada

En un triángulo ABC se traza la mediana AM y la bisectriz BD del ángulo ABC, $D\in\overline{AC}$ , $\overline{BD}\cap\overline{AM}=\{Q\}$ , $\frac{AD}{DC}=\frac{3}{4}$ . Si el área de BQM es S, halle el área de la región triangular ABC.

A) 5S B) 6S C) 7S D) 8S E) 9S

**PROBLEMA Nº 89** Examen de Selección

El perímetro de un triángulo isósceles es 28u. Si uno de los lados congruentes mide

19 u, entonces el área (en u²) de la región triangular es:

A) $4\sqrt{21}$ B) $6\sqrt{21}$ C) $8\sqrt{21}$

D) 26 E) 28

**PROBLEMA Nº 90** Seminario

En una circunferencia se inscribe el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica un punto F sobre el arco $\overset{\frown}{BC}$. Si $BC = 6\sqrt{3}$, BF = 6 y $m\overset{\frown}{AB} = 60°$, entonces el área de la región triangular BFC es:

A) $\frac{9}{2}(4-\sqrt{3})$ B) $9(4-\sqrt{3})$

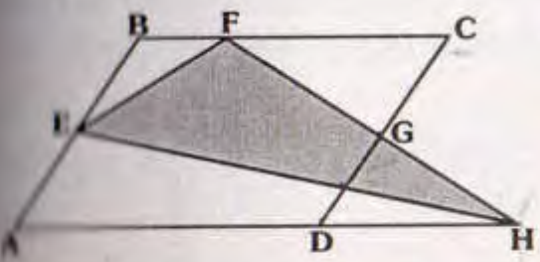
C) $3(8-\sqrt{3})$ D) $\frac{9}{2}(2-\sqrt{3})$

E) $4(3-\sqrt{3})$

## ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

**PROBLEMA Nº 91** Seminario

En el romboide ABCD de área S, se cumple que AE = DG. Hallar el área de la región sombreada.



A) S/2 B) S/3 C) S/4 D) S E) 2S

**PROBLEMA Nº 92** Seminario

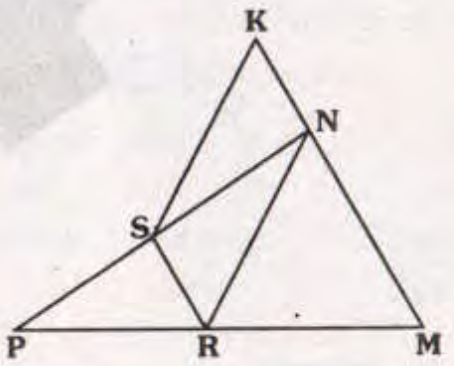
En un trapecio ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ (BC < AD); la base media y la diagonal $\overline{AC}$ se cortan en Q. Calcular el área de BQD, si las áreas de las regiones trapeciales parciales determinadas por la base media son $S_1$ y $S_2$ ($S_1 > S_2$).

A) $\frac{S_1+S_2}{2}$ B) $S_1 - S_2$ C) $\frac{S_1-S_2}{2}$

D) $\sqrt{S_1S_2}$ E) $\frac{2S_1S_2}{S_1-S_2}$

**PROBLEMA Nº 93** Seminario

En la siguiente figura el área de la región triangular PSR es $\mathbb{A}u^2$ y b(MN) = a(NK), entonces el área de la región limitada por el paralelogramo KSRN es:



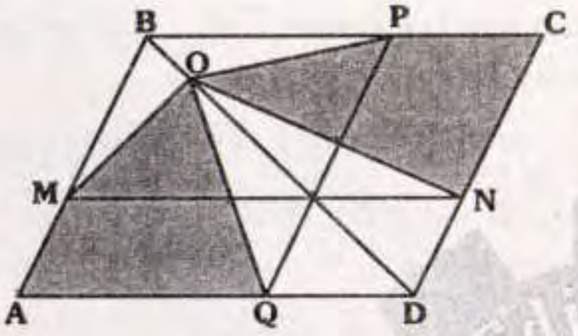
A) $\frac{3\mathbb{A}(a-b)}{2b}$ B) $\frac{4}{3}\frac{\mathbb{A}(a-b)}{b}$

C) $\frac{\mathbb{A}(a-b)}{b}$ D) $\frac{\mathbb{A}(a-b)}{2b}$

E) $\frac{2\mathbb{A}(a-b)}{b}$

**PROBLEMA Nº 94** Práctica Calificada

En el paralelogramo ABCD de la figura $\overline{MN}//\overline{AD}$ y $\overline{PQ}//\overline{AB}$. Si $S_{\square OMAQ}=17u^2$, calcule $S_{(\square OPCN)}$ en $u^2$.




A) 8,5  B) 13  C) 17,5
D) 21  E) 17

**PROBLEMA Nº 95** Práctica Calificada

Las bases de un trapecio miden a y b (a<b). Halle la longitud del segmento paralelo a las bases que determina dos trapecios de la misma área.

A) $\sqrt{ab}$  B) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$  C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}}$

D) $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$  E) $\frac{a^3+b^3}{ab}$

**PROBLEMA Nº 96** Práctica Calificada

En el triángulo ABD, $C\in\overline{AD}$ (AC > CD) y $P\in\overline{AB}$, tal que $\overline{CP}//\overline{BD}$. Si M es punto medio de $\overline{AD}$ y $S_{\Delta ABC}=16m^2$, halle $S_{\square MPBC}$ en $m^2$.

A) 6  B) 7  C) 8  D) 9  E) 12

**PROBLEMA Nº 97** Práctica Calificada

En el cuadrado ABCD de 20u de lado, $M\in\overline{CD}$, $N\in\overline{AB}$ y $\overline{AM}//\overline{CN}$. Si la distancia entre $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ es 40, calcule el área de la región AMCN (en u²)

A) 100  B) 120  C) 130
D) 140  E) 150

**PROBLEMA Nº 98** Práctica Calificada

En una circunferencia de centro O y de radio R unidades, se inscribe un hexágono regular ABCDEF. Las prolongaciones de las cuerdas $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ se interceptan en el punto G. Si $\overline{EC}\cap\overline{AD}=\{K\}$, entonces el área (en u²) de la región cuadrangular EKDG es:

A) $\frac{2R^2\sqrt{3}}{5}$  B) $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$  C) $\frac{5R^2\sqrt{3}}{8}$

D) $\frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$  E) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$

**PROBLEMA Nº 99** Práctica Calificada

Sea ABC un triángulo, AC= b, BC= a (a > b), $r_a$ y $r_b$ son los radios de las circunferencias exinscritas relativas a los lados BC y AC respectivamente. Halle el área de la región triangular ABC.

A) $\frac{2\sqrt{r_ar_b}ab}{\sqrt{r_a^2-r_b^2}}$  B) $\frac{(a^2-b^2)r_ar_b}{r_a^2-r_b^2}$  C) $\frac{ab\sqrt{r_ar_b}}{a-b}$

D) $\frac{r_ar_b(a-b)}{r_a-r_b}$  E) $\frac{(r_a+r_b)ab}{r_a-r_b}$

**PROBLEMA Nº 100** Práctica Calificada

ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y circunscrito a otra; AB=a, BC=b, CD=c, AD=d. Halle el área de la región triangular ABC.

A) $\frac{(a+b)\sqrt{abcd}}{c+d}$ B) $\frac{ab\sqrt{abcd}}{ab+cd}$

C) $\frac{ac\sqrt{abcd}}{ac+bd}$ D) $\frac{bd\sqrt{abcd}}{ad+bc}$

E) $\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\right)\sqrt{abcd}$

**PROBLEMA Nº 101** Práctica Calificada

En un rombo la suma de las longitudes de sus diagonales es 70 u y la longitud del radio de la circunferencia inscrita al rombo es 12u. Entonces el área (en $u^2$) de la región limitada por el rombo es:

A) 400 B) 480 C) 560

D) 600 E) 640

**PROBLEMA Nº 102** Práctica Calificada

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se inscribe un cuadrado EFLJ, EJ ⊂ $\overline{AC}$, F∈$\overline{AB}$, L∈$\overline{BC}$. Las áreas de las regiones triangulares AEF y LJC son $Vu^2$ y $Wu^2$. Halle el área de la región cuadrada EFLJ. (en $u^2$)

A) $\frac{\sqrt{V.W}}{2}$ B) $\sqrt{V.W}$ C) $\sqrt{2V.W}$

D) $2\sqrt{V.W}$ E) $\frac{V.W}{V+W}$

**PROBLEMA Nº 103** Práctica Calificada

En un cuadrilátero convexo ABCD se verifica: $m\sphericalangle BCD=90°$, AB = 13u, BC = 20u, CD = 10u y DA = 17u. Entonces, el área (en $u^2$) de la región cuadrangular ABCD es:

A) 200 B) 210 C) 220

D) 310 E) 320

**PROBLEMA Nº 104** Práctica Calificada

En un triángulo ABC se ubican los puntos M en $\overline{AC}$ y N en $\overline{BC}$ tal que: MC=2AM y BN=2NC. Si $\overline{AN}\cap\overline{BM}=\{P\}$ y el área de la región triangular APB es $10u^2$, entonces el área (en $u^2$) de la región cuadrangular PMCN es:

A) 10 B) 15 C) 20

D) 25 E) 30

**PROBLEMA Nº 105** Seminario

Sea el rombo ABCD, P es punto medio de $\overline{BC}$, AP = 9cm, DP = 13cm. Halle el área limitado por el rombo ABCD en $cm^2$.

A) $12\sqrt{14}$ B) $14\sqrt{14}$ C) $18\sqrt{14}$

D) $22\sqrt{14}$ E) $24\sqrt{14}$

**PROBLEMA Nº 106** Examen Parcial

En el triángulo cuyos lados miden 5; 7 y 8m se inscribe un rectángulo como se muestra en la figura. Entonces el área máxima en $m^2$ que puede encerrar dicho

rectángulo es:

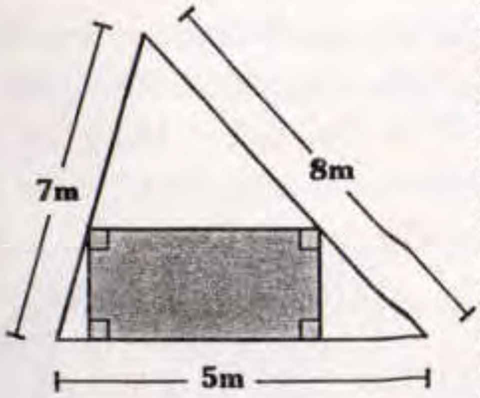
A) $\sqrt{55}$

B) $6\sqrt{3}$

C) $\sqrt{65}$

D) $5\sqrt{3}$

E) $\sqrt{85}$




**PROBLEMA Nº 107** Seminario

Se tiene un rectángulo de área 60 $u^2$, cuyos lados son longitudes enteras, entonces el perímetro máximo de dicho rectángulo es:

A) 122 u B) 64u C) 32u

D) 100u E) 60u

**PROBLEMA Nº 108** Seminario

Por los vértices opuestos de un cuadrado, cuyo lado mide 5m, se trazan dos paralelas distantes 7m. Calcular el área de la región paralelográmica (no cuadrado) que se forma.

A) 50 B) $\frac{625}{4}$ C) $\frac{625}{2}$

D) $\frac{1225}{8}$ E) $\frac{1225}{24}$

**PROBLEMA Nº 109** Seminario

Tres polígonos regulares de **n** lados de áreas $\mathbb{A}_1$; $\mathbb{A}_2$ y $\mathbb{A}_3$ cuyas longitudes de lados miden $a_1$, $a_2$ y $a_3$ respectivamente. Si $\mathbb{A}_3 = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$. Calcule $a_3$ en función de $a_1$ y $a_2$.

A) $\sqrt{a_1a_2}$ B) $a_1+a_2$ C) $\frac{a_1+a_2}{3}$

D) $\frac{a_1+a_2}{n}$ E) $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

**PROBLEMA Nº 110** Seminario

En un cuadrado ABCD, se traza una recta secante que pasa por el centro y que interseca a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, las distancias trazadas de los vértices a la recta miden a; b; c y d, si $a^2+b^2+c^2+d^2=100$. Hallar el área de la región cuadrada.

A) 120 B) 150 C) 100

D) 200 E) 160

**PROBLEMA Nº 111** Seminario

Hallar el área encerrada por el trapecio ABCD, si AB=BC=4, $m\measuredangle ABC = m\measuredangle ACD = 90°$ y AC=CD

A) 12 B) 24 C) 20 D) 36 E) 32

**PROBLEMA Nº 112** Práctica Calificada

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En un cuadrilátero cualquiera ABCD, se ubican los puntos medios M, N, P y Q de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Entonces, el área de la región cuadrangular MNPQ es igual a la mitad del área de la región cuadrangular ABCD.

II. En un trapecio ABCD ($\overline{AB}//\overline{CD}$): El segmento de recta que une los puntos medios de las bases, divide a la región cuadrangular ABCD en dos regiones cuadrangulares equivalentes.

III. En un triángulo escaleno ABC, las medianas del triángulo dividen a la región triangular en seis regiones triangulares equivalentes.

A) VFV B) VVF C) FFV

D) VVV E) FVV

**PROBLEMA Nº 113** Seminario

El área de la región de un triángulo ABC es de $18u^2$, se traza la altura BH y la mediatriz de $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{BC}$ en N. Calcule el área de la región cuadrangular ABNH (en $u^2$)

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

**PROBLEMA Nº 114** Seminario

En un cuadrilátero MNPQ, se tiene que $m\measuredangle M = 30°$, $m\measuredangle N = 150°$, $m\measuredangle P = 120°$, $MN = K\sqrt{3}$ y $NP = \ell$, entonces el área de la región cuadrangular MNPQ es:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}k(\ell+k)$ B) $\sqrt{\frac{3}{2}}k(\ell+2k)$

C) $\sqrt{3}\,k(\ell+k)$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell\,(\ell+2k)$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2}k(2\ell+k)$

**PROBLEMA Nº 115** Seminario

Dentro del rectángulo ABCD se ubica el punto M tal que $AM=\sqrt{2}u$, $BM=2u$ y $CM=6u$. Si $AD=2(AB)$, entonces el área de la región rectangular ABCD (en $u^2$)

A) 16 B) 18 C) 20

D) 24 E) 28

**PROBLEMA Nº 116** Seminario

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$; sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Demostrar que el área de la región triangular ABC es igual al producto del semiperímetro del triángulo DEF con R.

**PROBLEMA Nº 117** Seminario

Sobre la hipotenusa AB del triángulo ABC se contruye un cuadrado ABDE exterior al triángulo. Si O es el centro del cuadrado y CO = L, entonces el área de la región cuadrangular ACBO es:

A) $L^2$ B) $\frac{L^2}{2}$ C) $\frac{L^2}{3}$

D) $\frac{2L^2}{3}$ E) $\frac{3L^2}{4}$

**PROBLEMA Nº 118** Seminario

Si las bases de un trapecio isósceles ABCD circunscrito a una circunferencia miden 2a y 2b entonces el área de ABCD es:

A) $\frac{(a+b)^2}{2}$ B) $\frac{(a+b)}{2}\sqrt{ab}$

C) $(a+b)\sqrt{ab}$ D) $2(a+b)\sqrt{ab}$

E) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4$

**PROBLEMA Nº 119** Seminario

En un trapecio ABCD ( $\overline{AB}//\overline{CD}$ ); M es punto medio de $\overline{AD}$. Luego se traza $\overline{MQ}\perp\overline{BC}$. Si MQ = a y BC = b, entonces el área de la región limitada por el trapecio es:

A) ab B) 2ab C) 3ab

D) $\frac{ab}{2}$ E) $\frac{3ab}{4}$

**PROBLEMA Nº 120** Seminario

ABCD es un trapecio ( $\overline{BC}//\overline{AD}$ ) $m\sphericalangle BAC=2(m\sphericalangle CDA)=60°$.

Si 2(BC)=AD=8, entonces el área de ABCD es:

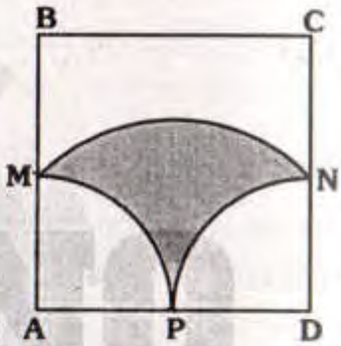
A) $5\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{3}$

D) $8\sqrt{3}$ E) C ó D

## ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

**PROBLEMA Nº 121** Seminario

ABCD es un cuadrado de lado $\ell$, los centros de los arcos son: A, D y P (P, M y N son puntos medios)




A) $\ell^2/8$

B) $\ell^2/2$

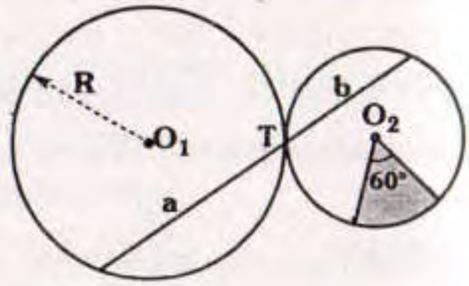
C) $\ell^2/3$

D) $\ell^2/5$

E) $\ell^2/4$

**PROBLEMA Nº 122** Seminario

Hallar el área del sector circular mostrado en función de a, b y R (T es punto de tangencia, $O_1$ y $O_2$ son centros)




A) $\frac{\pi a^2R^2}{6b^2}$ B) $\frac{\pi b^2R^2}{6a^2}$ C) $\frac{\pi a^2b^2}{6R^2}$

D) $\frac{\pi a^4}{6bR}$ E) $\frac{\pi b^4}{6bR}$

**PROBLEMA Nº 123** Seminario

En la figura hallar $S_1$ - $S_2$, si el lado del cuadrado ABCD mide $2\sqrt{2}$u.

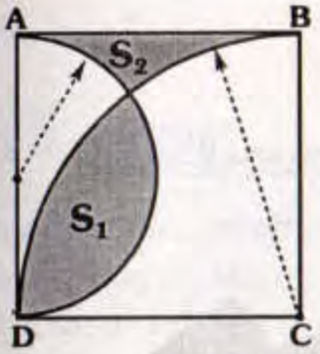
A) $3\pi - 4$

B) $3\pi - 6$

C) $3\pi - 8$

D) $2\pi - 3$

E) $2\pi - 4$




**PROBLEMA Nº 124** Seminario

Si $\overline{AB} = \overline{BC}$ y el área de la región sombreada es 36 $cm^2$, halle el área de la superficie triangular mixtilínea FBC (en $cm^2$)

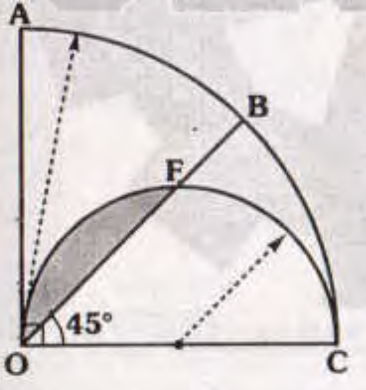
A) 18 $cm^2$

B) 36 $cm^2$

C) $18\pi cm^2$

D) $36\pi cm^2$

E) $9\pi cm^2$




**PROBLEMA Nº 125** Seminario

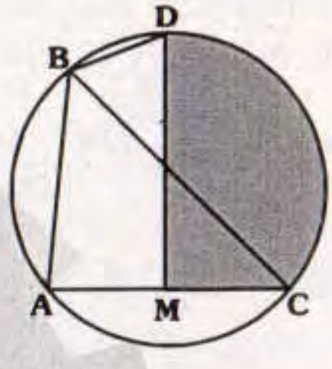
Hallar el área de la corona circular determinada por la circunferencia inscrita y circunscrita a un polígono regular de lado "a".

A) $\frac{\pi a^2}{4}$ B) $\frac{\pi a^2}{2}$ C) $\pi a^2$

D) $a^2(\pi - 1)$ E) $\frac{\pi a^2}{8}$

**PROBLEMA Nº 126** Seminario

En la figura $m\measuredangle ABC = 45°$ y $\overline{BD}$ es bisectriz exterior del ángulo en B, M es punto medio de $\overline{AC}$. Calcular el área de la región sombreada (R es el radio de la circunferencia)




A) $\frac{R^2}{2}(2\pi + 3)$ B) $\frac{R^2}{6}(2\pi + 3)$

C) $\frac{R^2}{8}(3\pi + 2)$ D) $\frac{R^2}{8}(3\pi + 1)$

E) $\frac{\pi R^2}{5}$

**PROBLEMA Nº 127** Práctica Calificada

En una circunferencia de radio R unidades, se trazan dos cuerdas paralelas situadas a un mismo lado del centro de la circunferencia. Si las medidas de los arcos que corresponden a estas cuerdas son 30° y 150°, entonces el área (en $u^2$) de la parte de la región circular limitada por estas cuerdas es:

A) $\frac{\pi R^2}{4}$ B) $\frac{\pi R^2}{5}$ C) $\frac{\pi R^2}{6}$

D) $\frac{\pi R^2}{8}$ E) $\frac{\pi R^2}{3}$

**PROBLEMA Nº 128** **Práctica Calificada**

Dos radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ de una circunferencia, forman un ángulo agudo cuya medida es 60°. Desde el punto A se traza el segmento AC perpendicular a la recta tangente trazada a la circunferencia por el punto B (C está en la recta tangente). Si OA = R; entonces el área de la región limitada por $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y el arco AB es:

A) $\frac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{12}$  B) $\frac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{24}$

C) $\frac{(7\sqrt{3}-2\pi)R^2}{12}$  D) $\frac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{18}$

E) $\frac{(7\sqrt{3}-3\pi)R^2}{24}$

**PROBLEMA Nº 129** **Práctica Calificada**

Dos circunferencia son concéntricas, una cuerda de la circunferencia mayor es tangente a la menor, la longitud de la cuerda es 2u. Halle (en $u^2$) el área de la corona circular.

A) $\pi$  B) $2\pi$  C) $3\pi$

D) $4\pi$  E) $6\pi$

**PROBLEMA Nº 130** **Práctica Calificada**

Sea L la longitud de un lado del cuadrado ABCD, con centro en D se traza el arco AC, $\overline{BD}\cap\widehat{AC}=\{E\}$ se ubica el punto medio M del lado CD, $\overline{AM}\cap\overline{BD}=\{F\}$. Calcule el área de la región limitada por los segmentos EF, FM, MC y el arco CE.

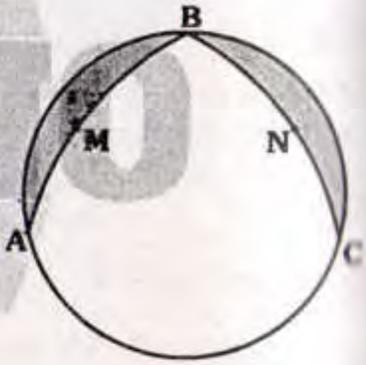
A) $\frac{L^2}{24}(3\pi-2)$  B) $\frac{L^2}{18}(\pi-1)$

C) $\frac{L^2}{12}(2\pi-3)$  D) $\frac{L^2}{9}(2\pi-5)$

E) $\frac{\pi L^2}{16}$

**PROBLEMA Nº 131** **Seminario**

En la figura, $\widehat{AB}\cong\widehat{BC}\cong\widehat{AC}$, sobre la circunferencia de radio R con centros en A y C se trazan los arcos AMB y BNC. Calcule el área de la región sombreada.




A) $\frac{R^2}{6}(\pi-\sqrt{3})$

B) $\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$

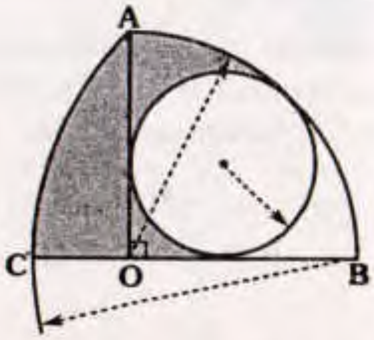
C) $\frac{R^2}{6}(\pi+\sqrt{3})$

D) $\frac{R^2}{6}(3\sqrt{3}+\pi)$

E) $\frac{R^2}{6}(4\sqrt{3}-2\pi)$

**PROBLEMA Nº 132** **Seminario**

En la figura, se cumple que OA=OB=2u, halle el área de la región sombreada.



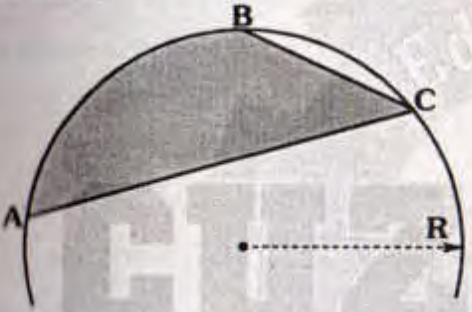
A) $(\pi-1)u^2$  B) $\left(\pi-\frac{8}{5}\right)u^2$

C) $(4+5\pi\sqrt{2}-6\pi-4\sqrt{2})u^2$

D) $(6\pi+3\pi\sqrt{2}+4-4\sqrt{2})u^2$  E) $\pi u^2$

**PROBLEMA Nº 133** **Seminario**

En la figura mostrada, R es radio del arco de circunferencia, si $m\widehat{AB}=90°$ y $m\widehat{BC}=45°$. Halle el área de la región sombreada.




A) $\pi R^2$  B) $\frac{\pi R^2}{2}$  C) $\frac{\pi R^2}{3}$

D) $\frac{\pi R^2}{4}$  E) $\frac{\pi R^2}{8}$

**PROBLEMA Nº 134** **Seminario**

En un triángulo equilátero de lado L, haciendo centro en cada vértice y con radios $\frac{2}{5}L\sqrt{3}$ se trazan arcos de circunferencia. Halle el área del círculo en el interior del triángulo curvilíneo tangente a los arcos trazados.

A) $\frac{\pi L^2}{3}$  B) $\frac{\pi L^2}{2}$  C) $\frac{\pi L^2}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{\pi L^2}{12}$  E) $\frac{\pi L^2}{75}$

**PROBLEMA Nº 135** **Seminario**

En la figura $\overline{AD}$ es diámetro y AB=BC=CD, calcule la relación entre el área de la región sombreada y el de la no sombreada (todas las curvas son semicircunferencias)

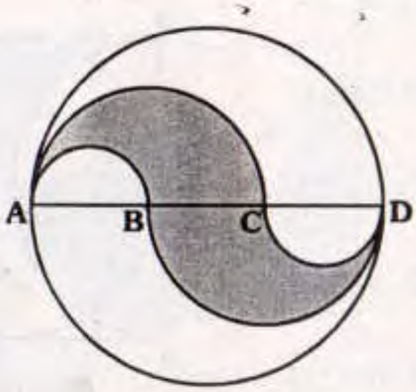
A) 1/3

B) 2/5

C) 1/2

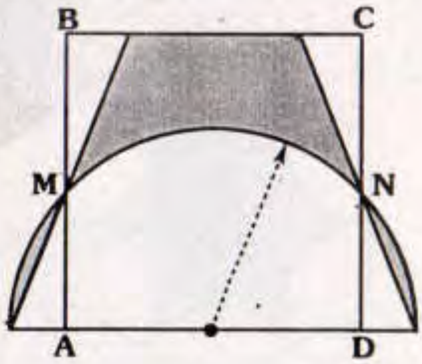
D) 1

E) 2/3




**PROBLEMA Nº 136**

Hallar el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado (AB=a , M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ )



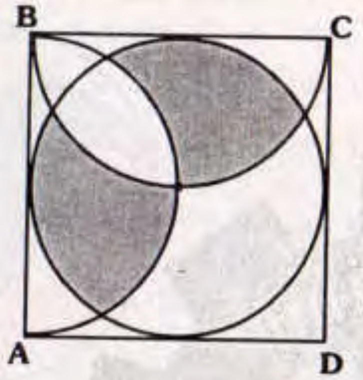

A) $\frac{a^2}{2}(2+\sqrt{2})$  B) $\frac{a^2}{2}(1+\sqrt{2})$

C) $\frac{a^2}{2}(2-\sqrt{2})$  D) $\frac{a^2}{2}\sqrt{2}$

E) $\frac{a^2}{2}(3-2\sqrt{2})$

**PROBLEMA Nº 137** Seminario

En el gráfico, se tiene un cuadrado cuyo lado mide $\ell$, se tiene también dos semicírculos y un círculo inscrito. Hallar el área de la región sombreada.




A) $\pi\ell^2/4$

B) $\pi\ell^2/6$

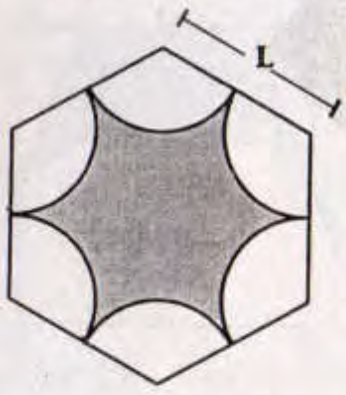
C) $\pi\ell^2/3$

D) $\pi\ell^2/8$

E) $\pi\ell^2/16$

**PROBLEMA Nº 138** Seminario

Los vértices del hexágono regular mostrado son centros de seis circunferencias congruentes y tangentes exteriores. Hallar el área de la región sombreada.



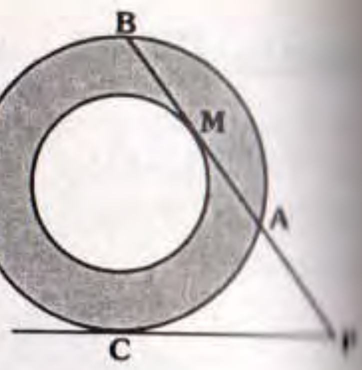

A) $\dfrac{L^2}{2}(3\sqrt{3}+\pi)$ B) $\dfrac{L^2}{2}(3\sqrt{3}-\pi)$

C) $\dfrac{L^2}{2}(3\sqrt{3}+2\pi)$ D) $\dfrac{L^2}{2}(2\pi-3\sqrt{3})$

E) $L^2(3\sqrt{3}-\pi)$

**PROBLEMA Nº 139** Seminario

Hallar el área de la corona circular, si PA=3u y PC=6u (C y M son puntos de tangencia)




A) $\dfrac{27}{4}\pi u^2$

B) $\dfrac{45}{4}\pi u^2$

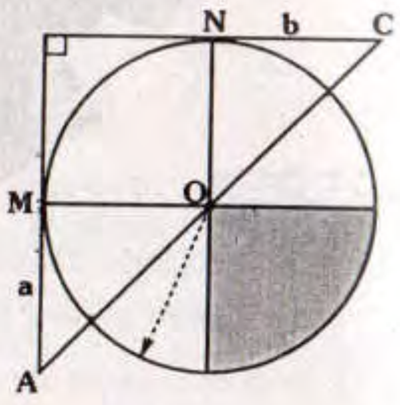
C) $25\pi u^2$

D) $\dfrac{81}{4}\pi u^2$

E) $\dfrac{45}{2}\pi u^2$

**PROBLEMA Nº 140** Seminario

En la figura M y N son puntos de tangencia. Hallar el área de la región sombreada.




A) $\dfrac{\pi}{4}(b^2-a^2)$ B) $\pi(a^2+b^2)$

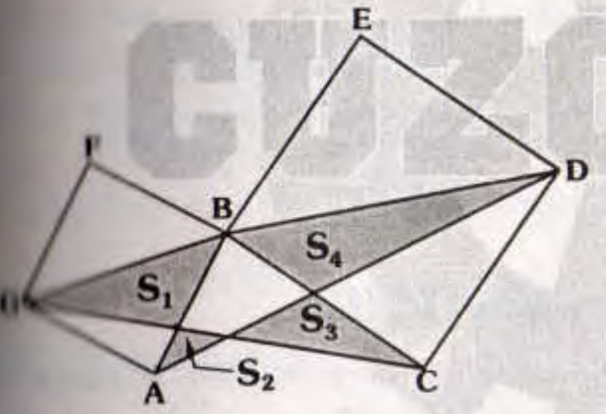
C) $\dfrac{\pi}{4}(a^2+b^2)$ D) $\dfrac{\pi}{4}ab$

E) $\dfrac{\pi}{2}ab$

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

**PROBLEMA Nº 141**

En el gráfico, ABFG y BCDE son cuadrados. Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.




A) $S_1+S_3=S_2+S_4$ B) $S_1S_3 = S_2S_4$

C) $S_1^2+S_3^2=S_2^2+S_4^2$ D) $S_1-S_3=S_4-S_2$

E) $S_1S_2 = S_4S_3$

**PROBLEMA Nº 142**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, $S_1$ y $S_2$ son las áreas de las regiones sombreadas. Si $S_2 = 16S_1$, calcule x.

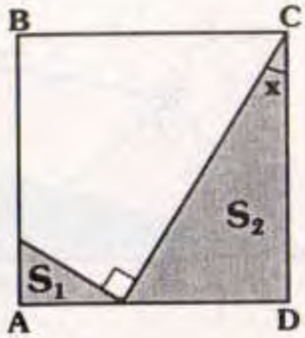
A) 16°

B) 37°

C) 30°

D) 22,5°

E) 26,5°




**PROBLEMA Nº 143**

En el triángulo ABC se traza la mediana BM tal que $m\measuredangle BMA=60°$, si $(BC)^2-(AB)^2=12$. Calcule el área de la región triangular ABC.

A) $3\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{3}$

D) 6 E) 9

**PROBLEMA Nº 144**

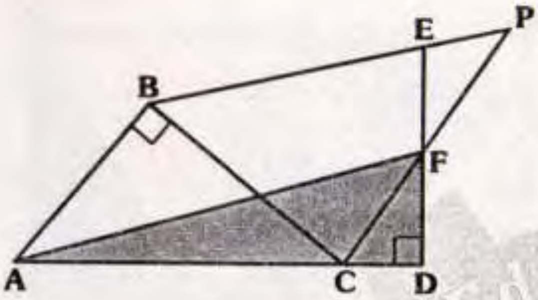
Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica Q en $\overline{AD}$, la mediatriz de $\overline{CQ}$ corta a $\overline{AB}$ en P. Si AQ=m, calcule el área de la región triangular PBC.

A) $m^2$ B) $2m^2$ C) $\frac{m^2}{4}$

D) $\frac{m^2}{2}$ E) $4m^2$

**PROBLEMA Nº 145**

En el gráfico, E es excentro relativo a $\overline{BC}$ del triángulo ABC, si $m\measuredangle EPF = m\measuredangle BCA$, calcule $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADF}}$




A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{4}{3}$

**PROBLEMA Nº 146**

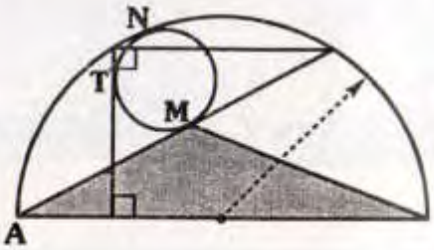
$E_1$ y $E_2$ son los excentros relativos a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, $\overline{E_1E_2}$ interseca a la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$ en el punto M, tal que $E_1M = ME_2 = 4(BM) = 4$, calcule el área de la región triangular ABC.

A) $\frac{36}{5}$ B) 9 C) $\frac{18}{5}$

D) 4 E) $\frac{27}{8}$

**PROBLEMA Nº 147**

Si T, N y M son puntos de tangencia y AM=6 calcule el área de la región sombreada.




A) 12 B) 24 C) 18 D) $6\sqrt{2}$ E) $18\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 148**

Sea el triángulo ABC de inradio r; sea $r_b$ el radio de la semicircunferencia que su diámetro está en $\overline{AC}$ y es tangente a $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$, analogamente se define $r_a$ y $r_c$.

Si $\frac{x}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$. Calcule x.

A) 1 B) 2 C) 3

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

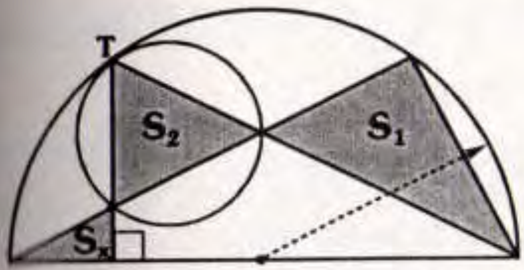
**PROBLEMA Nº 149**

Se tiene el triángulo ABC, se ubica P y Q en $\overline{AC}$ (P en $\overline{AQ}$) tal que $m\measuredangle ABP = m\measuredangle CBQ$, se trazan las circunferencias inscritas en los triángulos ABP y BQC, tangentes a $\overline{AC}$ en M y N respectivamente. Demuestre

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{MP} = \frac{1}{QN} + \frac{1}{NC}$$

**PROBLEMA Nº 150**

En el gráfico, halle $S_x$ en función de $S_1$ y $S_2$ (T es punto de tangencia)




A) $(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2})^2$  B) $\sqrt{S_1S_2}$  C) $S_2^2/S_1$

D) $\frac{(S_1-S_2)^2}{2S_2}$  E) $\frac{(S_1-S_2)^2}{2S_1}$

**PROBLEMA Nº 151**

Dada una región triangular ABC de incentro "I", sea "H" la proyección del excentro relativo a $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$. Luego con centro en "H" se traza el cuadrante CAP, tal que la semicircunferencia de diámetro $\overline{PH}$ contiene a "I". Si IH = 6, calcule el área de la región triangular ABC.

A) 36  B) 18  C) 12

D) 20  E) $6\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 152**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), E es excentro relativo a $\overline{BC}$, se traza la circunferencia de centro C y radio CE, la cual corta a $\overline{AC}$ en M. Si AB=12 y BC=5, calcule el área de la región triangular BMC.

A) $\frac{30}{13}\sqrt{15}$  B) $\frac{18}{13}\sqrt{13}$  C) $\frac{30}{13}\sqrt{13}$

D) $\frac{17}{3}\sqrt{13}$  E) $\frac{17}{13}\sqrt{5}$

**PROBLEMA Nº 153**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las bisectrices interiores $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ secantes en I, si AF=a y EC=b. Calcule la suma de áreas de las regiones triangulares AFI y EIC.

A) ab  B) $\frac{ab}{2}$  C) $\frac{ab}{3}$

D) $\frac{ab}{4}$  E) 2ab

**PROBLEMA Nº 154**

Se tiene el triángulo equilátero ABC, una recta que pasa por el circuncentro y corta a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N. Si BM = a y BN = b, calcule el área de la región triangular ABC.

A) $\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2\sqrt{3}$  B) $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$

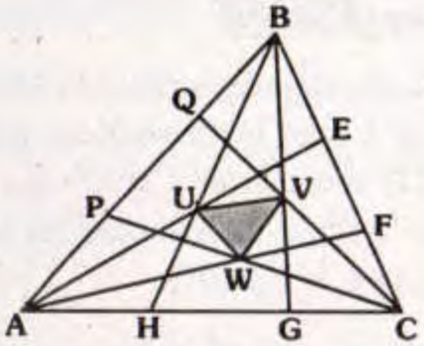
C) $\frac{9\sqrt{3}}{4}\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$  D) $a^2b^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

E) $\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2b^2$

**PROBLEMA Nº 155**

En el gráfico, AP=PQ=QB; BE=EF=FC y AH=HG=GC.

Calcule $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta UVW}}$




A) 9 B) 12 C) 16

D) 25 E) 36

**PROBLEMA Nº 156**

En el gráfico, halle el área de la región sombreada en función de R.

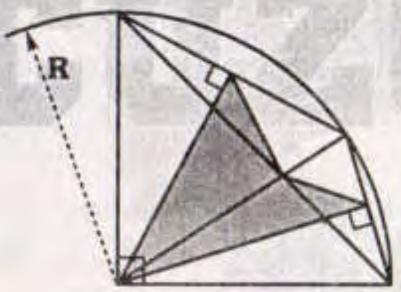
A) $R^2$

B) $R^2\frac{\sqrt{2}}{4}$

C) $R^2\frac{\sqrt{2}}{8}$

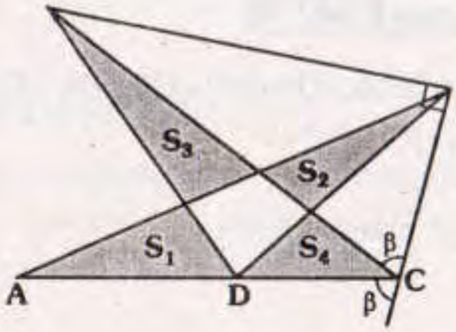
D) $\frac{R^2}{2}$

E) $\frac{R^2}{4}$




**PROBLEMA Nº 157**

En el gráfico, AD = 2(DC). Indique la relación entre las áreas de las regiones indicadas.




A) $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$

B) $S_1S_2 = S_3S_4$

C) $S_4 = S_1 + S_2 + S_3$

D) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

E) $S_1^2 + S_2^2 = S_3^2 + S_4^2$

**PROBLEMA Nº 158**

En el gráfico, M, N y P son puntos de tangencia. Si $\frac{1}{S_{\Delta AMN}} + \frac{1}{S_{\Delta MNC}} = \frac{1}{k}$.

Calcule $S_{\Delta MNP}$

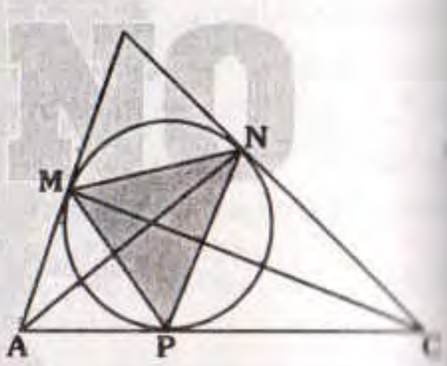
A) k

B) k/2

C) 2k

D) 1,5

E) $k\sqrt{2}$




**PROBLEMA Nº 159**

En el triángulo ABC, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente. Si AM = m, MB = n, NC = $\ell$, y $\frac{1}{mn} + \frac{1}{n\ell} + \frac{1}{m\ell} = 0{,}25$ ; calcule el inradio del triángulo ABC.

A) 1 B) 2 C) 0,25

D) 1,5 E) 4

**PROBLEMA Nº 160**

Sean L, M y N los pies de las perpendiculares del baricentro G del triángulo ABC a los lados BC, AC y AB. Demostrar:

$$S_{\Delta LMN}=\frac{4(S_{\Delta ABC})^3(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$$

## ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

**PROBLEMA Nº 161**

Dado el triángulo ABC, en la prolongación de $\overline{CA}$ y $\overline{BA}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, se trazan $\overline{PH}\perp\overline{BC}$ y $\overline{QM}\perp\overline{BC}$ ($H\in\overline{BM}$ y M en $\overline{HC}$) ; calcule el área de la región PQMH si BH=MH=MC; BQ=6u, PC=8u y $m\sphericalangle BAC=60°$.

A) $10\sqrt{3}u^2$ B) $6\sqrt{3}u^2$ C) $u^2$

D) $12\sqrt{3}u^2$ E) $24\sqrt{3}u^2$

**PROBLEMA Nº 162**

Dado el trapecio ABCD, M es punto medio de $\overline{CD}$ ($\overline{BC}//\overline{AD}$). Calcule el área de la región trapecial ABCD si $(BM)(AM)=20u^2$ ; $m\sphericalangle BCD=120°$ y $m\sphericalangle BMC=m\sphericalangle MAD$

A) $5\sqrt{3}u^2$ B) $20\sqrt{3}u^2$ C) $20\ u^2$

D) $10\sqrt{2}u^2$ E) $10\sqrt{3}u^2$

**PROBLEMA Nº 163**

Se tiene el triángulo ABC, de circuncentro O, ortocentro H y circunradio a, donde $m\sphericalangle BAC=45°$, si la distancia de H hacia $\overline{AB}$ es b, calcule el área de la región BOHC.

A) $2b\sqrt{2a^2-b^2}$ B) $b\sqrt{2a^2-b^2}$

C) $\frac{b}{2}\sqrt{2a^2+b^2}$ D) $\frac{b}{2}\sqrt{2a^2-b^2}$

E) $\frac{b}{3}\sqrt{2a^2-b^2}$

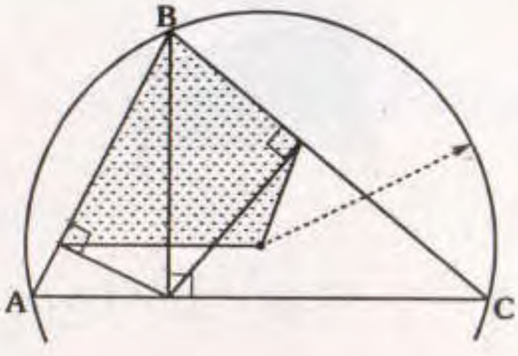
**PROBLEMA Nº 164**

Se tiene el ángulo DOB, se ubica C y A en los lados OD y OB respectivamente. Sea E el punto de intersección de los segmentos AD y BC. Se traza por C la recta paralela a AB y se traza por A la recta paralela a CD. Sea F el punto de intersección de las dos rectas trazadas. Demostrar que

Área(OAEC) = Área(BFDE)

**PROBLEMA Nº 165**

Si el área de la región ABC es S, calcule el área de la región sombreada.

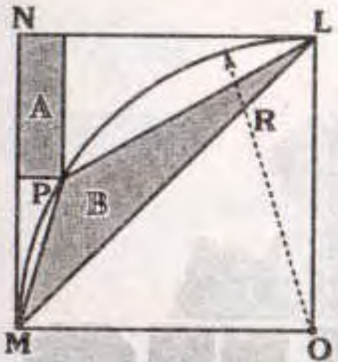


A) S/2 B) S/3 C) S/4

D) $S\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $S\frac{\sqrt{2}}{4}$

**PROBLEMA Nº 166**

Calcule "R", en función de las áreas $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ indicadas, si MNLO es un cuadrado.

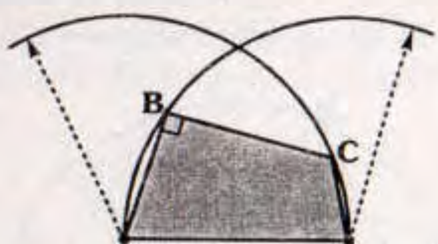



A) $\sqrt{\frac{2\mathbb{A}^2}{\mathbb{B}}}$ B) $\sqrt{\frac{2\mathbb{B}^2}{\mathbb{A}}}$ C) $2\sqrt{\frac{\mathbb{B}^2}{\mathbb{A}}}$

D) $\sqrt{\frac{\mathbb{B}^2}{\mathbb{A}}}$ E) $\sqrt{\frac{\mathbb{A}^2}{\mathbb{B}}}$

**PROBLEMA Nº 167**

En el gráfico, $AB = \sqrt{3}$ y $CD = 1$. Calcule el área de la región sombreada.




A) $6\sqrt{5}$ B) $\frac{7}{2}\sqrt{13}$ C) $6\sqrt{3}$

D) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{7}{4}\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 168**

En el gráfico, AD = 5(AN) y AM = k. Calcule el área de la región rectangular ABCD.

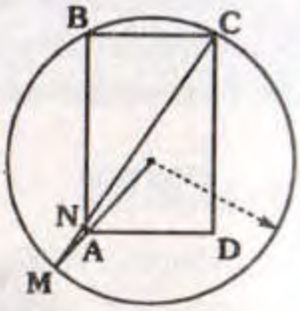
A) $4k^2$

B) $5k^2$

C) $6k^2$

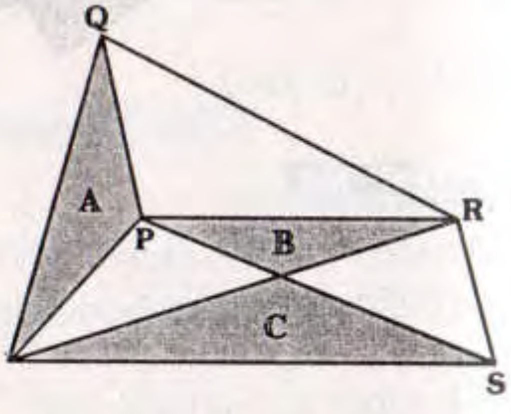
D) $10k^2$

E) $\frac{5}{2}k^2$




**PROBLEMA Nº 169**

En el gráfico, PQRS es un paralelogramo. Si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ son las áreas de las regiones sombreadas, indique la relación entre $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$.




A) $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{C}$ B) $\mathbb{A} - \mathbb{B} = \mathbb{C}$

C) $\mathbb{A}\mathbb{B} = 2\mathbb{C}$ D) $\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \mathbb{C}$

E) $\sqrt{\mathbb{A} + \mathbb{B}} = \mathbb{C}$

**PROBLEMA Nº 170**

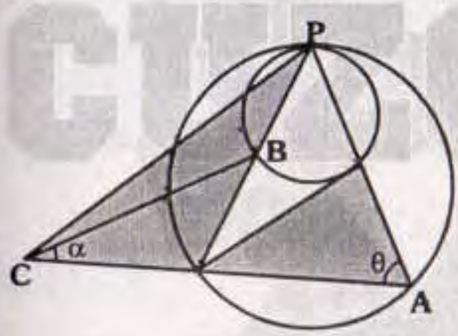
Se tiene el triángulo ABC de baricentro G. Si m∢AGC = 120° y $(AC)^2 - (BG)^2 = 16$. Halle el área de la región cuadrangular no convexa ABGC.

A) $4\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $16\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 171**

En el gráfico, P es punto de tangencia, $\alpha + \theta = 90°$; AP = a y CB = b. Halle la suma de áreas de las regiones sombreadas.




A) ab

B) 2ab

C) $\frac{ab}{2}$

D) $\frac{ab}{4}$

E) $\frac{ab}{4}$

**PROBLEMA Nº 172**

Se tiene el cuadrado ABCD, en la parte interna se traza una circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, se ubica E en $\overline{AB}$ tal que $\overline{EC}$ es tangente a la circunferencia en P. Si m∢PCB = 37° y PC = 7. Halle el área de la región cuadrada ABCD.

A) 36 B) 54 C) 72

D) $36\sqrt{2}$ E) $54\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 173**

En un triángulo ABC (m∢B = 45°) de ortocentro "H", en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q, tal que PBQH es un paralelogramo. Si AC = a, calcule el área de la región APQC.

A) $\frac{a^2}{4}$ B) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{a^2}{2}$ E) $\frac{a^2}{3}$

**PROBLEMA Nº 174**

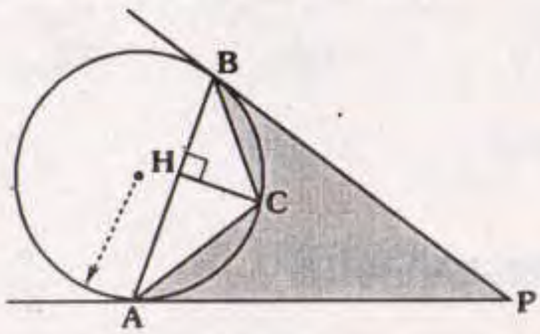
Una de las bases de un trapecio mide 7u y la circunferencia inscrita determina en uno de los lados no paralelos segmentos cuyas longitudes son 4 y 9u. Calcule el área de la región trapecial.

A) $168u^2$ B) $204u^2$ C) $176u^2$

D) $156u^2$ E) $144u^2$

**PROBLEMA Nº 175**

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si AP=a y HC=b. Halle el área mínima de la región sombreada.




A) ab B) $\frac{ab}{2}$ C) $\frac{ab}{4}$

D) $ab\sqrt{2}$ E) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

**PROBLEMA Nº 176**

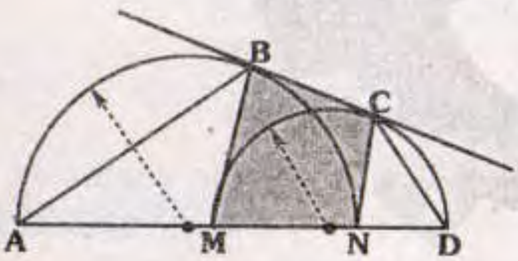
Se tiene el trapecio rectángulo ABCD (recto en A y B). M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, E es un punto de $\overline{AD}$ tal que $m\sphericalangle BEN=90°$, $AM=BC$ y $m\sphericalangle MEB=m\sphericalangle BEC$. Si $(AE)(ED)=16$, calcule el área de la región ABCD.

A) 8 B) 16 C) $16\sqrt{2}$

D) $8\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 177**

En el gráfico, B y C son puntos de tangencia y (AB)(CD) = 16, halle el área de la región MBCN.

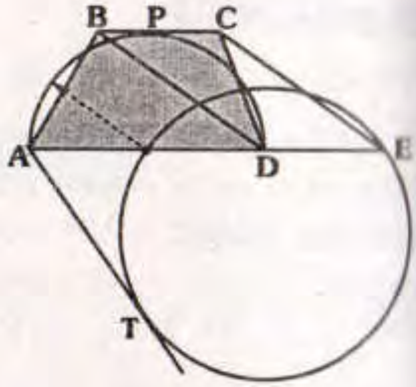



A) 16 B) 8 C) 32

D) $8\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 178**

En el gráfico, P y T son puntos de tangencia y DBCE es un paralelogramo. Si AT=6, halle el área de la región sombreada.




A) 18

B) 20

C) 24

D) 36

E) 9

**PROBLEMA Nº 179**

Se tiene el paralelogramo ABCD en $\overline{AB}$ se ubica el punto M, $\overline{MC}\cap\overline{BD}=\{N\}$, si las áreas de las regiones BCN y NCD son $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$. Halle el área de la región triangular MAD en función de $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$.

A) $\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2$ B) $\sqrt{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2}$ C) $2\sqrt{\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2}$

D) $\dfrac{\mathbb{A}_2^2-\mathbb{A}_1^2}{\mathbb{A}_2}$ E) $\dfrac{\mathbb{A}_2^2-\mathbb{A}_1^2}{\mathbb{A}_1}$

**PROBLEMA Nº 180**

En el pentágono ABCDE se cumple que las regiones triangulares ABC, BCD, CDE, DEA y EAB son equivalentes, si $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ cortan a $\overline{BE}$ en M y N respectivamente. Halle BM/NE.

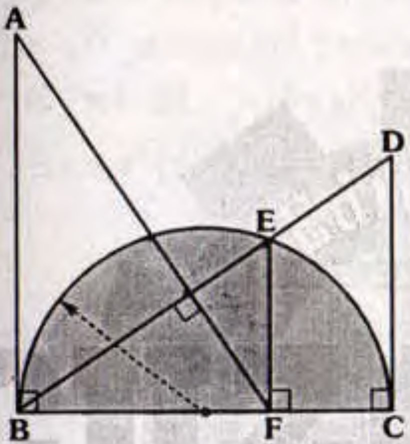
A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

## ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

### PROBLEMA Nº 181

En el gráfico, AB = a, EF = b y DC = c, calcule el área del semicírculo.




A) $\frac{ab^2}{c}\pi$

B) $\frac{\sqrt{ab}}{c}\pi$

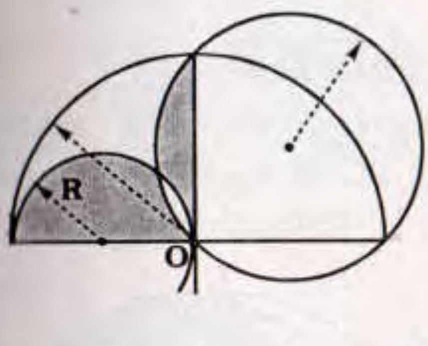
C) $\frac{ac^2}{8b}\pi$

D) $\frac{bc^2}{8a}$

E) $\frac{\sqrt{bc}}{a}\pi$

### PROBLEMA Nº 182

En el gráfico, O es punto de tangencia. Halle la diferencia de áreas de las regiones sombreadas.

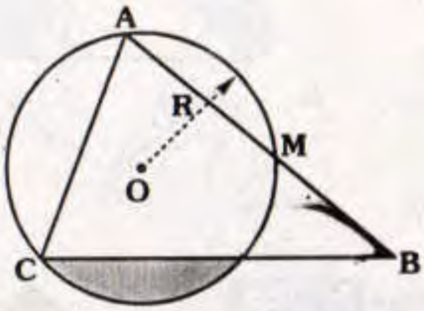



A) $\frac{3}{7}R^2$ B) $\frac{1}{4}R^2$ C) $\frac{1}{2}R^2$

D) $R^2$ E) $2R^2$

### PROBLEMA Nº 183

En el gráfico, O es ortocentro del triángulo ABC, 3(AM)=2(BM) y R=5. Calcule el área de la región sombreada.




A) $37\pi-4$ B) $4\sqrt{3}\pi-3$

C) $2\sqrt{3}\pi-3$ D) $\frac{185}{36}\pi-12$

E) $\frac{185}{18}\pi-8$

### PROBLEMA Nº 184

En el triángulo acutángulo ABC, con centro en B se traza el arco de circunferencia que contiene al circuncentro y ortocentro de dicho triángulo el cual corta a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N. Si AC = b, calcule el área del sector circular MBN.

A) $\frac{\pi}{3}b^2$ B) $\frac{\pi}{6}b^2$ C) $\frac{\pi}{12}b^2$

D) $\frac{\pi}{16}b^2$ E) $\frac{\pi}{18}b^2$

### PROBLEMA Nº 185

En el gráfico, ABCD es un cuadrado, calcule la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.

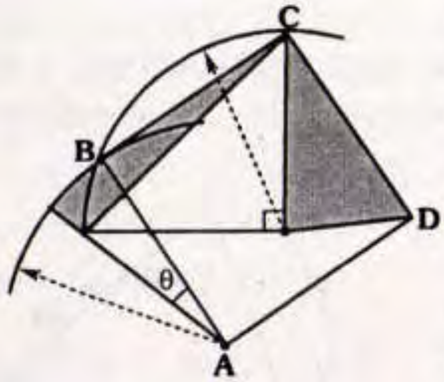
A) $\pi\dfrac{\theta}{180°}$

B) $\pi\dfrac{\theta}{270°}$

C) $\pi\dfrac{\theta}{90°}$

D) $\pi\dfrac{\theta}{135°}$

E) $\pi\dfrac{\theta}{143°}$




**PROBLEMA Nº 186**

En el gráfico, A es punto de tangencia calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.

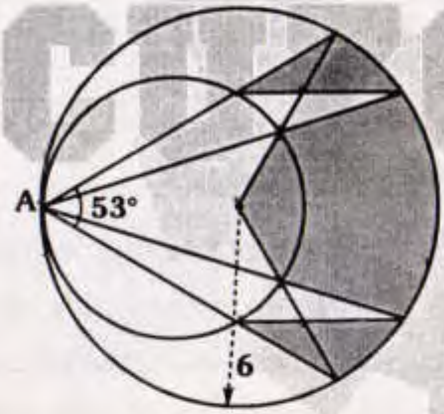
A) $\dfrac{53}{3}\pi$

B) $\dfrac{53}{4}\pi$

C) $\dfrac{53}{10}\pi$

D) $\dfrac{53}{5}\pi$

E) $\dfrac{53}{8}\pi$




**PROBLEMA Nº 187**

En el gráfico, AB=4; BC=AE=2 y ED=10. Calcule $\dfrac{S_1}{S_2}$.

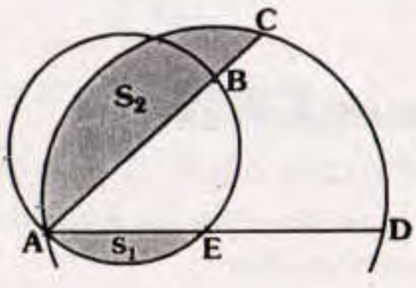
A) 4

B) 2

C) 3

D) 9

E) 6




**PROBLEMA Nº 188**

En un triángulo rectángulo ABC, m∢B = 90° y m∢C = 53°, se tiene la circunferencia inscrita de centro "O" tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. Se traza la secante AST que contiene al centro. Si la diferencia entre el semiperímetro del triángulo ABC y BC es 12, calcule el área de la región limitada por la circunferencia y las cuerdas $\overline{PQ}$ y $\overline{ST}$.

A) $2(\pi+4)$ B) $4(\pi-2)$ C) $6(\pi+3)$

D) $8(\pi+4)$ E) $4(\pi+2)$

**PROBLEMA Nº 189**

Halle la razón entre las áreas de las regiones sombreadas, si ABCD es un cuadrado.

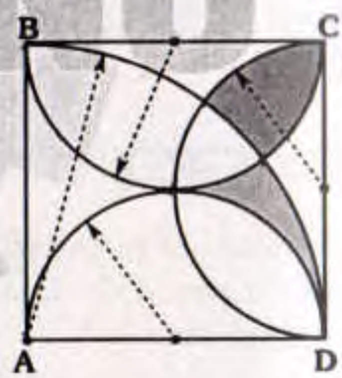
A) π

B) π/3

C) 1/3

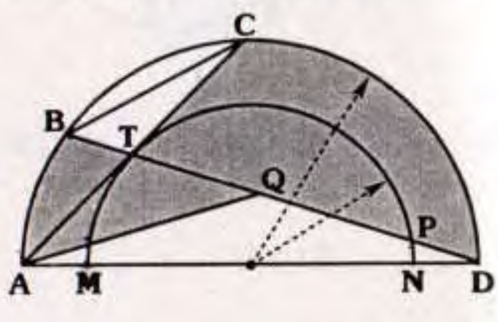
D) 1/2

E) 1




**PROBLEMA Nº 190**

En la figura, T es punto de tangencia, TQ=QP, BC=6 y $m\widehat{TP} = 120°$, calcule el área de la región sombreada.

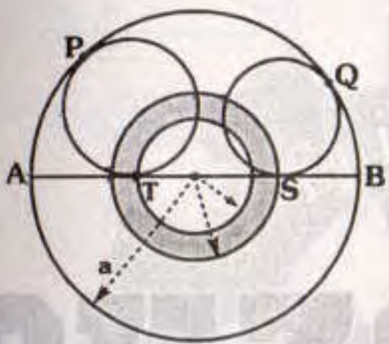


A) 6π B) 9π C) 12π

D) 15π E) 18π

**PROBLEMA Nº 191**

En el gráfico, $m\widehat{AP} = 53°$ y $m\widehat{BQ} = 37°$. Si a = 72, calcule el área de la región sombreada.(T y S son puntos de tangencia)




A) 600π

B) 400π

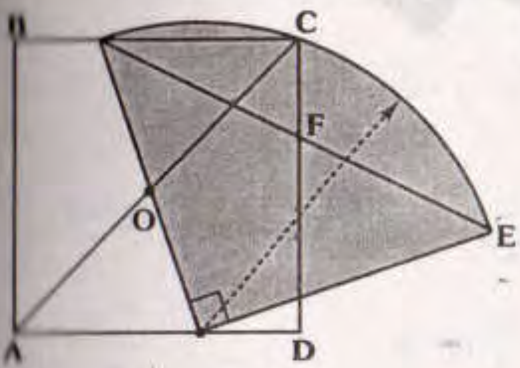
C) 500π

D) 480π

E) 720π

**PROBLEMA Nº 192**

En el gráfico, O es centro del cuadrado ABCD, si EF = a, halle el área de la región sombreada.

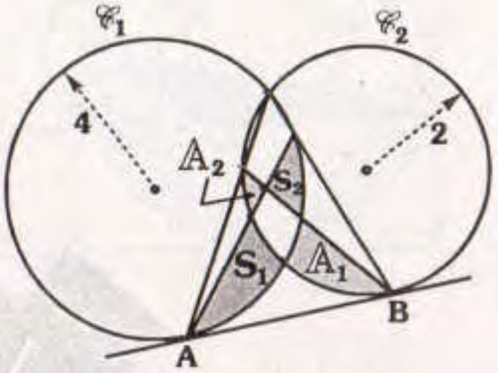



A) $\frac{\pi a^2}{8}$ B) $\frac{\pi a^2}{6}$ C) $\frac{\pi a^2}{4}$

D) $\frac{\pi a^2}{2}$ E) $\frac{\pi a^2}{5}$

**PROBLEMA Nº 193**

En el gráfico $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales, A y B son puntos de tangencia. Halle: $S_1 - \mathbb{A}_1 + S_2 - \mathbb{A}_2$.

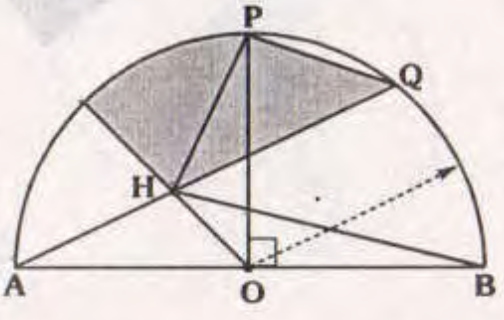



A) $2(\pi-1)$ B) $\pi-2$ C) $2(\pi-2)$

D) $4(\pi-1)$ E) $3(\pi-2)$

**PROBLEMA Nº 194**

En el gráfico, $m\sphericalangle HPO = m\widehat{PQ} = 30°$ y la distancia de P a $\overline{HB}$ es 2u, calcule el área de la región sombreada.

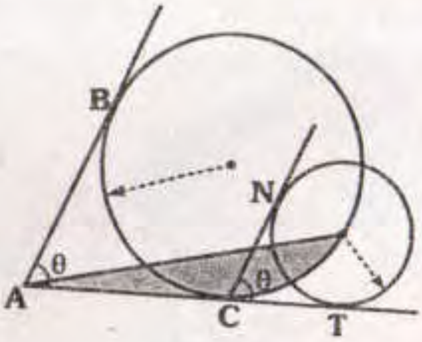



A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) $\frac{3}{2}\pi$ D) $\frac{3}{4}\pi$ E) 2π

**PROBLEMA Nº 195**

En el gráfico, B, C, N y T son puntos de tangencia. Si AC = 2(CT) = $2\sqrt{3}$. Cal-

cule el área de la región sombreada.

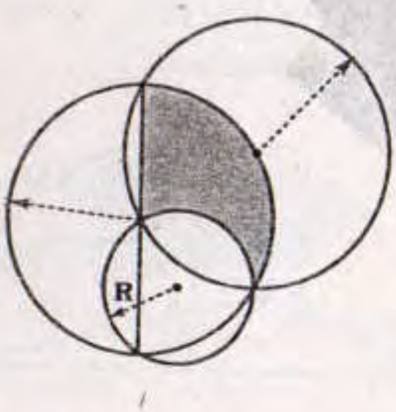



A) $\frac{4}{3}\pi$  B) $\pi-2$  C) $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{2}{3}\pi$  E) $\frac{3\pi-\sqrt{3}+2}{4}$

**PROBLEMA Nº 196**

En el gráfico, $R=2\sqrt{3}$, halle el área de la región sombreada.



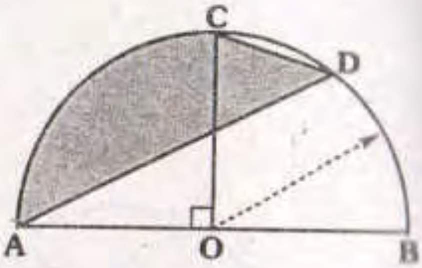

A) $8\sqrt{3}+3\pi$  B) $4\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

C) $8\pi+3\sqrt{3}$  D) $8\pi+\sqrt{3}$

E) $8\pi-3\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 197**

En la figura el área de la región sombreada es igual a la suma de las áreas de las regiones no sombreadas. Calcule $m\overset{\frown}{BD}$




A) 30°  B) 60°  C) 45°

D) 72°  E) 36°

**PROBLEMA Nº 198**

Se tiene una circunferencia de centro O y radio R, $\overline{AB}$ es una cuerda, M está en $\overline{AB}$ tal que $m\measuredangle OMA=45°$, la prolongación de $\overline{MO}$ corta a la circunferencia en N. Si $AB = \sqrt{2}(MN)$. Halle el área del menor segmento circular AN.

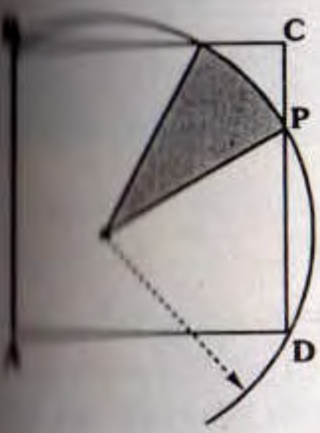
A) $R^2(\pi-\sqrt{2})$  B) $\frac{R^2}{6}(\pi-2)$

C) $\frac{R^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$  D) $\frac{R^2}{12}(\pi-3)$

E) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$

**PROBLEMA Nº 199**

En el gráfico PD = 6(PC), calcule la razón entre las áreas de la región sombreada y la región cuadrada ABCD.

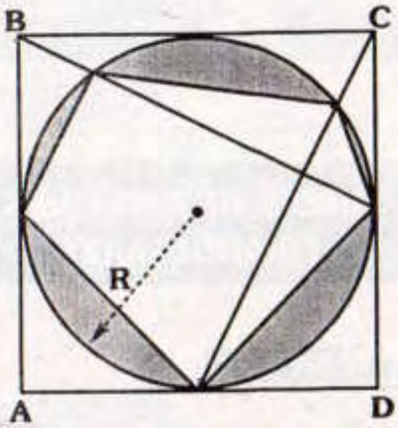



A) $\frac{10}{441}\pi$  B) $\frac{5}{441}\pi$  C) $\frac{5}{221}\pi$

D) $\frac{10}{221}\pi$  E) $\frac{16}{441}\pi$

**PROBLEMA Nº 200**

En el gráfico, se muestra la circunferencia inscrita el cuadrado ABCD, halle la suma de áreas de las regiones sombreadas.




A) $\frac{R^2}{5}(5\pi-11)$  B) $\frac{R^2}{10}(10\pi-11)$

C) $\frac{R^2}{5}(10\pi-11)$  D) $\frac{R^2}{5}(5\pi-8)$

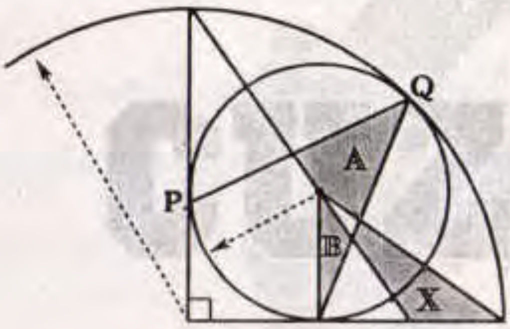
E) $\frac{R^2}{10}(5\pi-11)$

❖❖❖❖❖

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

**PROBLEMA Nº 201**

Si P, Q y T son puntos de tangencia, calcule $\mathbb{X}$ en función de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$.




A) $\mathbb{A}-\mathbb{B}$ B) $\frac{2\mathbb{A}+\mathbb{B}}{2}$ C) $\frac{\mathbb{A}+2\mathbb{B}}{2}$

D) $\frac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{2}$ E) $2\mathbb{A}-\mathbb{B}$

**PROBLEMA Nº 202**

Dado el triángulo rectángulo isósceles ABC (recto en C). Sea P en BC, M es el punto medio de AB y sea L y N puntos del segmento $\overline{AP}$ tal que $\overline{CN}$ es perpendicular a $\overline{AP}$ y AL=CN. Si el área ABC es 4 veces el área de LMN. Calcule $m\sphericalangle CAP$.

A) 15° B) 30° C) 45°

D) 22,5° E) 18°

**PROBLEMA Nº 203**

En el triángulo ABC se trazan la mediana AM y las cevianas BD y CE concurrentes en P, si los inradios de los triángulos BEP y CDP son iguales. Calcule AB/AC.

A) 1 B) 0,5 C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 204**

El triángulo ABC tiene $m\sphericalangle ACB=120°$ y el lado AC mayor que el lado BC. Sabiendo que el área del triángulo equilátero de lado AB es 31 y el área del triángulo equilátero de lado AC–BC es 19, hallar el área de ABC.

A) 3 B) 4 C) 6

D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 205**

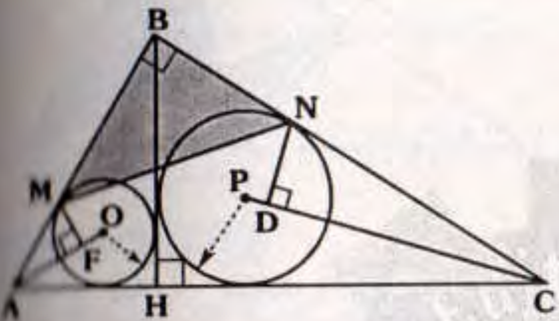
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AD; se ubican M y N en las prolongaciones de $\overline{CA}$ y $\overline{BA}$ tal que $\overline{MB}//\overline{AD}//\overline{NC}$. Si el área de la región triangular ABC es $\mathbb{A}$. Calcule el área de la región MDN.

A) $\mathbb{A}$ B) $2\mathbb{A}$ C) $3\mathbb{A}$

D) $\frac{3}{2}\mathbb{A}$ E) $4\mathbb{A}$

**PROBLEMA Nº 206**

En el gráfico, se muestran las circunferencias inscritas en los triángulos AHB y BHC. Si (AO)(AF)(PC)(CD) = k, calcule el área de la región sombreada.




A) $\sqrt{k}$ B) $\dfrac{\sqrt{k}}{2}$ C) $2\sqrt{k}$

D) $\dfrac{\sqrt{k}}{4}$ E) $\sqrt{\dfrac{k}{2}}$

**PROBLEMA Nº 207**

En un triángulo ABC: $r_a$, $r_b$ y $r_c$ son las medidas de los exradios.

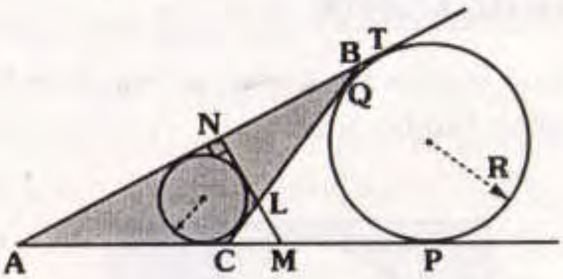
Si $r_a.r_b + r_a.r_c + r_b.r_c = 100$, calcule el perímetro del triángulo.

A) 10 B) $10\sqrt{2}$ C) 20

D) 50 E) 25

**PROBLEMA Nº 208**

En la figura se muestra la circunferencia inscrita en el cuadrilátero ANLC, además P, Q y T son puntos de tangencia. Si la m∢BAC = 37° y R(AM) = 25, calcule el área de la región sombreada.




A) 2 B) 10 C) 15

D) 20 E) 18

**PROBLEMA Nº 209**

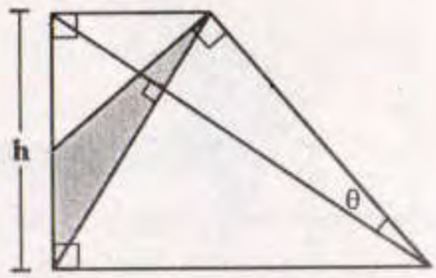
Se tiene el triángulo ABC (AB = BC), P es un punto de la región exterior relativa a $\overline{BC}$, tal que m∢ABC = 2(m∢BPA), m∢PAC = 15° y AB = 8. Calcule el área de la región triangular APC.

A) 8 B) 16 C) 24

D) $8(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ E) $16(8-\sqrt{2})$

**PROBLEMA Nº 210**

Halle el área de la región sombreada en función de h y θ.

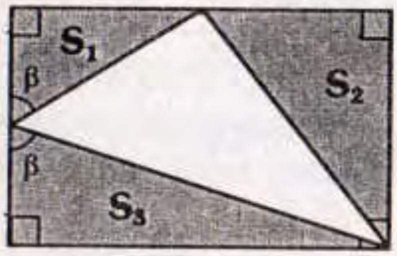



A) $h^2 \text{sen}\theta$ B) $h^2 \text{tg}\theta$ C) $\dfrac{h^2 \text{tg}\theta}{2}$

D) $h^2 \cos\theta$ E) $\dfrac{h^2 \text{sen}\theta}{2}$

**PROBLEMA Nº 211**

Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



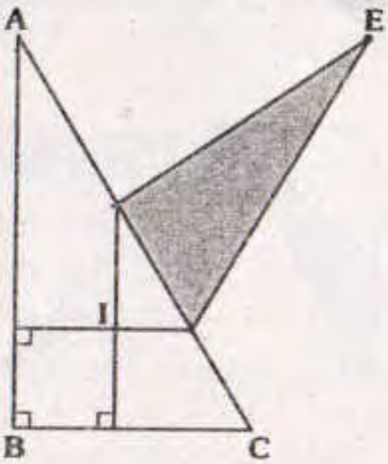

A) $S_3 = S_1 + S_2$ B) $S_3 = \sqrt{S_1S_2}$

C) $S_3^2 = S_1^2 + S_2^2$ D) $2S_3 = S_1 + S_2$

E) $2S_3 = \sqrt{S_1S_2}$

**PROBLEMA Nº 212**

En el gráfico, I es incentro y E es uno de los excentros del triángulo ABC. Si AC=k, calcule el área de la región sombreada.

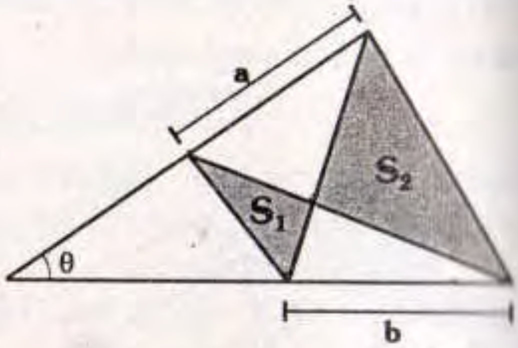



A) $k^2$ B) $2k^2$ C) $0{,}5k^2$

D) $0{,}25k^2$ E) $4k^2$

**PROBLEMA Nº 213**

Calcule $S_2$ - $S_1$ en función de a, b y θ.

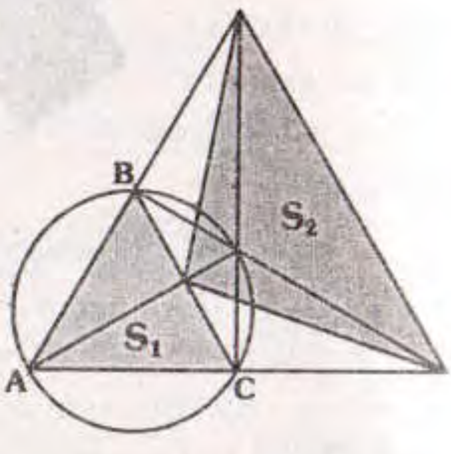



A) absenθ B) abtgθ C) absen2θ

D) $\frac{ab}{2}$senθ E) $\frac{ab}{2}$sen2θ

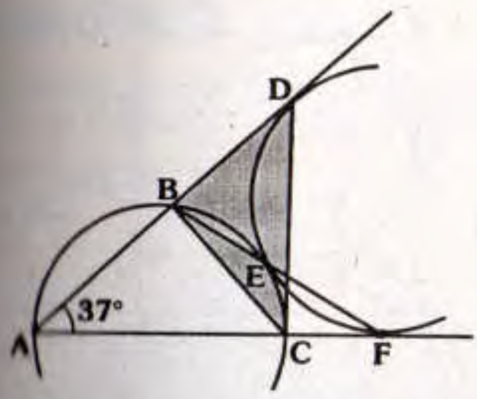
**PROBLEMA Nº 214**

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, demuestre que $S_2 = 2S_1$.




**PROBLEMA Nº 215**

En el gráfico, D, E y F son puntos de tangencia y AB = 10. Calcule el área de la región sombreada.

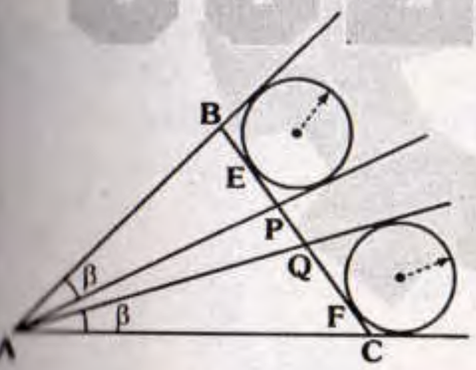



A) 40 B) 20 C) 30 D) 24 E) 48

**PROBLEMA Nº 216**

En el gráfico, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son las circunferencias exinscritas en los triángulos ABP y AQC.

Si $\frac{1}{BE}+\frac{1}{EP}=k$. Calcule: $\frac{1}{QF}+\frac{1}{FC}$




A) k B) k/2 C) 2k D) k/4 E) k/3

**PROBLEMA Nº 217**

En el triángulo ABC, se cumple que AB=c, BC=a y AC=b, si $S_{ABC}=\frac{(p-a)(p-c)+p(p-a)}{4}$ donde **p** es el semiperímetro. Calcule m∢ABC.

A) 30° B) 60° C) 45° D) 90° E) 53°

**PROBLEMA Nº 218**

Se tiene el triángulo ABC, se ubica P y Q en $\overline{BC}$ y Q en $\overline{PC}$, S y M en $\overline{AC}$ tal que S∈$\overline{AM}$. Si AM=MC, $\overline{SP}//\overline{MQ}$, las regiones ABPS y SPC son equivalentes, BC=a y QC=b. Calcule PC.

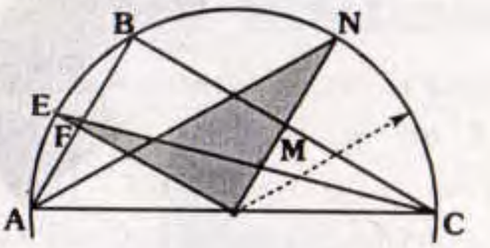
A) $\sqrt{ab}$ B) $\frac{a+b}{2}$

C) $\sqrt{a^2+b^2}$ D) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$

E) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$

**PROBLEMA Nº 219**

En el gráfico, $\overline{EF}$ y $\overline{MN}$ son flechas de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si EF=1, MN=7. Calcule el área de la región sombreada.




A) 26 B) 52 C) 40 D) 50 E) 60

**PROBLEMA Nº 220**

Se tiene el pentágono ABCDE convexo, tal que AB=BC, CD=DE, m∢ABC=120° y m∢CDE=60°. Si BD=2, calcule el área de la región pentagonal ABCDE.

A) $4\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) 4

D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

## ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

### PROBLEMA Nº 221

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), tal que AB=3 y BC=4, la circunferencia exinscrita respecto a $\overline{AB}$ es tangente a $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ en P y Q respectivamente, mientras que la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$ es tangente a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{AC}$ en N $\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{E\}$ y $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{MN} = \{F\}$. Calcule el área de la región cuadrangular EACF.

A) 6  B) $6\sqrt{2}$  C) 12

D) 8  E) $8\sqrt{2}$

### PROBLEMA Nº 222

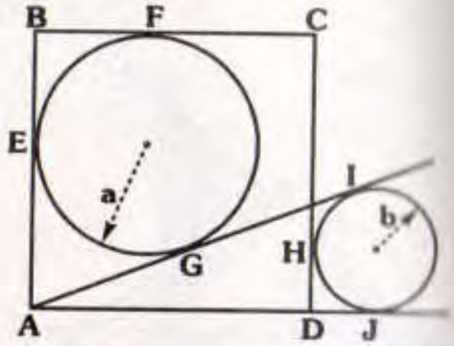
Se tiene el paralelogramo ABCD se ubica E en $\overline{BC}$ y F en $\overline{AD}$, tal que $\overline{EF} // \overline{AB}$ y $\overline{EF} \cap \overline{BD} = \{L\}$. Si $S_{\triangle ABLF}=16$ y $S_{\triangle LECD}=21$. Calcule el área de la región ABCD.

A) 60  B) 50  C) 44

D) 70  E) 80

### PROBLEMA Nº 223

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y a=2(b)=4. Calcule el área de la región ABCD (E, F, G, H, I y J: puntos de tangencia)




A) $8(3+2\sqrt{2})$  B) $16(3+2\sqrt{2})$

C) $32(3+2\sqrt{2})$  D) $8(\sqrt{2}+1)$

E) $16(\sqrt{2}+1)$

### PROBLEMA Nº 224

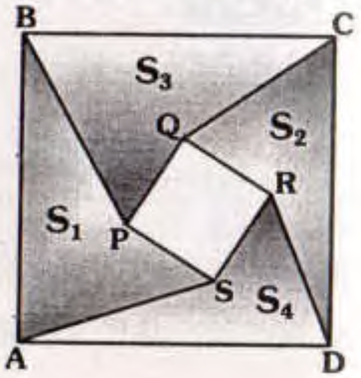
Se tiene el triángulo CED inscrito en la circunferencia de centro O. Las mediatrices de $\overline{EC}$ y $\overline{ED}$ cortan a $\overline{ED}$ y $\overline{EC}$ en B y A respectivamente, $\overline{EM}$ es diámetro, si $m\overset{\frown}{CD}=60°$ y AB=3. Calcule el área de la región MBOA.

A) $5\sqrt{3}$  B) $6\sqrt{3}$  C) $4\sqrt{3}$

D) $9\sqrt{3}$  E) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$

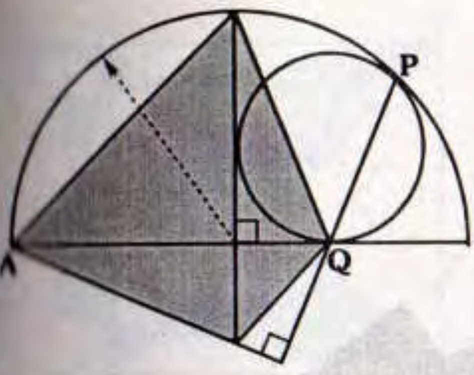
### PROBLEMA Nº 225

En el gráfico, ABCD y PQRS son cuadrados. Demuestre que $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$



**PROBLEMA Nº 226**

Según el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si AQ = a, calcule el área de la región sombreada.




A) $a^2$ B) $\frac{a^2}{2}$ C) $2a^2$

D) $\frac{a^2}{4}$ E) $\frac{a^2}{3}$

**PROBLEMA Nº 227**

En el gráfico, calcule la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.

A) $\text{sen}2\theta$

B) 1

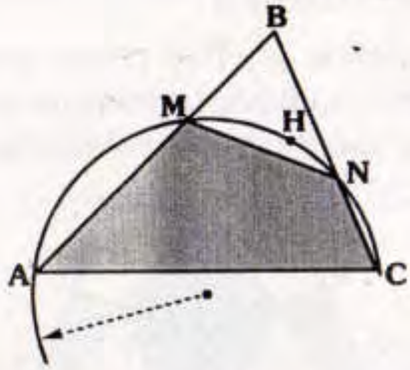
C) 1/2

D) $\text{tg}\theta$

E) $\text{sen}\theta$

**PROBLEMA Nº 228**

En el gráfico, $m\widehat{MN} = 2\beta$ y H es ortocentro del triángulo ABC, calcule la razón de áreas de las regiones AMNC y ABC.




A) $2\cos\beta + 2$ B) $2\cos\beta + 1$

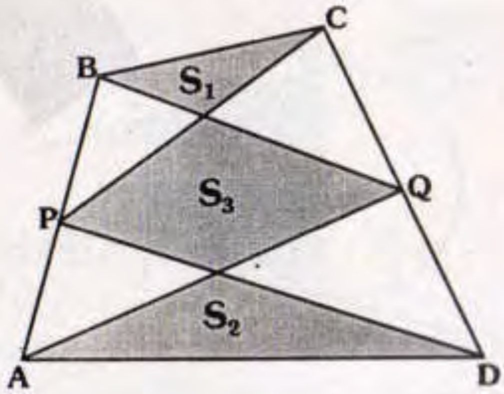
C) $2\cos\beta$ D) $2\cos\beta - 1$

E) $\cos 2\beta$

**PROBLEMA Nº 229**

En el gráfico, $S_1$, $S_2$ y $S_3$ son las áreas de las regiones sombreadas. Si $(AP)(QD) = (PB)(CQ)$ , demuestre :

$$S_3 = S_1 + S_2.$$

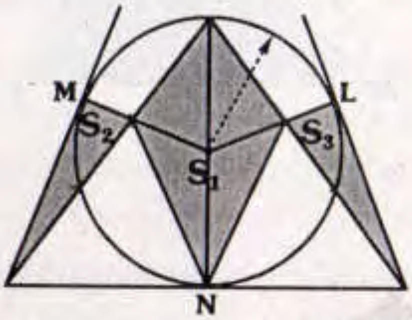



**PROBLEMA Nº 230**

Se tiene una región cuadrangular inscrita en una circunferencia, cuya área es $\mathbb{A}$ y semiperímetro p. Demuestre $4\mathbb{A} \leq p^2$ .

**PROBLEMA Nº 231**

En el gráfico, M, N y L son puntos de tangencia. Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



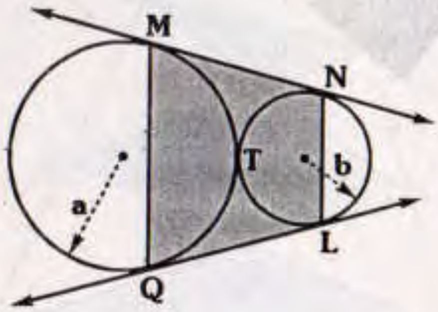

A) $S_1 = S_2 + S_3$ B) $S_1 = 2(S_2 + S_3)$

C) $S_1^2 = S_2S_3$ D) $S_1^2 = S_2^2 + S_3^2$

E) $S_1 = \dfrac{S_2S_3}{S_2 + S_3}$

**PROBLEMA Nº 232**

En el gráfico, M, N, L, Q y T son puntos de tangencia. Calcule el área de la región sombreada.



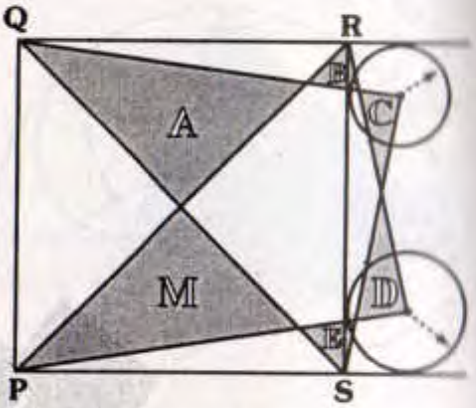

A) $\dfrac{ab\sqrt{ab}}{a+b}$ B) $\dfrac{ab}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}$

C) $\dfrac{4ab\sqrt{ab}}{a+b}$ D) $\dfrac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}$

E) $\dfrac{8ab\sqrt{ab}}{a+b}$

**PROBLEMA Nº 233**

En el gráfico, PQRS es un cuadrado, halle la relación entre las áreas de las regiones sombreadas indicadas.




A) $\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}=\mathbb{D}+\mathbb{E}+\mathbb{M}$

B) $\mathbb{A}+\mathbb{E}+\mathbb{D}=\mathbb{M}+\mathbb{B}+\mathbb{C}$

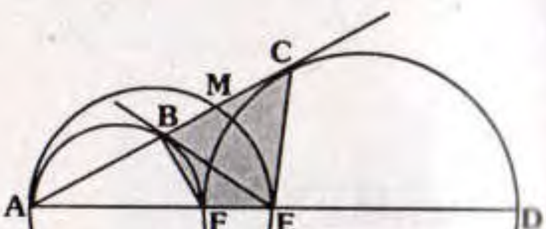
C) $\mathbb{A}+\mathbb{C}+\mathbb{E}=\mathbb{M}+\mathbb{B}+\mathbb{D}$

D) $\mathbb{A}+\mathbb{M}=2(\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}+\mathbb{E})$

E) $\mathbb{A}+\mathbb{M}=\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}+\mathbb{E}$

**PROBLEMA Nº 234**

En el gráfico, A, B, C y F son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{CD}$, BF = 5 y EC = 7. Calcule el área de la región sombreada.




A) $8\sqrt{3}$ B) $16\sqrt{3}$ C) $20\sqrt{3}$

D) $14\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 235**

En el gráfico, E, F y G son puntos de tangencia. Si $\frac{(AB)(CD)}{(BC)(AD)} = a$. Calcule LS.

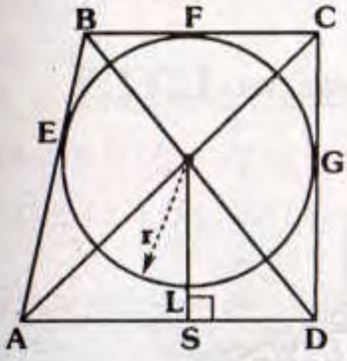
A) ar

B) (a - 1)r

C) (a - 2)r

D) 3(a - 1)r

E) 2(a - 1)r




**PROBLEMA N° 236**

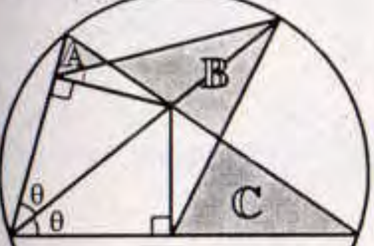
Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, la circunferencia inscrita de centro I es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente. La prolongación de PI corta a $\overline{AC}$ en F y la prolongación de $\overline{QI}$ corta a $\overline{AC}$ en E. Halle $\frac{S_{\square EPQF}}{S_{\Delta ABC}}$

A) 1 B) 1/2 C) $\sqrt{2}/2$

D) $\sqrt{2}/4$ E) $\sqrt{3}/4$

**PROBLEMA N° 237**

En el gráfico, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ son las áreas de las regiones sombreadas. Demostrar que $\mathbb{B} = \mathbb{A} + \mathbb{C}$.




**PROBLEMA N° 238**

En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si el cuadrilátero ABCD es circunscriptible, AB=12, CD=6 y BC=8. Calcule el área de la región ABCD.

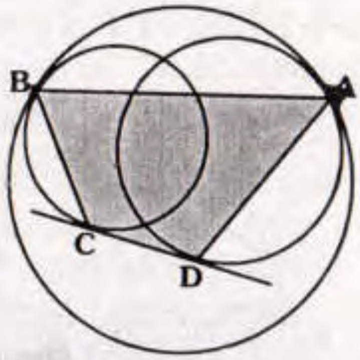
A) $24\sqrt{10}$

B) $12\sqrt{10}$

C) $6\sqrt{10}$

D) $18\sqrt{10}$

E) $36\sqrt{10}$




**PROBLEMA N° 239**

En el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica los puntos M y N en $\overline{AB}$ tal que AM=MN=NB y los puntos P y Q en $\overline{CD}$ tal que CP=PQ=QD. Halle $\frac{S_{\square AMCP}}{S_{\square MNPQ}}$

A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3

D) 1/5 E) 1

**PROBLEMA N° 240**

Se tiene el cuadrilátero ABCD, tal que $m\sphericalangle ABC = 90°$, $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle BDC$, $m\sphericalangle DBC = m\sphericalangle ACD + m\sphericalangle ADC$, AC=BD y CD=3. Calcule el área de la región cuadrangular ABCD.

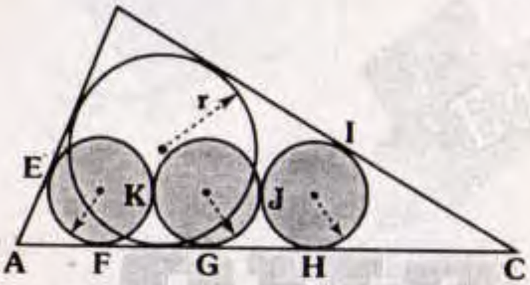
A) $2\sqrt{3}$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{7}{4}\sqrt{3}$

# ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

**PROBLEMA Nº 241**

En el gráfico, los círculos sombreados son congruentes, $\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita y E, F, G, H, I, J y K son puntos de tangencia. Si AC = 8 y r = 1, halle el área de uno de los círculos sombreados.




A) $\pi$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{9}$

D) $\frac{2}{3}\pi$ E) $\frac{4}{9}\pi$

**PROBLEMA Nº 242**

Sobre los lados AB y BC del triángulo ABC se construyen exteriormente los cuadrados ABPQ y BNMC, de centros $O_1$ y $O_2$ respectivamente. Calcule la razón de áreas de los círculos inscritos en los triángulos $O_1BO_2$ y ABN.

A) 1 B) 1/2 C) 1/3

D) 2/5 E) 1/4

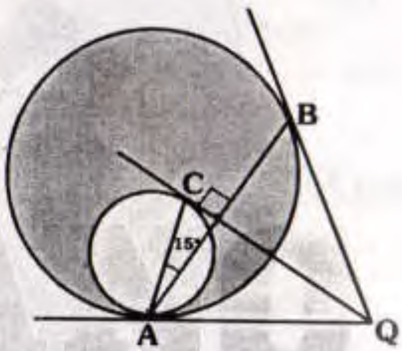
**PROBLEMA Nº 243**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), $m\sphericalangle BAC = 30^\circ$, con centro en C y radio CB se traza el arco de circunferencia que corta a AC en D. Calcule el área del círculo inscrito en el triángulo mixtilíneo ABD, si $BC = 7 + 4\sqrt{3}$.

A) $9\pi$ B) $16\pi$ C) $12\pi$ D) $4\pi$ E) $5\pi$

**PROBLEMA Nº 244**

En el gráfico A, B y C son puntos de tangencia. Si $AQ = 3 + 2\sqrt{3}$.



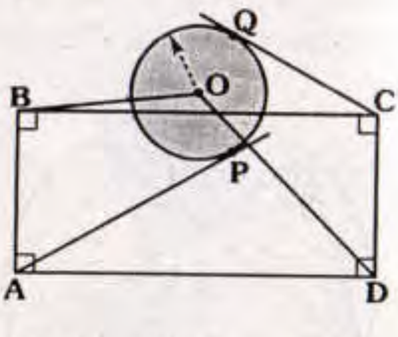

A) $2\pi(2+\sqrt{3})$ B) $(2+\sqrt{3})\pi$

C) $2(5+2\sqrt{3})\pi$ D) $4\pi(\sqrt{3}+1)$

E) $3\sqrt{3}\pi$

**PROBLEMA Nº 245**

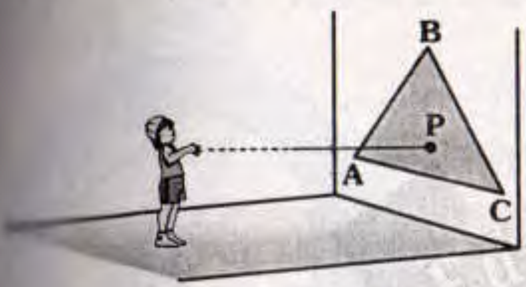
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia, si $(OB)^2 + (OD)^2 - (AP)^2 - (CQ)^2 = 8$. Calcule el área de la región sombreada.




A) $2\pi$ B) $4\pi$ C) $5\pi$ D) $6\pi$ E) $8\pi$

**PROBLEMA Nº 246**

En el gráfico, se muestra a Miguelito lanzando dardos sobre la placa triangular equilátera ABC. Si todos los dardos caen en la región interior, calcule la probabilidad que con los lados PA, PB y PC se forme un triángulo no acutángulo.




A) $\frac{\sqrt{3}}{9}(2\pi-3\sqrt{3})$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}(2\pi-3\sqrt{3})$

C) 1 D) $\frac{1}{6}(\pi\sqrt{3}-3)$

E) $\frac{\sqrt{3}}{4}(2\pi-3\sqrt{3})$

**PROBLEMA Nº 247**

En el gráfico, B y T son puntos de tangencia. Si $m\widehat{TP}=60°$ y $AC=2\sqrt{3}$. Calcule el área de la región sombreada.

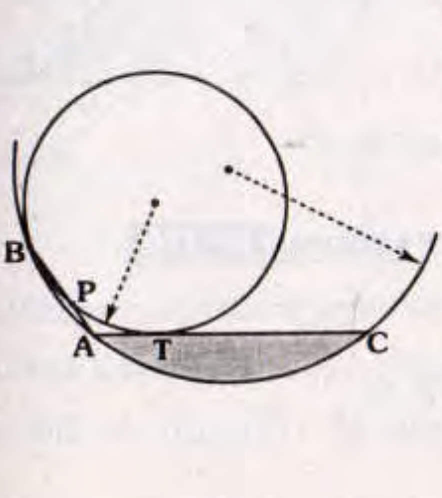
A) $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

B) $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

C) $\frac{5}{3}\pi-\sqrt{3}$

D) $\pi-\sqrt{3}$

E) $2\pi-\sqrt{3}$




**PROBLEMA Nº 248**

Se tienen tres círculos $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ secantes dos a dos y con un punto común y congruentes de radio r. Si: $\mathbb{A}_{(\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_2)}=53\pi$; $\mathbb{A}_{(\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_3)}=49\pi$; $\mathbb{A}_{(\mathscr{C}_2\cap\mathscr{C}_3)}=47\pi$ y $A_{(\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2\cup\mathscr{C}_3)}=823\pi$. Halle r.

A) 18 B) 19 C) 23 D) 29 E) 31

**PROBLEMA Nº 249**

Se tiene el hexágono regular ABCDEF inscrito en una circunferencia de centro O y radio R, con centro en el vértice A se trazan los arcos BO y CLE respectivamente. Calcule el área de la región limitada por $\overline{BC}$, $\widehat{CLE}$, $\overline{EO}$ y $\widehat{BO}$.

A) $\frac{1}{6}\pi R^2$ B) $\frac{1}{4}\pi R^2$ C) $\frac{1}{3}\pi R^2$

D) $\pi R^2$ E) $2\pi R^2$

**PROBLEMA Nº 250**

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $m\measuredangle BAE=45°$ y $DE=\sqrt{8-4\sqrt{3}}$. Halle el área de la región sombreada.

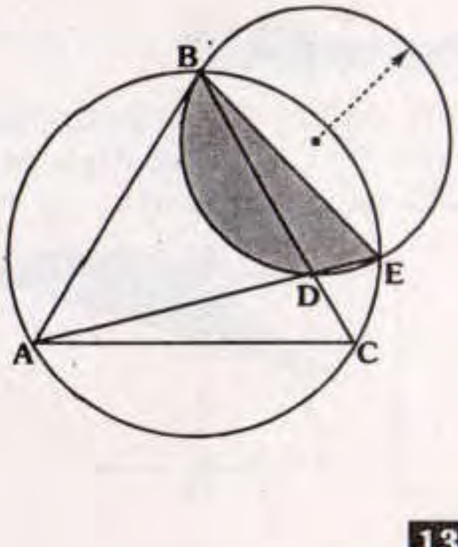
A) $\frac{4}{3}\pi$

B) $\frac{2}{3}\pi$

C) $\frac{3}{4}\pi$

D) $\frac{5}{3}\pi$

E) $2\pi$



**PROBLEMA Nº 251**

En el gráfico, D, E, F, G, P y T son puntos de tangencia. Halle $\frac{S_1}{S_2}$

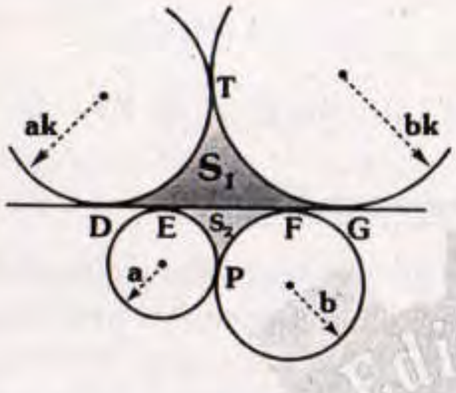
A) k

B) $\sqrt{k}$

C) $k^2$

D) $(a/b)^2$

E) a/b




**PROBLEMA Nº 252**

En un triángulo rectángulo, las áreas de los círculos exinscritos relativos a los catetos y el círculo inscrito son $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. Calcule el área del círculo exinscrito relativa a la hipotenusa.

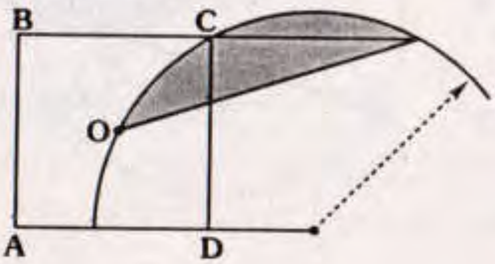
A) $\frac{\mathbb{A}\mathbb{B}}{\mathbb{C}}$ B) $\frac{(\sqrt{\mathbb{A}}+\sqrt{\mathbb{B}}+\sqrt{\mathbb{C}})^2}{2}$

C) $\sqrt[3]{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}}$ D) $(\sqrt{\mathbb{A}}+\sqrt{\mathbb{B}}-\sqrt{\mathbb{C}})^2$

E) $(\sqrt{\mathbb{A}}+\sqrt{\mathbb{B}}+\sqrt{\mathbb{C}})^2$

**PROBLEMA Nº 253**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O. Calcule el área de la región sombreada. (AB = 4)




A) $5(\pi-2)$ B) $4(\pi-2)$ C) $5\pi-8$

D) $3(\pi-2)$ E) $10(\pi-1)$

**PROBLEMA Nº 254**

En el gráfico, $\overline{GH}//\overline{EC}$ y DC = 4(ED) = 4. Calcule el área de la región sombreada.

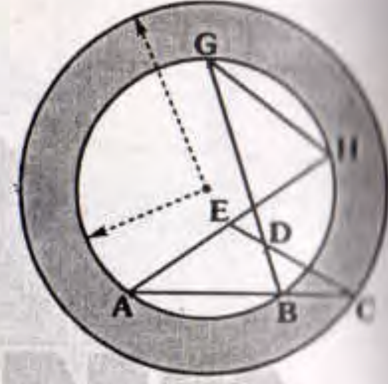
A) $16\pi$

B) $4\pi$

C) $20\pi$

D) $12\pi$

E) $25\pi$




**PROBLEMA Nº 255**

En el gráfico, E y C son puntos de tangencia, si $m\sphericalangle ADC = m\sphericalangle OBC$; $m\widehat{QC}=\frac{217^\circ}{2}$ y OE = 2. Halle el área de la región sombreada.

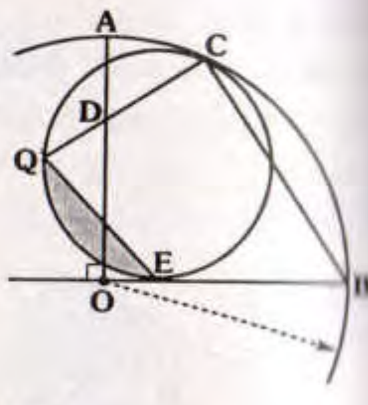
A) $9(\pi-2)$

B) $8(\pi-2)$

C) $6(\pi-2)$

D) $9\pi-2$

E) $8\pi-3$




**PROBLEMA Nº 256**

Se tiene el triángulo equilátero ABC cuyo lado mide "a", P varía en $\overline{BC}$ y Q en $\overline{AB}$, sea $\overline{AP}\cap\overline{CQ}=\{S\}$, tal que $m\sphericalangle ASQ=60^\circ$,

...lcule el área mínima del círculo circunscrito al triángulo QSP.

A) $\frac{\pi a^2}{12}$ B) $\frac{\pi a^2}{6}$ C) $\frac{\pi a^2}{3}$

D) $\frac{\pi a^2}{9}$ E) $\pi a^2$

**PROBLEMA Nº 257**

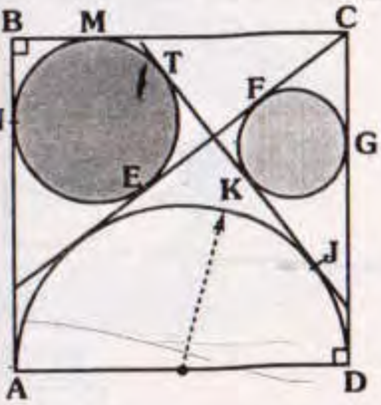
Se tienen los pentágonos regulares coplanares ABCDE y AEFGH, se traza la circunferencia que pasa por F, D y C. Calcule la razón de los círculos inscritos en el triángulo rectilíneo HAB y mixtilíneo FED.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ E) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

**PROBLEMA Nº 258**

En el gráfico, ABCD cuadrado y N, M, T, E, H, F, G, K y J son puntos de tangencia, halle la razón de áreas de dicho círculos.




A) 9/4

B) 4

C) 3/2

D) 6

E) 1/2

**PROBLEMA Nº 259**

En el triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas AQ y BP que se intersecan en H. Si $m\measuredangle ACB = \theta$ y el circunradio del triángulo ABC es R. Calcule el área del círculo circunscrito al triángulo PHQ.

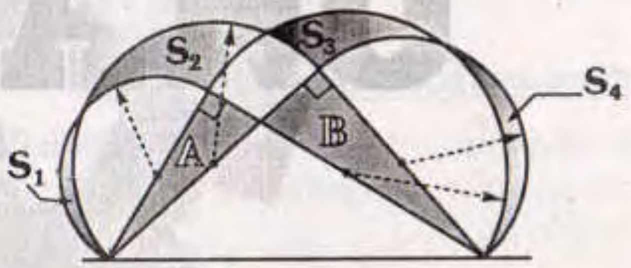
A) $\pi R^2 \operatorname{sen}\theta$ B) $\pi R^2 \operatorname{sen}^2\theta$

C) $\pi R^2 \cos^2\theta$ D) $\pi R^2(1+\cos\theta)$

E) $\pi R^2(1-\operatorname{sen}\theta)$

**PROBLEMA Nº 260**

Indique la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.




A) $\mathbb{A}+\mathbb{B} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

B) $\mathbb{A}+\mathbb{B} = S_2 + S_3 - S_1 - S_4$

C) $\mathbb{A}-\mathbb{B} = S_1 + S_3 - S_2 - S_4$

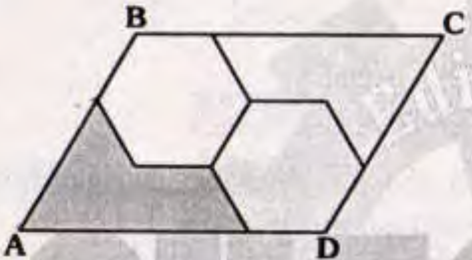
D) $\mathbb{A}-\mathbb{B} = S_1 + S_2 - S_3 - S_4$

E) $\mathbb{A}-\mathbb{B} = S_2 - S_1 + S_3 - S_4$

# Problemas Resueltos
## Ciclo Repaso

**PROBLEMA Nº 261**

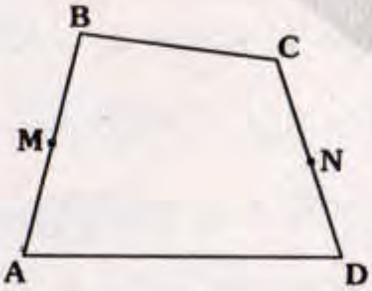
En el gráfico, los hexágonos mostrados son regulares. Calcule la razón de áreas de la región sombreada y la región ABCD.




A) 1/3
B) 1/4
C) 1/8
D) 1/6
E) 2/9

**PROBLEMA Nº 262**

En el gráfico, AM = MB y CN = ND indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.




I) Si $S_{(\square ABCD)} = 2(S_{\Delta ABN})$, entonces ABCD es un trapecio;

II) Si $S_{\Delta ABN} = S_{\Delta CMD}$, entonces ABCD es un trapecio;

III) Si $S_{(AMCN)} = S_{(BNDM)}$, entonces ABCD es un trapecio.

A) VFV  B) VVV  C) FFF
D) VVF  E) FFV

**PROBLEMA Nº 263**

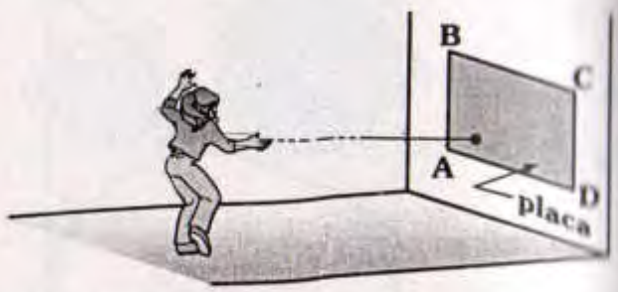
¿Cuántos puntos P del plano del triángulo ABC existen, tal que

$$S_{\Delta APB} = S_{\Delta PBC} = S_{\Delta PAC} ?$$

A) 1  B) 2  C) 3
D) 4  E) infinitos

**PROBLEMA Nº 264**

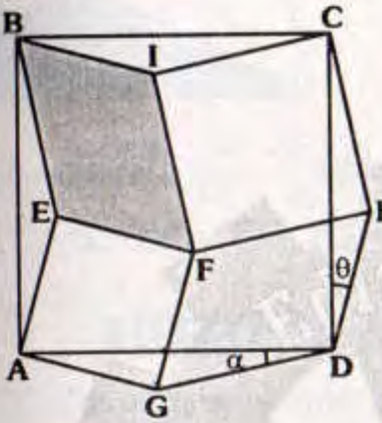
En el gráfico, se muestra a Dianita lanzando dardos a una placa cuadrada. Si todos los dardos llegan a la región interior, calcule la probabilidad que la distancia del punto dejado por el dardo, al lado más próximo sea menor o igual a la distancia a la diagonal.




A) $\sqrt{2}-1$  B) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$  C) $\sqrt{2}$
D) $\dfrac{1}{2}$  E) $\dfrac{1}{4}$

**PROBLEMA Nº 265**

En el gráfico, $\alpha+\theta=45°$ y $(HD)(GD)=10\sqrt{2}$. Si ABCD, AEFG y FHCI son cuadrados. Halle el área de la región sombreada.




A) 20

B) 10

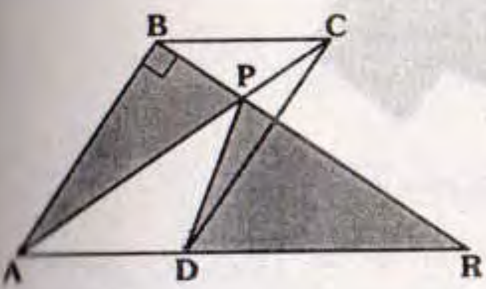
C) 15

D) $10\sqrt{2}$

E) $20\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 266**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo y $(AB)(PR)=k$. Calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.

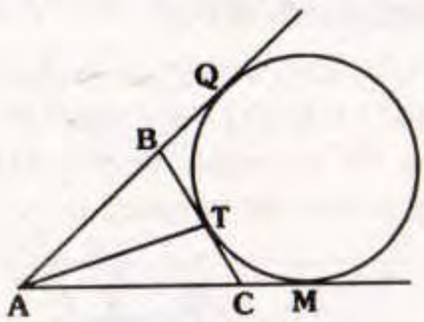



A) k  B) 2k  C) 4k

D) k/2  E) k/4

**PROBLEMA Nº 267**

En el gráfico, Q, T y M son puntos de tangencia. Si AB=5; BC=6 y AC=7. Calcule la razón de inradios de los triángulos ABT y ATC.




A) 1

B) 1/2

C) 2

D) 2/3

E) 3/2

**PROBLEMA Nº 268**

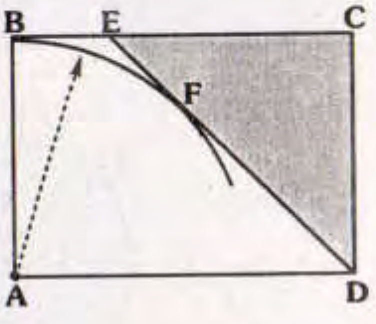
En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la mediana BM. Si $12(AB)=5(BC)$, calcule la razón de inradios de los triángulos AMB y MBC.

A) $\frac{5}{12}$  B) $\frac{10}{13}$  C) $\frac{5}{13}$

D) $\frac{25}{18}$  E) $\frac{16}{25}$

**PROBLEMA Nº 269**

En el gráfico, ABCD es un rectángulo, si EF=4 y FD=6, calcule el área de la región sombreada.



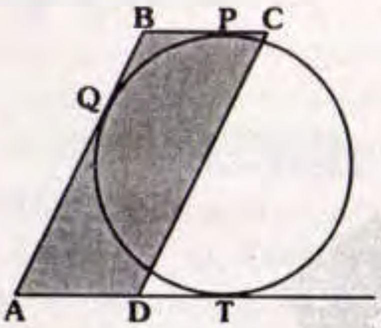

A) 20  B) 16

C) 12  D) 48

E) 24

**PROBLEMA Nº 270**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, si PC=DT, BQ=a y QA=b. Calcule el área de la región sombreada (P, Q y T son puntos de tangencia)




A) ab

B) $(a+b)^2$

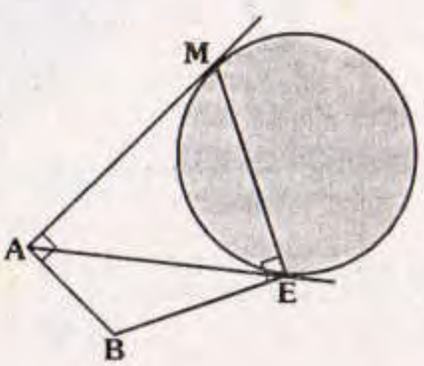
C) $\frac{(a+b)^2}{2}$

D) $(a+b)\sqrt{ab}$

E) $\frac{\sqrt{ab}(a+b)}{2}$

**PROBLEMA Nº 271**

En el gráfico, E y M son puntos de tangencia. Si AB = k, halle el área de la región sombreada.




A) $\pi k^2$

B) $2\pi k^2$

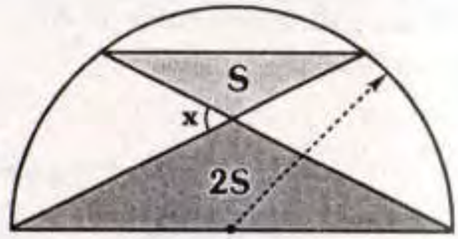
C) $\frac{\pi k^2}{2}$

D) $\frac{\pi k^2}{4}$

E) $\pi\sqrt{2}k^2$

**PROBLEMA Nº 272**

En el gráfico, calcule x.




A) 30° B) 45° C) 60°

D) 37° E) 53°

**PROBLEMA Nº 273**

Se tiene el cuadrante AOB (O es centro), se ubica P en $\overset{\frown}{AB}$, Q en $\overline{AO}$ y T en $\overline{OB}$ tal que OQPT es rectángulo. Si $\overline{AB}$ corta a $\overline{QP}$ en E y a $\overline{TP}$ en F, AE=a y FB=b. Halle el área de la región EPF.

A) ab B) $\frac{ab}{2}$ C) 2ab

D) $ab\sqrt{2}$ E) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

**PROBLEMA Nº 274**

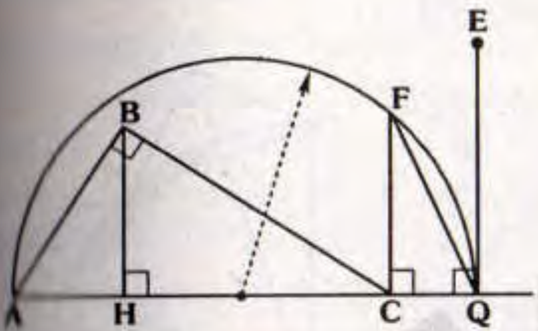
En los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ de un paralelogramo ABCD se ubican los puntos P y Q tal que el cuadrilátero PCDQ es un cuadrilátero inscriptible y circunscriptible a la vez. Calcule la razón de áreas de las regiones ABCD y PCDQ, sabiendo que AD=4(AB) y $m\measuredangle BAD=60$.

A) 3 : 1 B) 5 : 3 C) 4 : 1

D) 7 : 5 E) $\sqrt{3}$ :2

**PROBLEMA Nº 275**

En el gráfico, E es excentro del triángulo ABC. Si AC=m y FQ=n, calcule BH.

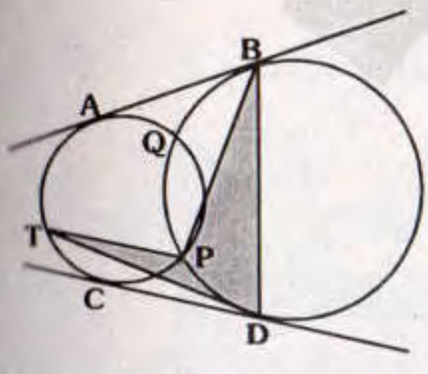



A) $m+n$  B) $\dfrac{m+n}{2}$  C) $\sqrt{m^2+n^2}$

D) $\dfrac{2m^2}{n}$  E) $\dfrac{2n^2}{m}$

**PROBLEMA Nº 276**

Calcule el área de la región sombreada si AB=a y $m\overset{\frown}{TCP}=m\overset{\frown}{QPD}=\theta$ (A, B, C y D son puntos de tangencia)



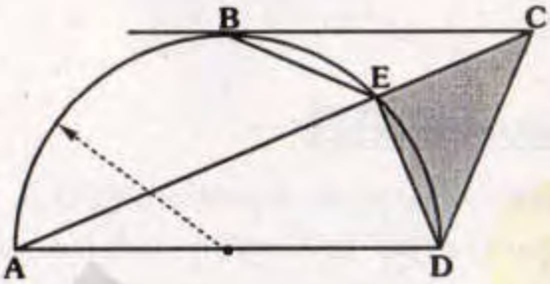

A) $a^2\text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$  B) $\dfrac{a^2}{2}\text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

C) $2a^2\text{sen}\theta$  D) $\dfrac{a^2}{2}\text{sen}\theta$

E) $a^2\cos\theta$

**PROBLEMA Nº 277**

En el gráfico, B es punto de tangencia y BE = a, calcule el área de la región sombreada, si $\overline{AD}//\overline{BC}$.

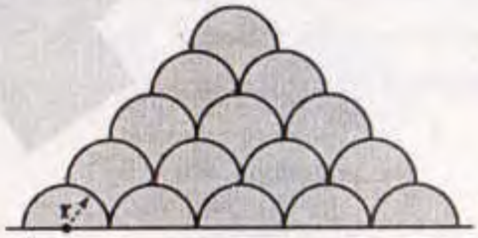



A) $a^2$  B) $2a^2$  C) $4a^2$

D) $\dfrac{a^2}{2}$  E) $\dfrac{a^2}{4}$

**PROBLEMA Nº 278**

En el gráfico, se muestra un conjunto de semicircunferencias congruentes de radio **r**. Calcule el área de la región sombreada.




A) $5r^2(8+\pi)$  B) $2r^2(8+\pi)$

C) $\dfrac{5r^2}{2}(8+\pi)$  D) $3r^2(8+\pi)$

E) $\dfrac{3r^2}{2}(8+\pi)$

**PROBLEMA Nº 279**

En la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$, en cuya prolongación se ubica P,

luego se traza la secante PCB. Si $m\widehat{AB} = 90°$ y (BC)(CP) = k, halle el área de la región triangular ACD.

A) k B) k/2 C) 2k

D) $\frac{k}{4}$ E) $k\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 280**

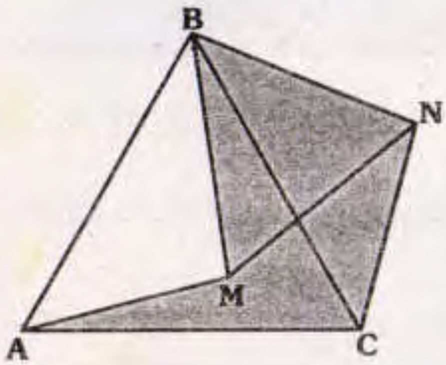
Se tiene el triángulo equilátero EFG, L es un punto de la región interior. Si $m\sphericalangle FEL = m\sphericalangle EGL$ y las áreas de las regiones triangulares ELF y LFC son $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ respectivamente. Calcule el área de la región ELC.

A) $\mathbb{A}+\mathbb{B}$ B) $\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}$ C) $\sqrt{2\mathbb{A}\mathbb{B}}$

D) $2\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}$ E) $\sqrt{3\mathbb{A}\mathbb{B}}$

**PROBLEMA Nº 281**

En el gráfico, los triángulos ABC y MBN son equiláteros. Si AC = 8, calcule el área de la región sombreada.

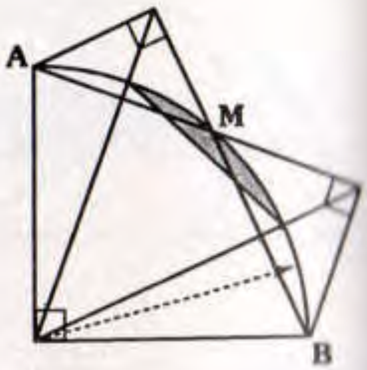



A) $16\sqrt{3}$ B) 16 C) 64

D) $24\sqrt{3}$ E) 32

**PROBLEMA Nº 282**

Del gráfico, si $AM = \sqrt{2}$ y MB = 2, calcular el área de la región sombreada.




A) $\frac{5(\pi-\sqrt{2})}{4}$

B) $\frac{3(\pi-2\sqrt{2})}{8}$

C) $\frac{(\pi-\sqrt{2})}{8}$

D) $\frac{5(\pi-2\sqrt{2})}{8}$

E) $\frac{5(\pi-2\sqrt{2})}{4}$

**PROBLEMA Nº 283**

En el triángulo rectángulo ABC, (recto en B), se traza la circunferencia inscrita de radio r, la cual es tangente a $\overline{AB}$ en P y a $\overline{BC}$ en Q. E es excentro del triángulo ABC relativa a BC, calcule el área de la región PQE.

A) $r^2$ B) $\frac{r^2}{2}$ C) $r^2\sqrt{2}$

D) $r^2\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $2r^2$

**PROBLEMA Nº 284**

Dado el paralelogramo ABCD, AB = 10 se ubica T en $\overline{BC}$ tal que las regiones TCD y ABD están en la razón de 1 a 3, además el cuadrilátero ABTD es bicéntrico. Calcule el área de la región ABCD.

A) $37\sqrt{6}$ B) $39\sqrt{6}$ C) $40\sqrt{6}$

D) $48\sqrt{6}$  E) $\frac{3200}{49}\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 285**

Desde un punto "P" exterior a una circunferencia de centro "O", se traza la tangente PT y la secante PAB tal que la medida del arco AB es "θ", en $\overline{PO}$ se ubica el punto "R" tal que la $m\measuredangle TRP = 90°$ y TR = 4. Calcule el área de la región triangular ARB.

A) $8\operatorname{sen}\theta$  B) $8\cos\theta$  C) $8\tan\theta$

D) $(8\operatorname{sen}\theta)/3$  E) $(8\cos\theta)/3$

**PROBLEMA Nº 286**

En la figura mostrada ABCD es un cuadrado de lado "$\ell$". Calcule el área de la región sombreada (O; $O_1$; $O_2$; $O_3$ son centros de las semicircunferencia)

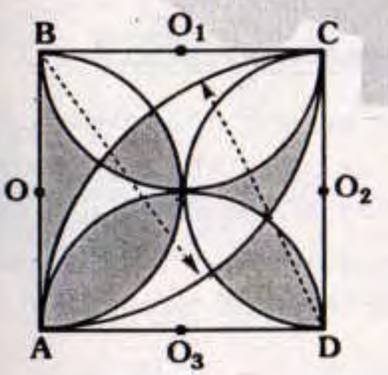
A) $\pi\ell^2/2$

B) $\pi\ell^2/4$

C) $\pi\ell^2/8$

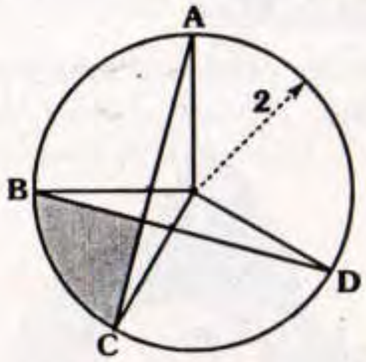
D) $\pi\ell^2/16$

E) $\pi\ell^2/32$




**PROBLEMA Nº 287**

En el gráfico, $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 90°$ y $m\widehat{BC} = 60°$. Halle el área de la región sombreada.



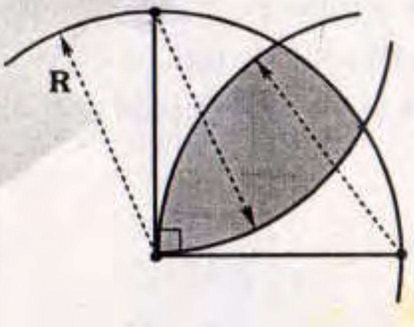

A) $\frac{1}{3}(\pi+\sqrt{3})$  B) $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$

C) $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\pi+4)$  D) $\frac{1}{3}(2\pi+3-3\sqrt{3})$

E) $3\pi\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 288**

En el gráfico, halle el área de la región sombreada.



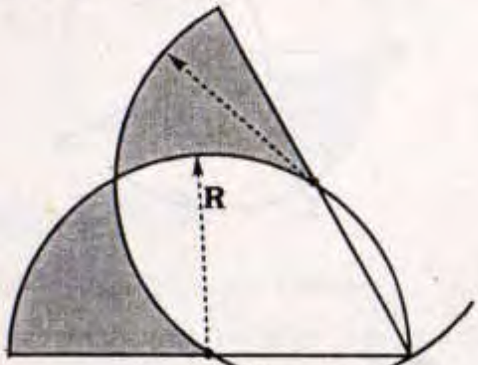

A) $\frac{R^2}{3}\left(\frac{4}{5}\pi-\sqrt{3}\right)$  B) $\frac{R^2}{2}\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$

C) $\frac{R^2}{2}\left(\frac{5}{4}\pi-\sqrt{3}\right)$  D) $\frac{R^2}{2}\left(\frac{5}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$

E) $\frac{R^2}{3}\left(\frac{5}{4}\pi-\sqrt{3}\right)$

**PROBLEMA Nº 289**

En el gráfico, calcule el área de la región sombreada.




A) $R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$  B) $R^2\frac{\sqrt{5}}{2}$  C) $R^2\frac{\sqrt{6}}{2}$

D) $R^2\frac{\sqrt{3}}{8}$  E) $R^2\frac{\sqrt{2}}{5}$

**PROBLEMA Nº 290**

En una circunferencia de radio 1, se ubican los puntos A, B y C, (B en $\overset{\frown}{AC}$ ) tal que $m\overset{\frown}{AB}=40°$ y $m\overset{\frown}{BC}=100°$. Calcule el área de la región limitada por $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overset{\frown}{BC}$.

A) $\frac{5}{18}\pi$  B) $\frac{7}{18}\pi$  C) $\frac{5}{13}\pi$

D) $\frac{4}{9}\pi$  E) $\frac{5}{6}\pi$

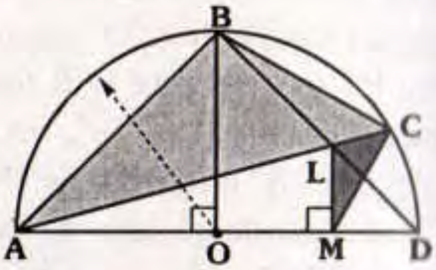
**PROBLEMA Nº 291**

Se tiene un trapecio isósceles ABCD en el cual se traza la altura $\overline{CH}$; si el área de la región triangular ACH es 12; calcule el área de la región trapecial.

A) 12  B) 24  C) 18  D) 20  E) 15

**PROBLEMA Nº 292**

Según el gráfico, calcule la razón de las áreas de las regiones triangulares ABC y MLC, si: BL = LD.




A) $2\sqrt{2}$  B) 8  C) 6

D) 4  E) $4\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 293**

Los lados de un rectángulo miden 10+senx y 16–senx, halle el área máxima de la región rectangular.

A) 160  B) 165  C) 187

D) 169  E) 178,25

**PROBLEMA Nº 294**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, P es un punto interior tal que AD=AP, PB=BC, AB=6 y $m\measuredangle DAP=m\measuredangle PBC=90°$. Calcule el área de la región pentagonal APBCD.

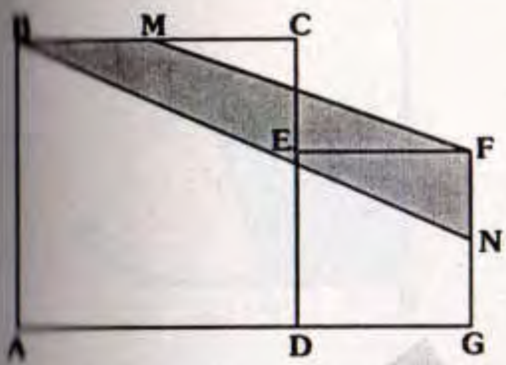
A) 12  B) 36  C) 24

D) 9  E) 18

**PROBLEMA Nº 295**

En el gráfico, ABCD y DEFG son cuadrados, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y

FG respectivamente. Si GC = k, calcule el área de la región sombreada.

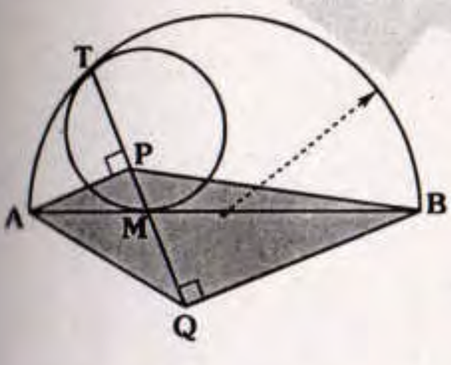



A) $k^2$ B) $k^2\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ C) $k^2\sqrt{2}$

D) $\dfrac{k^2}{2}$ E) $\dfrac{k^2}{4}$

**PROBLEMA Nº 296**

En el gráfico, T y M son puntos de tangencia. Si AP=a y BQ=b, calcule el área de la región sombreada.



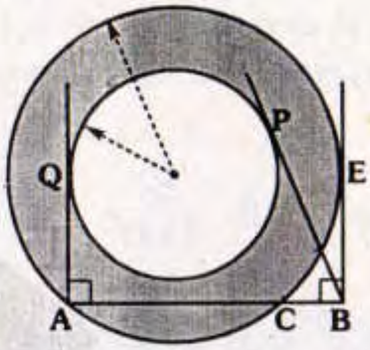

A) $\dfrac{(b^2-a^2)}{2}\sqrt{2}$ B) $\dfrac{2}{3}(b^2-a^2)$

C) $\dfrac{ab}{2}$ D) $b^2 - a^2$

E) $\dfrac{b^2-a^2}{2}$

**PROBLEMA Nº 297**

Según la figura, el área de la región sombreada es $\pi a^2$. Calcule "BP", si E, P y Q son puntos de tangencia.



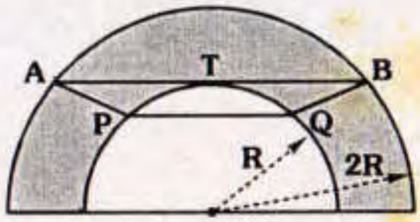

A) $a\sqrt{6}$ B) $a\sqrt{5}$

C) $a\sqrt{3}$ D) $a\sqrt{2}$

E) a

**PROBLEMA Nº 298**

Calcule el área de la región sombreada si $\overline{PQ}/\!/\overline{AB}$, PQ = R y "T" es punto de tangencia.




A) $\dfrac{R^2}{6}(7\pi-6)$ B) $\dfrac{R^2}{3}(2\pi-3)$

C) $\dfrac{R^2}{4}(3\pi-\sqrt{3})$ D) $\dfrac{R^2}{5}(5\pi-3)$

E) $\dfrac{R^2}{7}(2\pi-1)$

**PROBLEMA Nº 299**

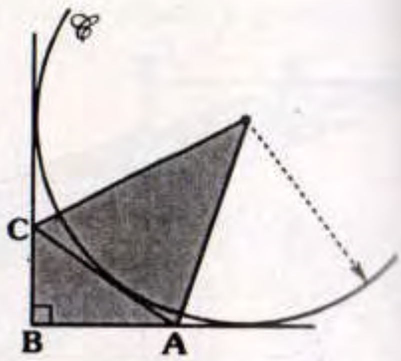
En un triángulo ABC sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P y N respectivamente de modo que: $\frac{PA}{PB}=\frac{NC}{NA}=k$. Calcule el área de la región triangular APN, si el área de la región triangular ABC es "S".

A) $\frac{3Sk}{(1+k)^2}$ B) $\frac{2Sk}{(1+k)^2}$ C) $\frac{Sk}{(1+k)^2}$

D) $\frac{5k}{(1+k)^2}$ E) $\frac{4Sk}{(1+k)^2}$

**PROBLEMA Nº 300**

En el gráfico, $\mathscr{C}$ es la circunferencia exinscrita del triángulo ABC, si AB+BC=a y AC=b. Calcule el área de la región sombreada.




A) $\frac{a(a+b)}{4}$ B) $\frac{(a+b)^2}{4}$

C) $\frac{b(a+b)^2}{4}$ D) $\frac{a^2+b^2}{2}$

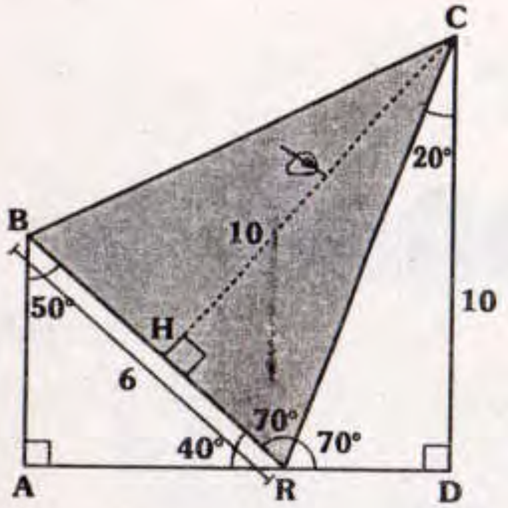
E) $\frac{a^2+b^2}{4}$

# SOLUCIONARIO

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

## ÁREAS DE REGIONES PLANAS

**Resolución N° 1**




Nos piden $S_{\Delta BRC}$

- Como BR=6, ya tendríamos la base, solo nos falta "la altura".
- Al completar "ángulos", nos damos cuenta que:

$$m\sphericalangle DRC = m\sphericalangle CRB = 70°$$

- Por teorema de la bisectriz:

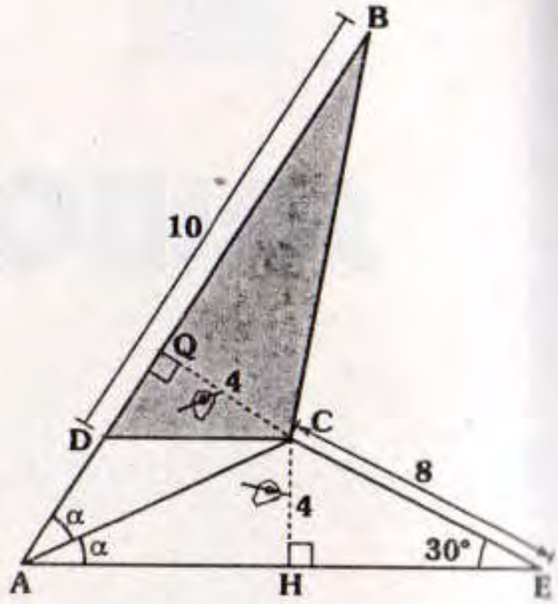
$$CH = CD = 10$$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta BRC} = \frac{(6)(10)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\Delta BRC} = 30}$$

**Clave B**

**Resolución N° 2**




Nos piden $S_{\Delta DBC}$

- Como se conoce DB (la base), nos falta "la altura".
- Se traza $\overline{CQ} \perp \overline{DB}$. Por teorema de la bisectriz:

$$CQ = CH$$

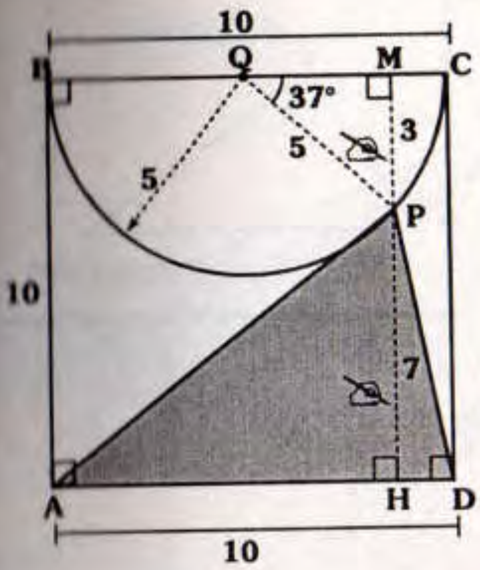
- ⊿CHE: Notable de 30° ⇒ HC = 4

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta DBC} = \frac{(10)(4)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\Delta DBC} = 20}$$

**Clave D**

**Resolución Nº 3**



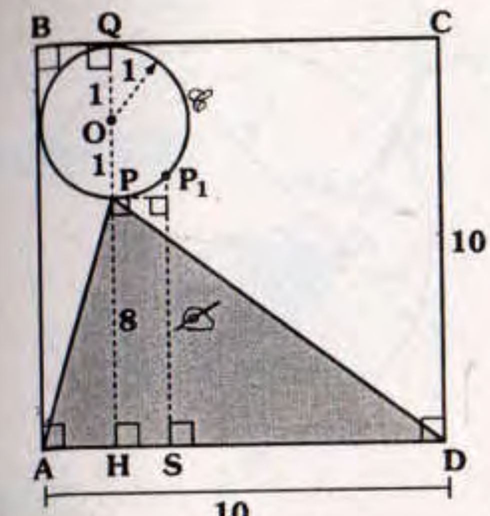

Piden $S_{\Delta APD}$

- Trazamos $\overline{PH} \perp \overline{AD}$ y se prolonga $\overline{HP}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en M.
- ⊿QMP: notable de 37° ⇒ PM = 3
- Luego: PH = 7

$$\Rightarrow \mathbf{S_{\Delta APD} = \frac{(10)(7)}{2} = 35}$$

**Clave B**

**Resolución Nº 4**




Nos piden $S_{\Delta APD}$, tal que sea mínima.

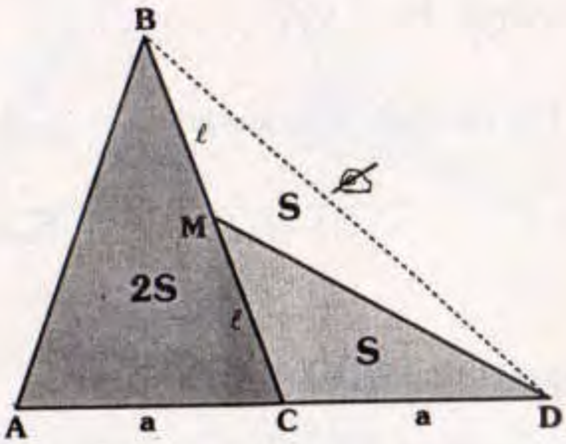
- Como $P \in \mathscr{C}$, analicemos cuando la altura es mínima.
- Notemos que P debe estar en la prolongación de $\overline{QO}$, pues para otro punto distinto de P, por ejemplo $P_1$.
- Vemos que: $P_1S > PH$

$$\Rightarrow S_{APD} = \frac{(10)(8)}{2}$$

$$\therefore \mathbf{S_{APD} = 40}$$

**Clave C**

**Resolución Nº 5**




Piden $S_{\Delta MCD}$

Dato $S_{\Delta ABC} = 8m^2$

- Sea $S_{\Delta MCD} = S$

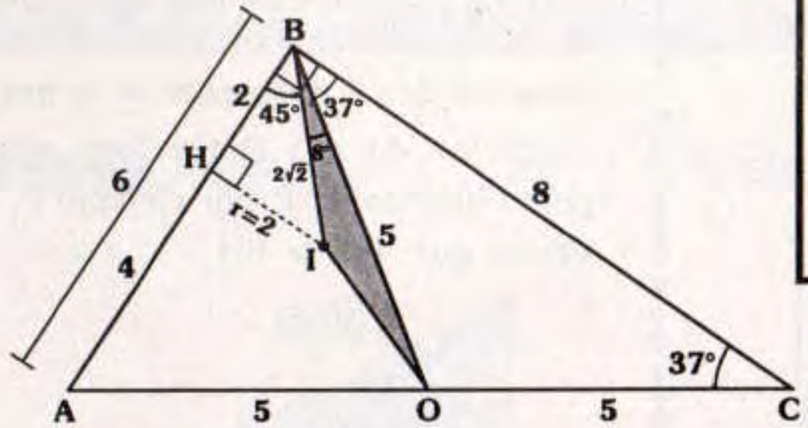
Por razón de áreas: $S_{\Delta BMD} = S$ y $S_{\Delta ABC} = 2S$

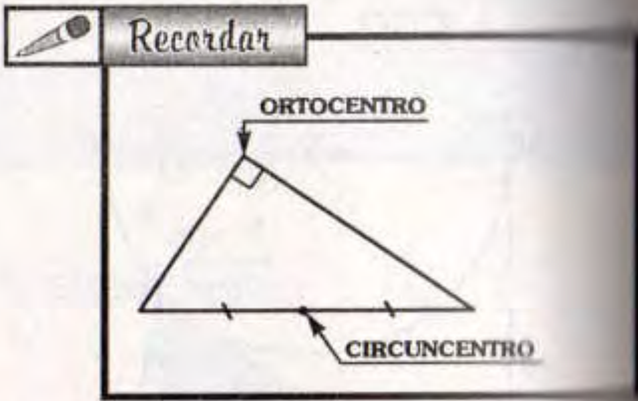
$$\Rightarrow 2S = 8m^2$$

$$\therefore \mathbf{S = 4m^2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 6**



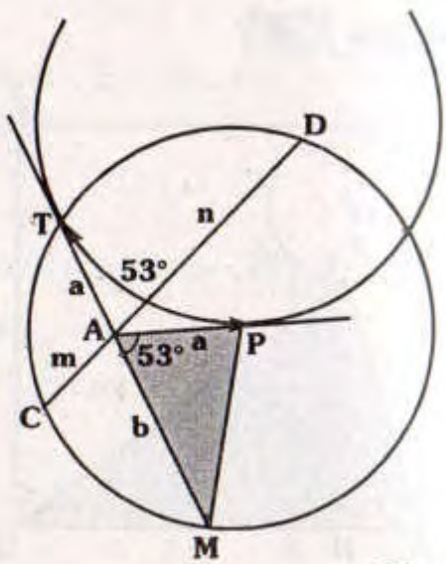

Nos piden $S_{\Delta OIB}$

- Notamos que $m\measuredangle IBO = 8°$
- Por teorema de la Poncelet: $6 + 8 = 10 + 2r \Rightarrow r = 2$
- $\triangle$IHB: $IB = 2\sqrt{2}$
- Por fórmula trigonométrica: $S_{\Delta OIB} = \dfrac{(2\sqrt{2})(5)}{2}\underbrace{\text{sen}8°}_{\frac{1}{5\sqrt{2}}}$

$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta OIB} = 1}$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 7**




Nos piden $S_{\Delta AMP}$

Dato: $mn = 20$ y $m\widehat{TP} = 53°$

Por teorema: $m\measuredangle MAP = m\widehat{TP}$ y $AT = AP$

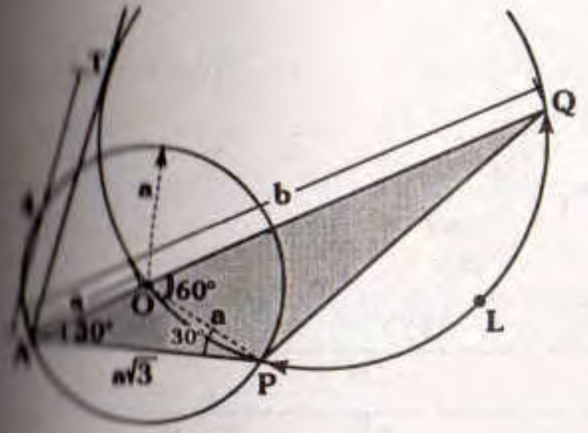
Por t. de las cuerdas: $ab = mn = 20$

$\Rightarrow S_{\Delta AMP} = \dfrac{ab}{2}\text{sen}53° = \dfrac{20}{2}\cdot\dfrac{4}{5}$

$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta AMP} = 8}$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 8**




Nos piden: $S_{\Delta APQ}$

- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle QOP = 60°$

$$\Rightarrow m\measuredangle OAP = 30°$$

- En $\Delta AOP$: AO = OP = a y $AP = a\sqrt{3}$
- Por teorema de la tangente:

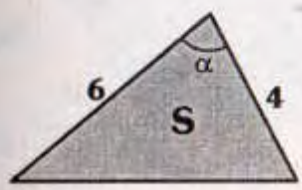
$$ab = 4^2 = 16$$

$$S_{\Delta APQ} = \frac{a\sqrt{3}b}{2}\text{sen}30°$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta APQ} = 4\sqrt{3}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 9**




Nos piden $S_{\text{máxima}}$

- Por fórmula trigonométrica:

$$S = \frac{(6)(4)}{2}\cdot \text{sen}\alpha$$

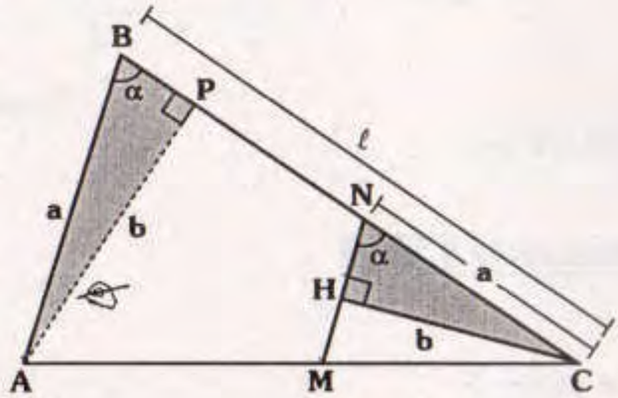
- Como el área debe ser máxima entonces, "senα" es máximo, es decir:

$$\text{sen}\alpha = 1$$

$$\therefore\ \mathbf{S = 12}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 10**




Nos piden: $S_{\Delta ABC}$

- Datos AB = NC; $\overline{AB} // \overline{MN}$ y $b\ell = 10$
- Trazamos la altura $\overline{AP}$ del $\Delta ABC$
- $\measuredangle APB \cong \measuredangle CHN \Rightarrow AP = HC = b$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\ell b}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ABC} = 5}$$

**Clave A**

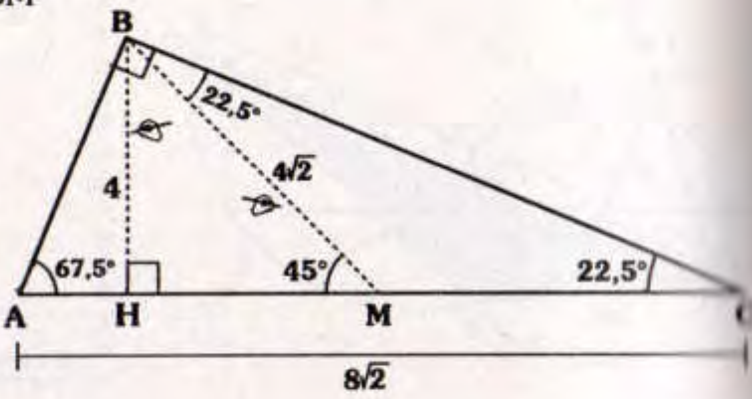
**RESOLUCIÓN Nº 11**

- Nos piden $S_{\triangle ABC}$
- En el $\triangle ABC$, se traza la mediana BM entonces:

$$BM = MC = MA = 4\sqrt{2}$$

- Se traza la altura BH del $\triangle ABC$.
- En el $\triangle BHM$ notable de 45°

$$\Rightarrow BH = 4$$




$$\therefore \; S_{\triangle ABC} = \frac{(8\sqrt{2})(4)}{2}$$

$$\therefore \; \mathbf{S_{\triangle ABC} = 16\sqrt{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 12**

Nos piden S

- Por propiedad de polígonos, su ángulo exterior mide 60°, entonces:

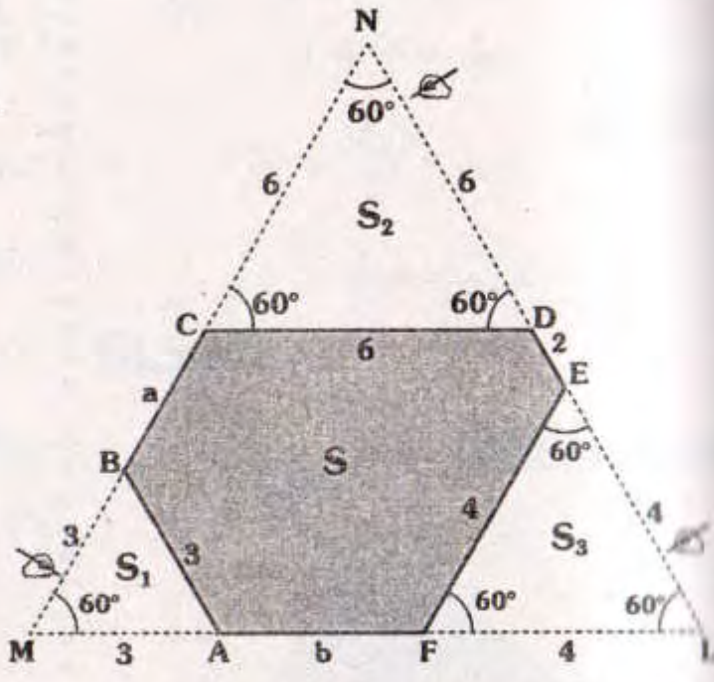
$\triangle MBA$, $\triangle CND$, $\triangle FEL$ y $\triangle MNL$

son equiláteros.

- Como NL = 12 $\Rightarrow$ a = 3 y b = 5
- $S = S_{\triangle MNL} - (S_1 + S_2 + S_3)$

$$\Rightarrow S = 12^2\frac{\sqrt{3}}{4} - \left(3^2\frac{\sqrt{3}}{4} + 6^2\frac{\sqrt{3}}{4} + 4^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\therefore \; \mathbf{S = \frac{83}{4}\sqrt{3}}$$




**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 13**

Piden $S_{\Delta MNT}$

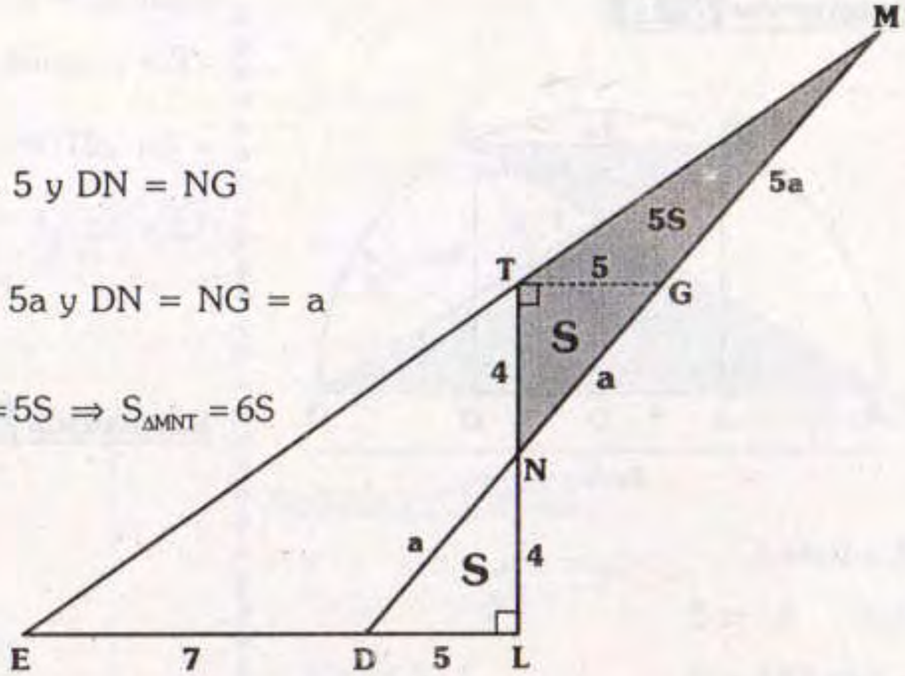
- Se traza $\overline{TG} // \overline{EL} \Rightarrow TG = 5$ y $DN = NG$

$$\Rightarrow \frac{MG}{MD} = \frac{5}{7} \Rightarrow MG = 5a \text{ y } DN = NG = a$$

- Sea $S_{\Delta TNG} = S \Rightarrow S_{\Delta TGM} = 5S \Rightarrow S_{\Delta MNT} = 6S$

$$S = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\Delta MNT} = 60}$$




**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 14**

Nos piden $S_{\Delta BRM}$

- Dato $S_{\Delta ABR} = 10$ y $AM = MC$

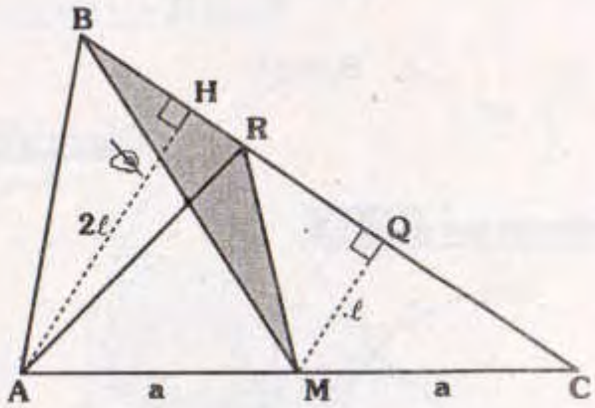
- Como las regiones triangulares BRM y ABR tienen igual base, entonces la razón de áreas es la razón de alturas.

- En ⊿AHC, por base media:

$$AH = 2(MQ)$$

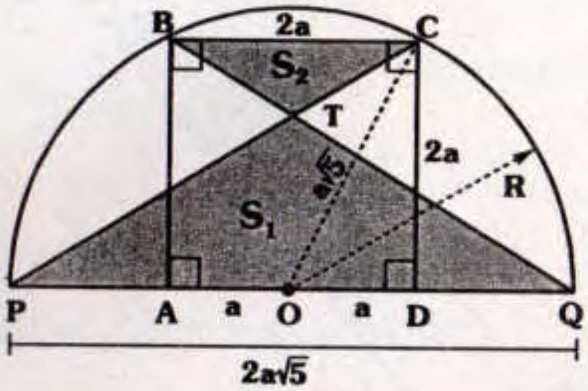
- Entonces: $$\frac{S_{BRM}}{S_{ABR}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{BRM} = 5}$$




**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 15**




Nos pide $S_1$

Dato $S_2 = 2$

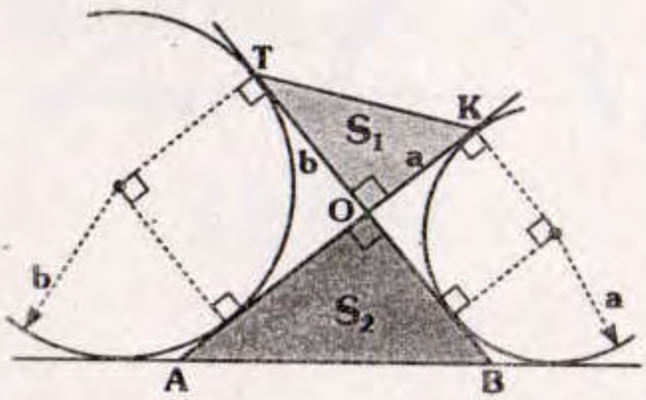
- Sea $OD = a$
- $\measuredangle ODC$: $DC=2a$; $R=a\sqrt{5}$ y $PQ=2a\sqrt{5}$
- $\Delta PTQ \sim \Delta CTB$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{2a\sqrt{5}}{2a}\right)^2$$

$$\therefore \quad S_1 = 10$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 16**




Nos piden $S_1$

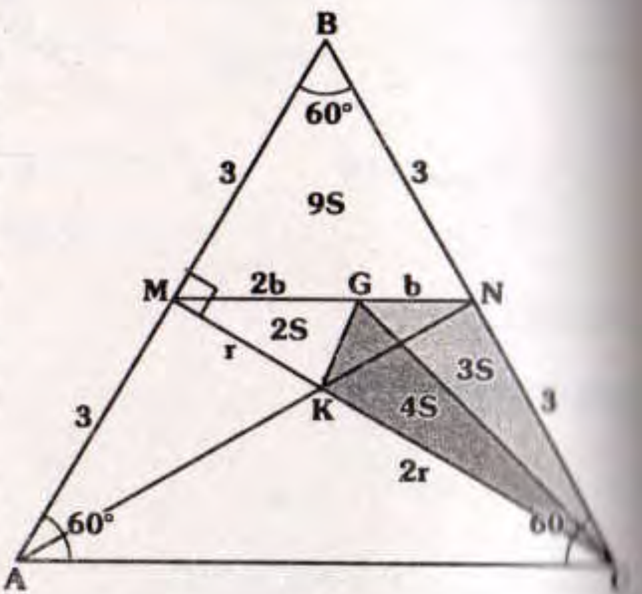
Dato $S_2 = 6$

- Por propiedad (pág.18–19) $S_2 = ab$
- En $\measuredangle TOK$: $S_1 = \frac{ab}{2}$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{S_2}{2} \qquad \therefore \quad S_1 = 3$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 17**




Piden $S_{\Delta CGK}$

- Como el $\Delta ABC$ es equilátero, entonces su ortocentro K también es baricentro, luego:

  $CK = 2(KM)$, $AM = MB$ y $CN = NB$

- G es baricentro del $\Delta BMC$, entonces:

  G está en $\overline{MN}$ y $MG = 2(GN)$

- Sea $S_{\Delta MGK} = 2S$, entonces:

  $S_{\Delta CGK} = 4S$, $S_{\Delta GNC} = 3S$ y $S_{\Delta MBN} = 9S$

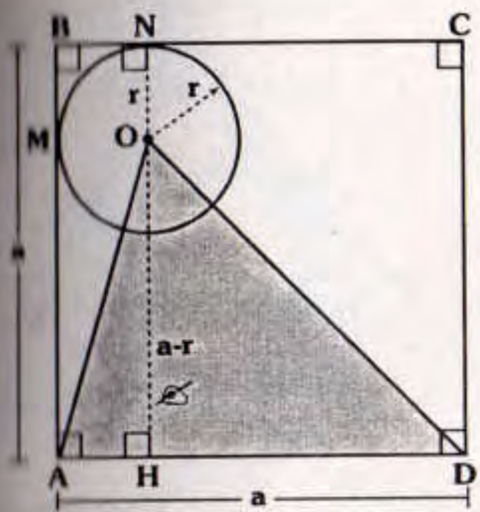
$$\Rightarrow S_{\Delta MBN} = 9S = 3^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta CGK} = \sqrt{3}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 18**



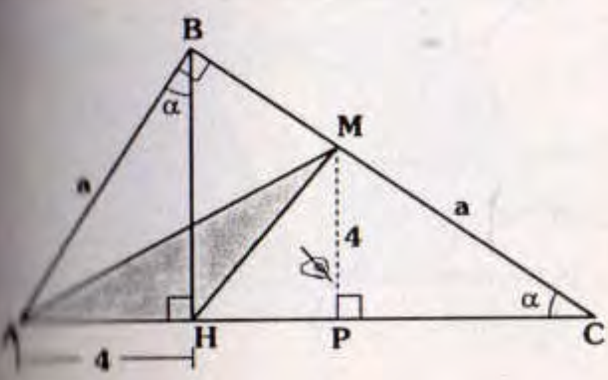

Nos piden $S_{\Delta AOD}$

Se nota que ABNH es rectángulo, entonces: OH = a - r

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta AOD} = \frac{a(a-r)}{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 19**




Nos piden $S_{\Delta AMH}$

- Se traza $\overline{MP} \perp \overline{HC}$

$$\Rightarrow \measuredangle BHA \cong \measuredangle CPM \Rightarrow MP = 4$$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta AMH} = \frac{(4)(4)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta AMH} = 8}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 20**

Sea "p" el semiperímetro y "r" su inradio del mismo triángulo.

Nos piden: r

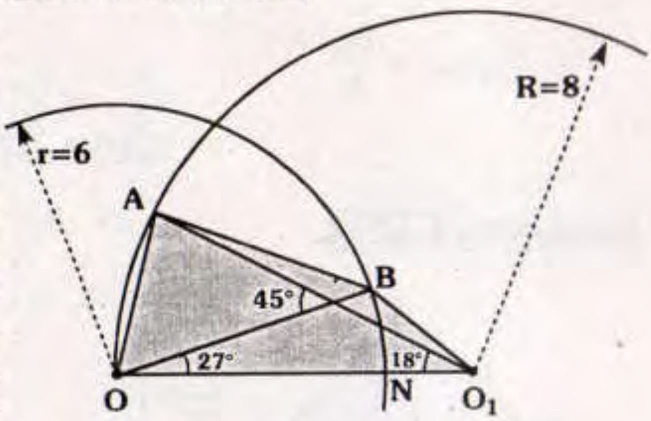
Dato: $\quad S = 3(2p)$

Sabemos: $\quad S = pr \Rightarrow pr = 6p$

$$\therefore\ \mathbf{r = 6}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 21**




Nos piden $S_{\square OABO_1}$

- Como tenemos OB y $AO_1$ (diagonales del cuadrilátero) optemos por la fórmula general.
- Como $m\widehat{BN} = 27°$ y $m\widehat{AO} = 18°$

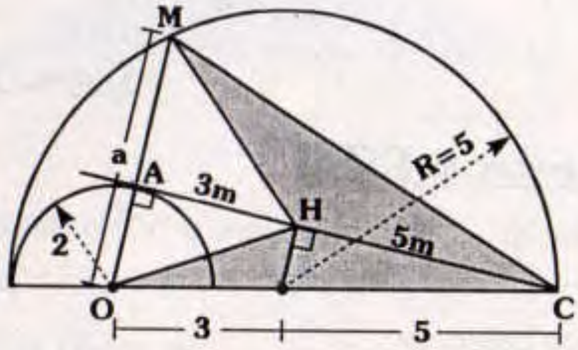
$$\Rightarrow m\measuredangle BON = 27° \quad y \quad m\measuredangle AO_1O = 18°$$

- $$S_{\triangle OABO_1}=\frac{(6)(8)}{2}\text{sen}45°$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle OABO_1}=12\sqrt{2}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 22**




Piden $S_{\measuredangle OHMC}$

Dato: (OM)(AC) = 24

$$\Rightarrow a(8m)=24 \Rightarrow am=3$$

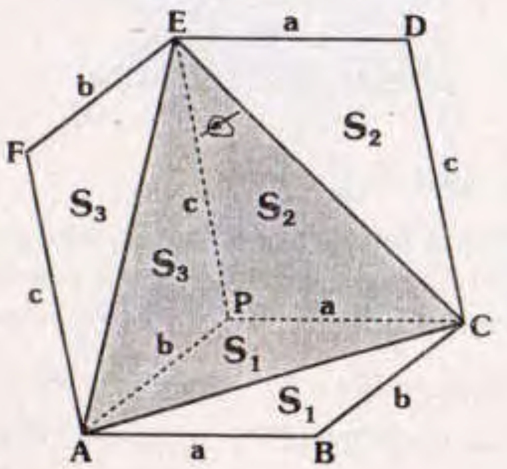
Por fórmula general:

$$S_{\measuredangle OHMC}=\frac{a(5m)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\measuredangle OHMC}=\frac{15}{2}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 23**




Nos piden $\dfrac{S_{\Delta ACE}}{S_{\bigcirc ABCDEF}}$

- Ubiquemos P tal que APCB sea paralelogramo, entonces:

  APEF y PCDE son paralelogramos

- Por teorema:

$$S_{\Delta APC}=S_{\Delta ABC}=S_1$$

$$S_{\Delta APE}=S_{\Delta AEF}=S_3$$

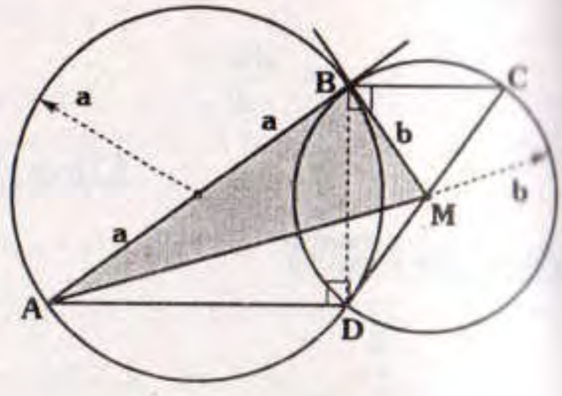
$$S_{\Delta EDC}=S_{\Delta ECP}=S_2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ACE}}{S_{\bigcirc ABCDEF}}=\frac{S_1+S_2+S_3}{2(S_1+S_2+S_3)}$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_{\Delta ACE}}{S_{\bigcirc ABCDEF}}=\frac{1}{2}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 24**




Piden: $S_{\triangle ABCD}$

Dato: ab = 40

- Notemos que ABCD es un trapecio, pues $\overline{AD}//\overline{BC}$

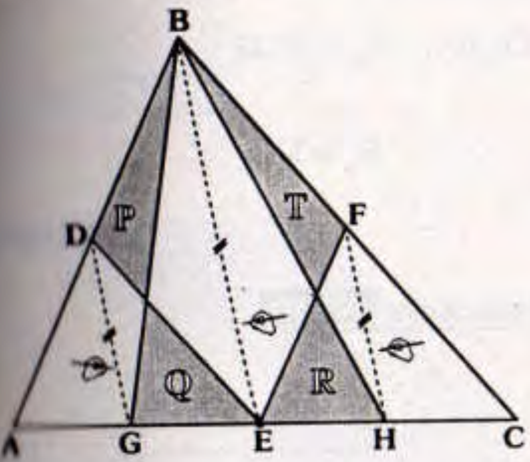
Por teorema: $S_{\triangle ABCD} = 2(S_{\Delta ABM})$

$$S_{\Delta ABM} = \frac{2ab}{2} = 40$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle ABCD} = 80}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 25**




Nos piden: $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}} + \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{T}}$

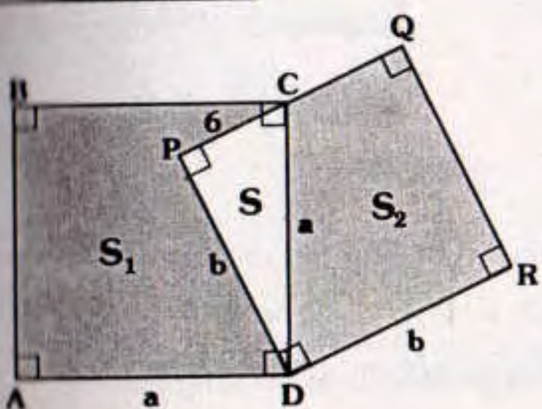
Por t. de la base media: $\overline{GD} // \overline{BE} // \overline{HF}$

Por propiedad: $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} = \mathbb{T}$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}} + \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{T}} = 2$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 26**




Nos piden $S_1 - S_2$

- Notemos: $S_1 + S = a^2$

  $S_2 + S = b^2$

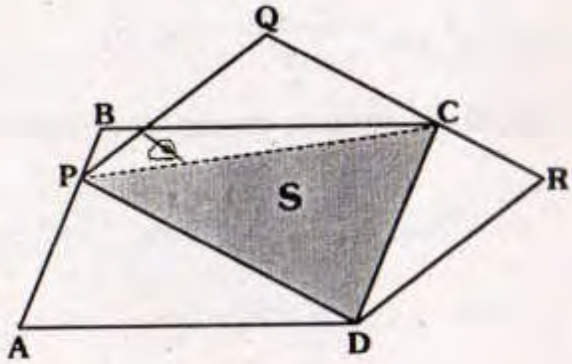
  $\Rightarrow\ S_1 - S_2 = a^2 - b^2$

- En ⊿DPC: $a^2 - b^2 = 6^2$

$$\therefore\ \mathbf{S_1 - S_2 = 36}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 27**




Piden $\frac{S_{\square ABCD}}{S_{\square PQRD}}$

Sea $S_{\Delta PCD} = S$

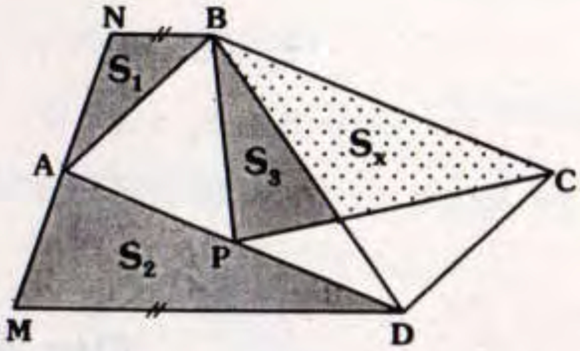
Por teorema:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\square ABCD} = 2S \\ S_{\square PQRD} = 2S \end{array}\right\} S_{\square ABCD} = S_{\square PQRD}$$

$$\therefore\ \frac{\mathbf{S_{\square ABCD}}}{\mathbf{S_{\square PQRD}}} = 1$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 28




Nos piden la relación entre $S_1$, $S_2$, $S_3$ y $S_x$

- Como $\overline{MD} // \overline{NB}$ y MA=AN, entonces

$$S_{\Delta ABD}=\frac{S_{\square MNBD}}{2}=S_1+S_2$$

- ABCD es paralelogramo, entonces:

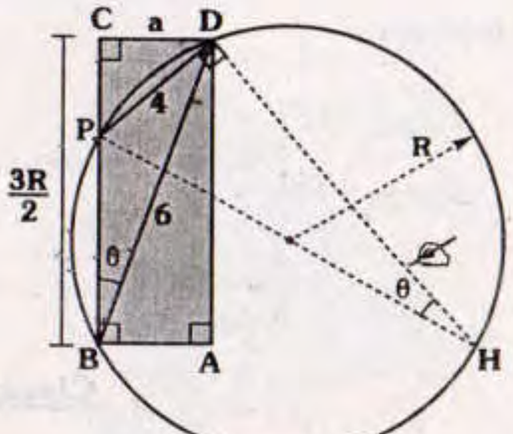
$$S_{\Delta ABD}=\frac{S_{\square ABCD}}{2}=S_{\Delta PBC}=S_3+S_x$$

$$\Rightarrow \quad S_3+S_x=S_1+S_2$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x=S_1+S_2-S_3}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 29




Sea $S_x$ el área de la región ABCD

- $$S_x=a.\frac{3R}{2}=\frac{3}{2}aR \quad ...(I)$$

- $\measuredangle BCD \sim \measuredangle HDP$

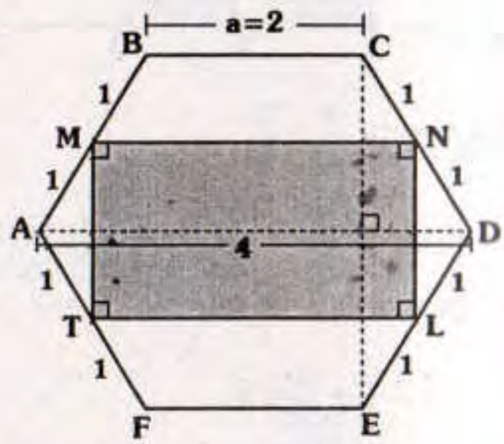
$$\Rightarrow \frac{4}{2R}=\frac{a}{6} \Rightarrow aR=12$$

- En (I): $S_x=\frac{3}{2}(12)$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x=18}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 30




Nos piden $S_{\square MNLT}$

Dato: $S_{\bigcirc ABCDEF}=6\sqrt{3}$

$$\Rightarrow 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=2$$

Como ABCDEF es regular, entonces

$CE=2\sqrt{3}$, $AD=4$ y $\overline{AD}\perp\overline{CE}$

- Luego MNLT es rectángulo.

• Por base media:

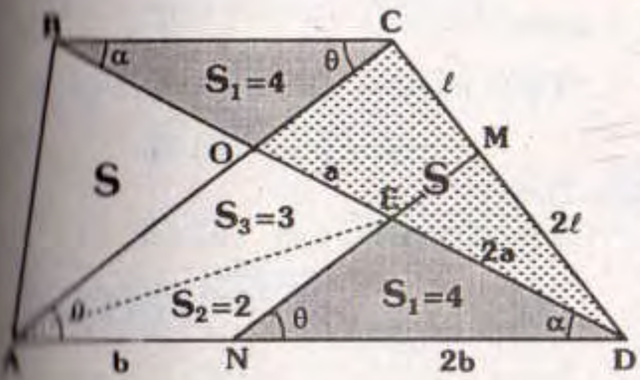
$$MN = \frac{AD+BC}{2} \Rightarrow MN=3$$

$$NL = \frac{CE}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \ S_{\square MNLT} = 3\sqrt{3}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 31**




Nos piden $S_{(\square ABCD)}$

• Dato $S_1 = 4$ y MD = 2(MC)

• Por teorema de Tales:

DE = 2(EO) y ND = 2(NA)

• Luego por razón de áreas

$S_2=2$ y $S_3=3 \Rightarrow S_{(\Delta AOD)} = 9$

• Por propiedad de trapecio:

$$S_{(\Delta BOC)} = S_{(\Delta DOC)} = S$$

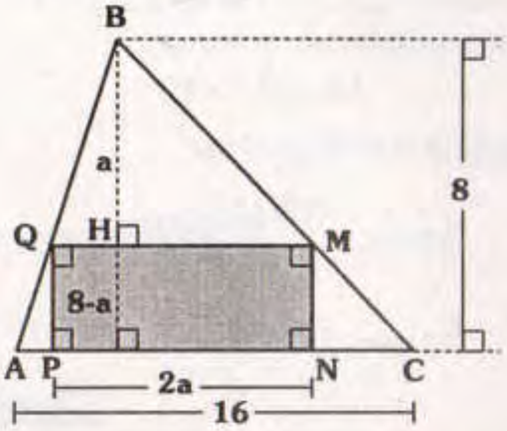
$$S^2 = S_{(\Delta BOC)} \cdot S_{(\Delta AOD)}$$

$$\Rightarrow \ S = 6$$

$$\therefore \ S_{(\square ABCD)} = 25$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 32**




Nos piden QM

Dato $S_{(PQMN)} = 32$

- Como $\Delta ABC \sim \Delta QBM \Rightarrow QM = 2(BH)$
- Sea BH=a $\Rightarrow$ QM=PN=a y

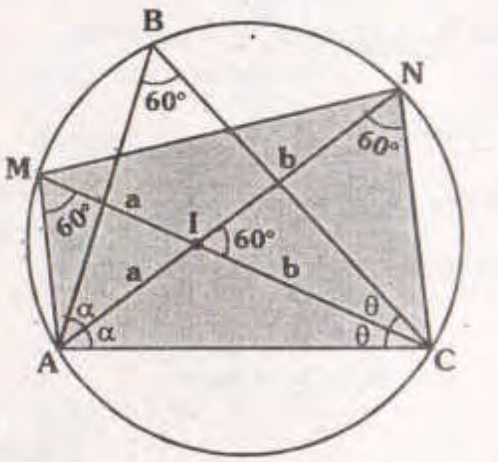
  QP=8 - a
- Del dato:

$$2a(8-a) = 32 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

$$\therefore \ QM = 8$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 33**



Piden: $S_{\square AMNC}$

Dato: a+b = 12

- Notemos que los triángulos AIM y NIC son equiláteros, entonces:

$$AN=MC=12$$

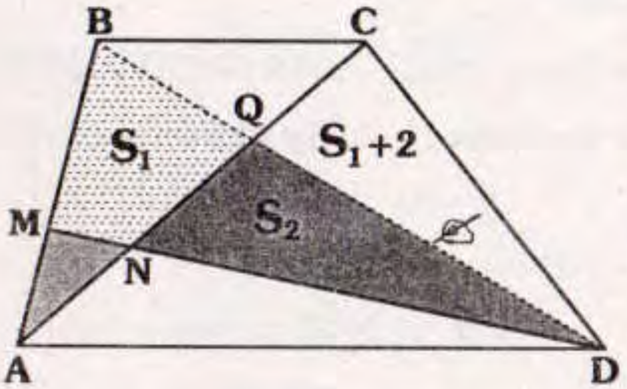
- Por la fórmula general:

$$S_{\square AMNC}=\frac{(12)(12)}{2}\text{sen}60^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square AMNC}=36\sqrt{3}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 34**




Piden $S_{\Delta MBD}$

Datos $S_{\Delta AMN}=2\text{cm}^2$; $S_{\Delta NCD}=10\text{cm}^2$ y

$\overline{AD}//\overline{BC}$

- Sea $S_{\square BQNM}=S_1$ y $S_{\Delta NQD}=S_2$

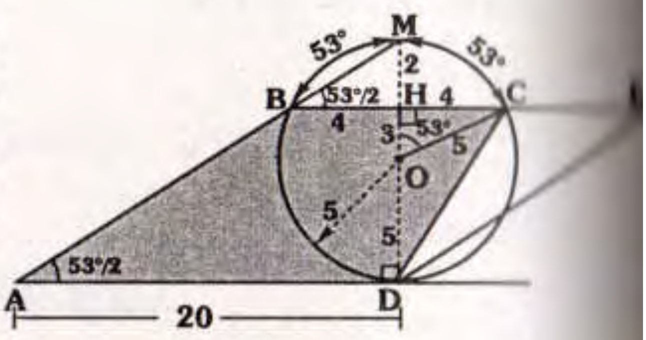
$\Rightarrow\ S_{\Delta MBD}=S_1+S_2$

- Como $\overline{AD}//\overline{BC}\Rightarrow S_{\Delta ABQ}=S_{\Delta CQD}=S_1+2$
- Del dato: $\underbrace{S_{\Delta NCD}}_{10}=S_1+S_2+2$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=8cm^2}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 35**




Nos piden $S_{\square ABCD}$

- Notemos que ABCD es un trapecio, pues $\overline{AD}//\overline{BC}$.
- ⊿OHC notable de 53° ⇒ OH=3 y

$$HC=4\ \Rightarrow\ HD=8$$

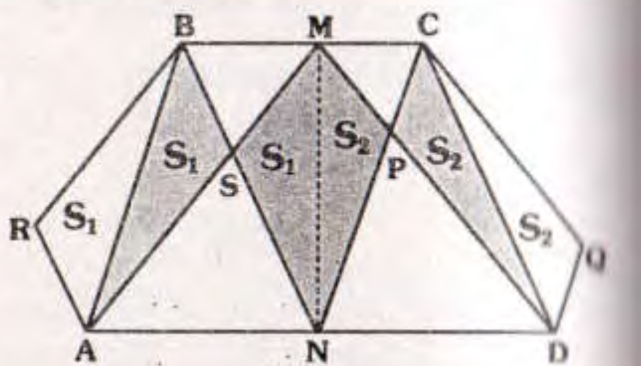
- Como $\overline{OM}\perp\overline{BC}\ \Rightarrow\ BC=8$
- ⊿ADM: notable de $\frac{53^\circ}{2}\Rightarrow AD=20$

$$\Rightarrow\ S_{\square ABCD}=\left(\frac{20+8}{2}\right)\cdot 8$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square ABCD}=112}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 36**




Piden $S_{(\square ARBS)}+S_{(\square PCQD)}$

Dato: $\underbrace{S_{(\square SMPN)}}_{S_1+S_2} = 6$

• Como $\overline{AD} // \overline{BC} \Rightarrow S_{(\Delta ABS)} = S_1$ y

$$S_{(\Delta CDP)} = S_2$$

• Por propiedad del paralelogramo:

$$S_{(\square ARBS)} = 2S_1$$

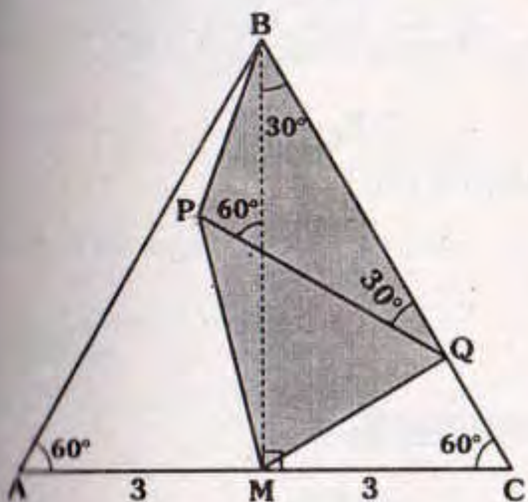
$$S_{(\square PCQD)} = 2S_2$$

$$\Rightarrow S_{(\square ARBS)} + S_{(\square PCQD)} = 2\underbrace{(S_1 + S_2)}_{6}$$

$$\therefore \mathbf{S_{(\square ARBS)} + S_{(\square PCQD)} = 12}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 37**




Nos piden $S_{\square BPMQ}$

• Como el $\Delta ABC$ es equilátero, entonces $\overline{BM} \perp \overline{AC}$, $m\measuredangle CBM = 30°$ y $BM = 3\sqrt{3}$

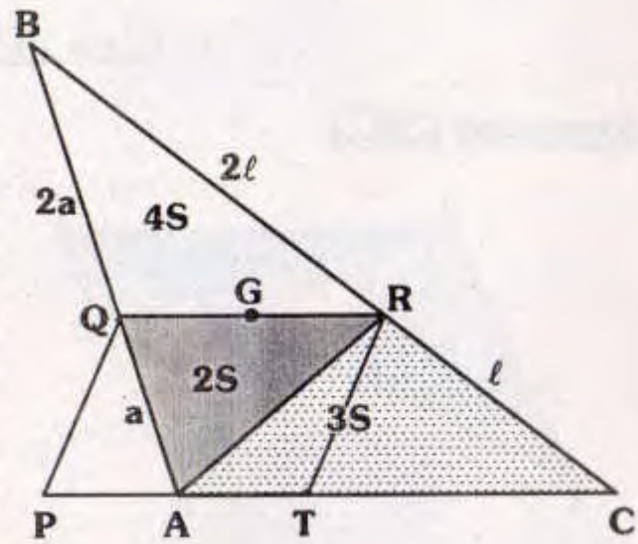
• Por fórmula general:

$$S_{\square BPMQ} = \frac{(4)(3\sqrt{3})}{2}\operatorname{sen}60°$$

$$\therefore \mathbf{S_{\square BPMQ} = 9}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 38**




Piden $S_{\square PQRT}$

Datos: AB=7, BC=9 y AC=4

• Como PQRT es paralelogramo:

$$\Rightarrow S_{\square PQRT} = 2(S_{\Delta AQR})$$

• Al ser G baricentro $\Rightarrow$

$$BQ = 2(QA) \quad y \quad BR = 2(RC)$$

• Sea $S_{\Delta AQR} = 2S \Rightarrow S_{\Delta QRB} = 4S$ y

$$S_{\Delta ARC} = 3S \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 9S$$

• Por teorema de Herón:

$$\underbrace{S_{\Delta ABC}} = \sqrt{10(10-9)(10-7)(10-4)}$$

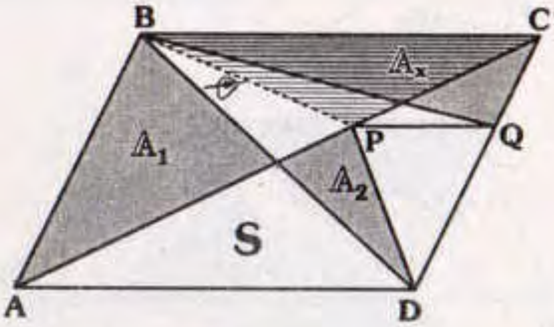
$$9S = 6\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{3}\sqrt{5} \Rightarrow S_{\Delta AQR} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

$$\therefore \mathbf{S_{\square PQRT} = \frac{8}{3}\sqrt{5}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 39**




Nos piden $\mathbb{A}_x$ en función de $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$

- Por propiedad: $\mathbb{A}_1 + S = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$ ...(I)
- Como $\overline{PQ} // \overline{BC} \Rightarrow S_{\Delta PBC} = \underbrace{S_{\Delta BQC}}_{\mathbb{A}_x}$
- Al ser P un punto interior, entonces:

$$S_{\Delta APD} + S_{\Delta PBC} = \frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

$$\Rightarrow S + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_x = \frac{S_{\square ABCD}}{2} \quad ...(II)$$

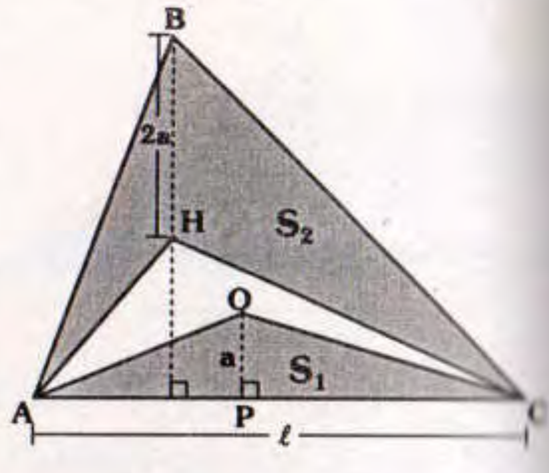
- De (I) y (II):

$$S + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_x = \mathbb{A}_1 + S$$

$$\therefore \mathbb{A}_x = \mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 40**




Nos piden $\frac{S_2}{S_1}$

- Por propiedad de puntos notables:

$$HB = 2(OP)$$

- Por fórmula general en $\triangle$ABCH:

$$S_2 = \frac{\ell \cdot 2a}{2} \quad ...(I)$$

- Por fórmula básica en $\Delta$AOC:

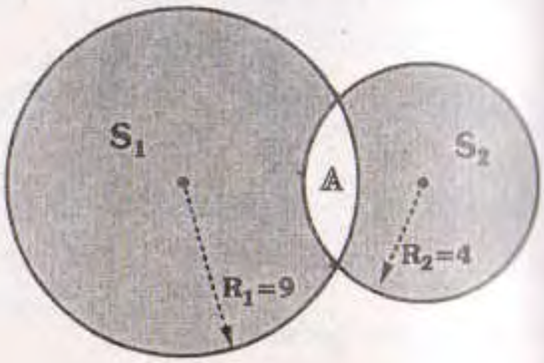
$$S_1 = \frac{a\ell}{2} \quad ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$\therefore \mathbf{\frac{S_2}{S_1} = 2}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 41**



Piden $S_1 - S_2$

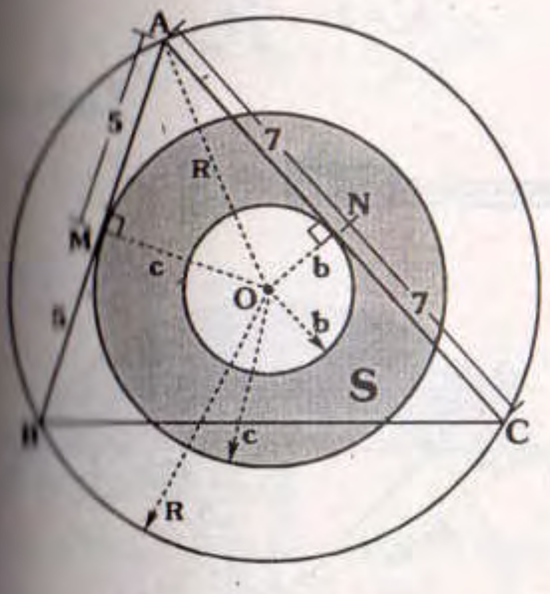
Notemos que: $S_1 + \mathbb{A} = \pi R_1^2 = 81\pi$

$$S_2 + \mathbb{A} = \pi R_2^2 = 16\pi$$

$$\therefore \ \mathbf{S_1 - S_2 = 65\pi}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 42**




Sea S el área de la corona circular.

$$\Rightarrow S = \pi(c^2 - b^2)$$

En ⊿OMA y ⊿ONA:

$$c^2 + 5^2 = R^2$$

$$b^2 + 7^2 = R^2$$

$$\Rightarrow c^2 + 5^2 = b^2 + 7^2$$

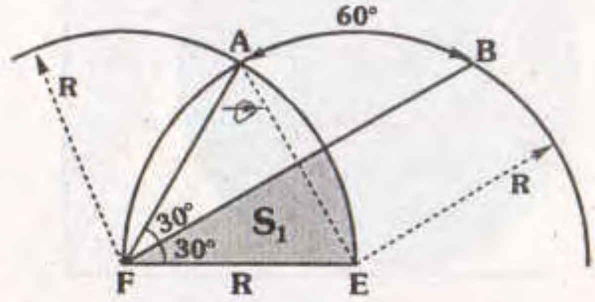
$$\Rightarrow c^2 - b^2 = 24$$

$$\therefore \ \mathbf{S = 24\pi}$$

**Clave A**

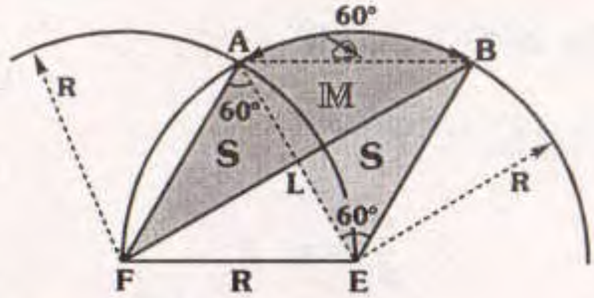
**RESOLUCIÓN Nº 43**

Nos piden la razón de áreas de las regiones sombreadas (analicemos por separado)




ΔAFE: Equilátero

$$\Rightarrow S_1 = \frac{30°}{360°}\pi R^2 = \frac{1}{12}\pi R^2 \quad \ldots(\alpha)$$




Sea $S_2 = S + \mathbb{M}$

- Como FABE es rombo

$$\Rightarrow S_{\Delta LAF} = S_{\Delta LEB} = S$$

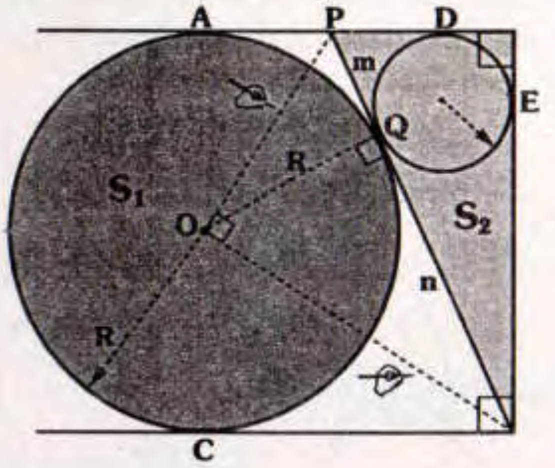
$$\Rightarrow S_2 = \frac{60°}{360°}\pi R^2 = \frac{1}{6}\pi R^2 \quad \ldots(\beta)$$

- De $(\alpha)$ y $(\beta)$:

$$\mathbf{\frac{S_2}{S_1} = 2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 44**




Nos piden $\frac{S_1}{S_2}$

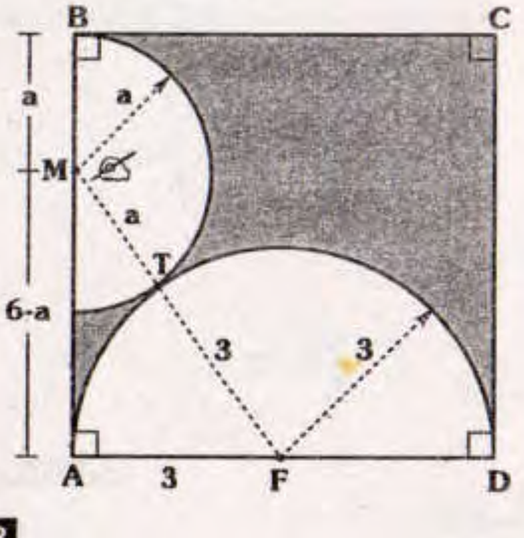
- $S_1 = \pi R^2$
- Sea QB=n y QP=m, entonces: $S_2$=mn
- En ⊿POQ: mn=$R^2$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{mn}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \pi$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 45**




- Piden el área de la región sombreada.
- Es fácil darnos cuenta, que el área pedida, es una diferencia de áreas de la región cuadrada y los dos semicírculos, para ello; hallemos "a".
- En ⊿MAF:

$$(a+3)^2 = a^2 + (6-a)^2 \Rightarrow a=2$$

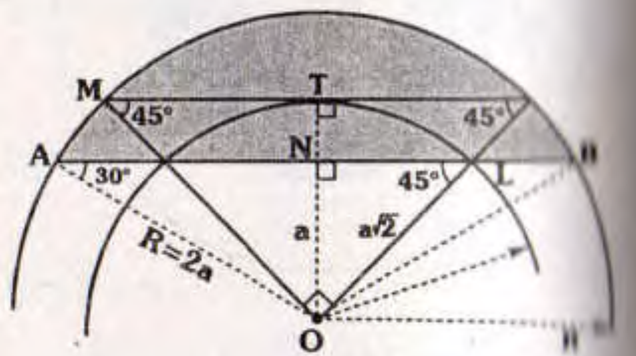
- Sea $\mathbb{A}_x$ el área pedida:

$$\Rightarrow \mathbb{A}_x = 6^2 - \frac{\pi 3^2}{2} - \frac{\pi 2^2}{2}$$

$$\therefore \mathbb{A}_x = 36 - \frac{13}{2}\pi$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 46**




Sea S el área de la región sombreada (corresponde a un segmento circular)

- ⊿LNO: ON=a y OL= $a\sqrt{2}$
- ⊿MTO: OT= $a\sqrt{2}$ y OM=2a
- ⊿ONA: notable de 30° ⇒ OA=2(ON)
- $S = S_{\triangledown AOB} - S_{\Delta AOB}$

$$\Rightarrow S = \frac{120^\circ}{360^\circ}\pi R^2 - R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S=\frac{1}{3}\pi R^2-R^2\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{Como } R=2\sqrt{2}$$

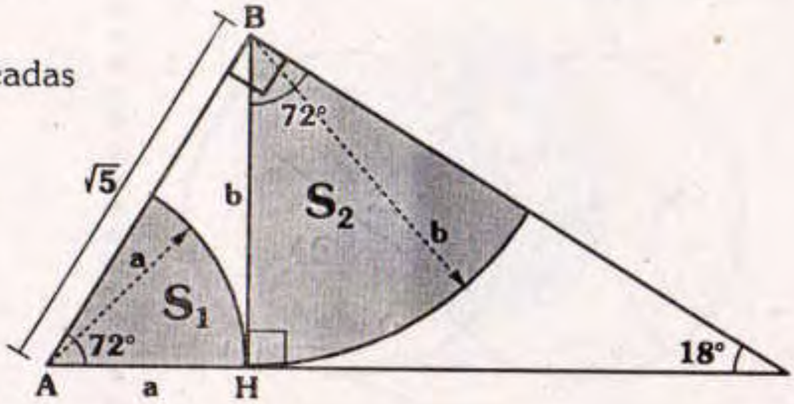
$$\therefore \quad \mathbf{S=\frac{2}{3}(4\pi-3\sqrt{3})}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 47**

Nos piden $S_1 + S_2$

- Notemos que las regiones sombreadas son sectores circulares.




$\Rightarrow$ $S_1=\frac{72°}{360°}\pi a^2$ y $S_2=\frac{72°}{360°}\pi b^2$

$\Rightarrow$ $S_1+S_2=\frac{1}{5}\pi(a^2+b^2)$

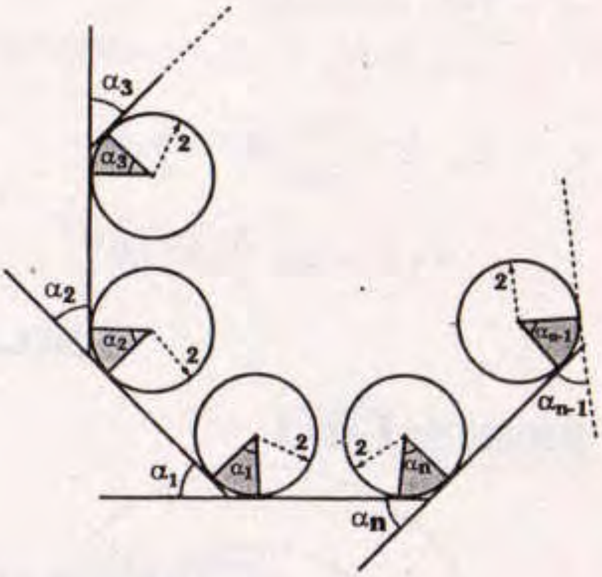
- En ⊿AHB: $a^2+b^2=(\sqrt{5})^2$

$$\therefore \quad \mathbf{S_1+S_2=\pi}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 48**

Nos piden la suma de áreas de los sectores circulares, sea S dicha suma:




- $S=\frac{\alpha_1}{360°}\pi 2^2+\frac{\alpha_2}{360°}\pi 2^2+\alpha_3\pi 2^2+...+\frac{\alpha_n}{360°}\pi 2^2$

$\Rightarrow$ $S=\frac{\pi}{90°}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n)$

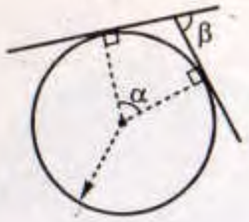
- Usando la observación (siguiente página) y que en todo polígono convexo se cumple:

$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=360°$$

$$\therefore \quad \mathbf{S=4\pi}$$

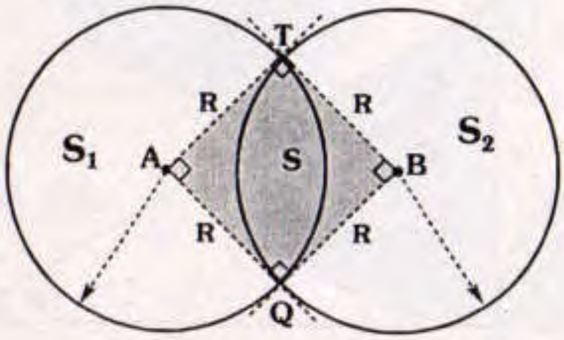
**Clave C**

**Observación**




**Se cumple:** $\alpha=\beta$

## RESOLUCIÓN Nº 49




Nos piden: $S+S_1+S_2$

- Como son ortogonales:

$$m\measuredangle ATB = m\measuredangle AQB = 90°$$

$\Rightarrow$ ATBQ: cuadrado

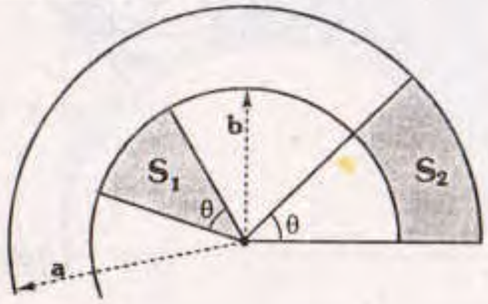
- $S = R^2$

- $S_1 = S_2 = \dfrac{270°}{360°}\pi R^2 = \dfrac{3}{4}\pi R^2$

$$\therefore\ \mathbf{S+S_1+S_2 = \frac{3}{2}\pi R^2 + R^2}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 50




Nos piden a/b

Dato: $S_1=S_2$

- Como $S_1$ es el área del sector circular, entonces:

$$S_1 = \frac{\theta}{360°}\pi b^2$$

- $S_2$ es el área de un trapecio circular

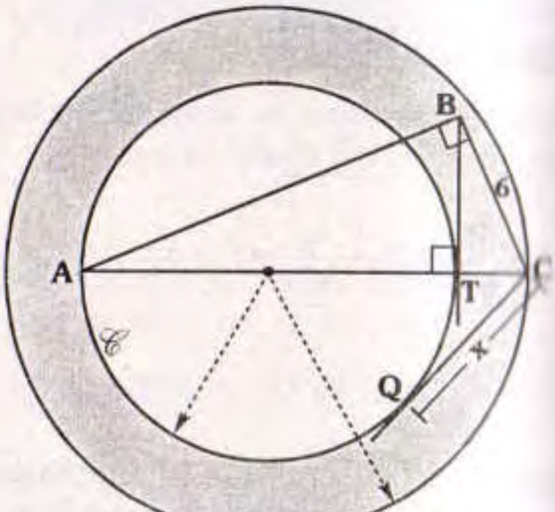
$$S_2 = \frac{\theta}{360°}\pi(a^2-b^2)$$

$$\Rightarrow\ \frac{\theta}{360°}\pi b^2 = \frac{\theta}{360°}\pi(a^2-b^2)$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{a}{b} = \sqrt{2}}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 51




Sea $A_{cc}$ el área de la corona circular

- Se traza el segmento tangente $\overline{CQ}$

- Se sabe $A_{cc} = \pi x^2$.

• En $\mathscr{C}$, por teorema de la tangente

$$x^2=(CT)(CA) \qquad ...(I)$$

• En ⊿ABC: por teorema de relaciones métricas:

$$6^2=(CT)(CA) \qquad ...(II)$$

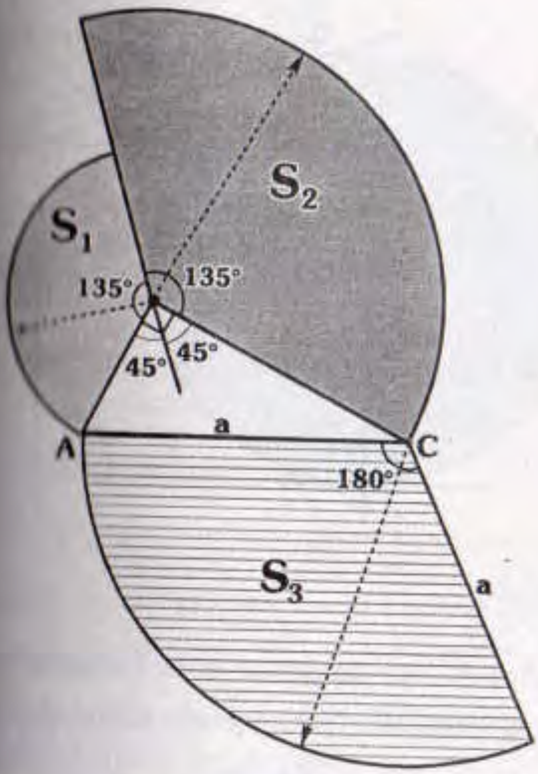
• De (I) y (II): $x=6$

$$\therefore\ A_{cc}=36\pi u^2$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 52**

Nos piden $S_1+S_2$




Podríamos resolver mediante la suma por separado y el teorema de Pitágoras, pero optemos por el teorema sobre semejanza de áreas (página Nº39)

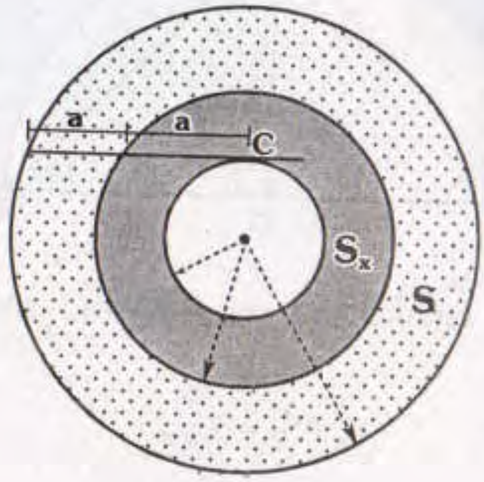
$$S_1+S_2=S_3$$

$$\Rightarrow\ S_1+S_2=\frac{135°}{360°}\pi a^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=\frac{3}{8}\pi a^2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 53**




Piden $S_x$ en función de S

• Notemos que $S_x$ y S son las áreas de las coronas circulares.

• Por teorema: $\qquad S_x=\pi a^2$

$$S_x+S=\pi(2a)^2=4\pi a^2$$

$$\Rightarrow\ S_x+S=4S_x$$

$$\therefore\ \mathbf{S_x=\frac{S}{3}}$$

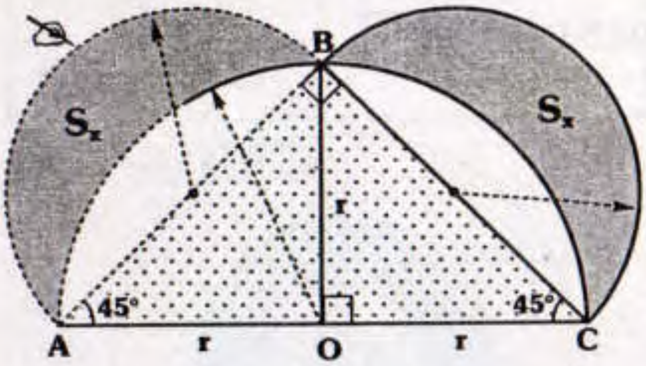
**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 54**

Piden $S_x$ en función de r.

• Para su resolución se podría optar por

una diferencia, pero optemos por el teorema sobre las lúnulas de hipócrates, para ellos completemos.




- Las lúnulas son congruentes, entonces:

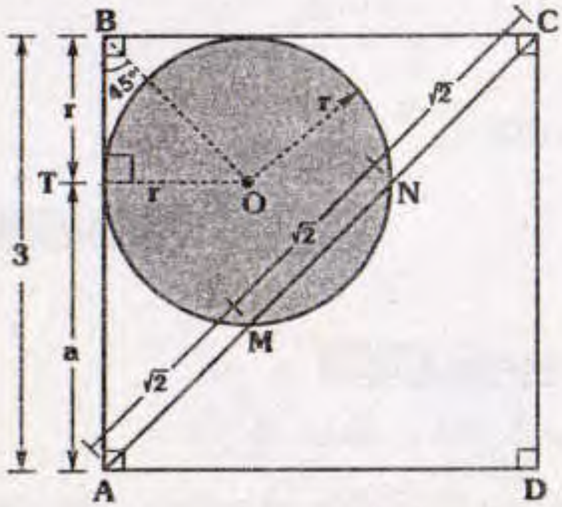
$$S_x + S_x = S_{\Delta AOB}$$

$$2S_x = \frac{(2r)r}{2}$$

$$\therefore\ S_x = \frac{r^2}{2}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 55**




Nos piden $S_\bullet$

- Como $AC = 3\sqrt{2} \Rightarrow AB = 3$
- Sea $AT = a$, por teorema de la tangente

$$a^2 = \sqrt{2}(2\sqrt{2}) \Rightarrow a = 2$$

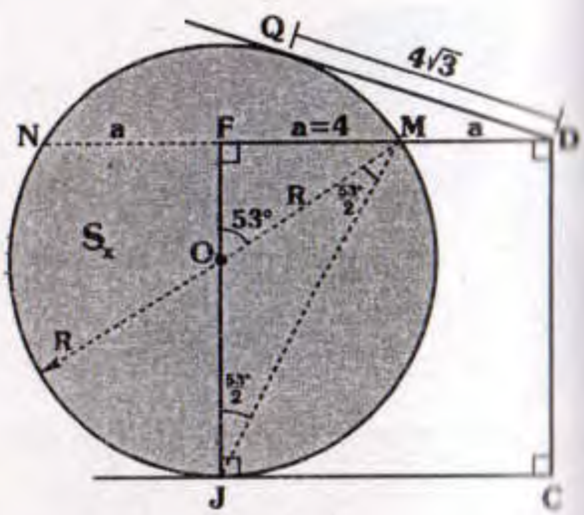
- Como $a + r = 3 \Rightarrow r = 1$

$$\Rightarrow S_\bullet = \pi R^2$$

$$\therefore\ S_\bullet = \pi$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 56**




Piden $S_x$

- Como $\overline{JC}$ es tangente a la circunferencia y $m\measuredangle FJC = 90° \Rightarrow$ el centro O pertenece a $\overline{JF} \Rightarrow FM = FN$
- Por teorema de la tangente.

$$(4\sqrt{3})^2 = a(3a) \Rightarrow a = 4$$

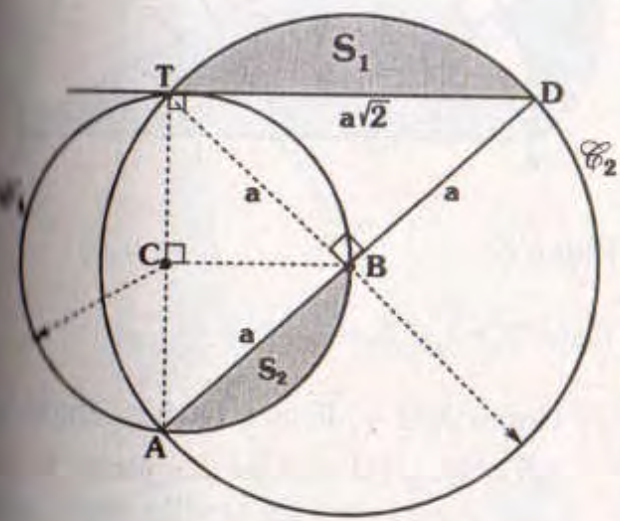
- Como $m\measuredangle MJF = \dfrac{53°}{2} \Rightarrow m\measuredangle FOM = 53°$

- En ⊿FOM: $R=5 \Rightarrow S_x=\pi 5^2$

$$\therefore\ \mathbf{S_x=25\pi}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 57**




Piden: $\dfrac{S_1}{S_2}$

- En $\mathscr{C}_2$, como $\overline{AD}$ es diámetro

$\Rightarrow m\measuredangle ATD=90°$

- En $\mathscr{C}_1$, como T es punto de tangencia y $m\measuredangle ATD=90° \Rightarrow$ el centro de $\mathscr{C}_1$ está en $\overline{AT}$

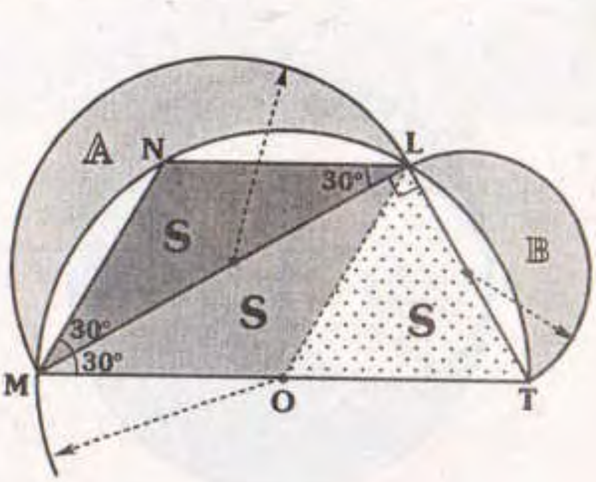
- Luego las regiones sombreadas son semejantes; entonces.

$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{a}\right)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_1}{S_2}=2}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 58**




Sea $S_{\square MNLT}=\mathbb{C}$

Nos piden: $\dfrac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{S_{(MNLT)}}$

- Por teorema de las lúnulas de Hipócrates:

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}=S_{\triangle MLT}$$

- Sea $S_{\Delta MNL}=S$

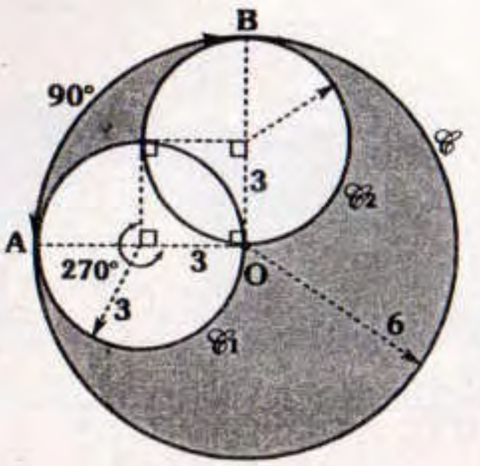
$$\Rightarrow S_{\Delta MOL}=S_{\Delta LOT}=S$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}+\mathbb{B}=2S \text{ y } S_{(MNLT)}=3S$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{\mathbb{A}+\mathbb{B}}{S_{(MNLT)}}=\frac{2}{3}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 59**




Nos piden el área de la región sombreada.

- Sea $S_x$ el área de la región sombreada y $\mathbb{A}$ el área no sombreada.

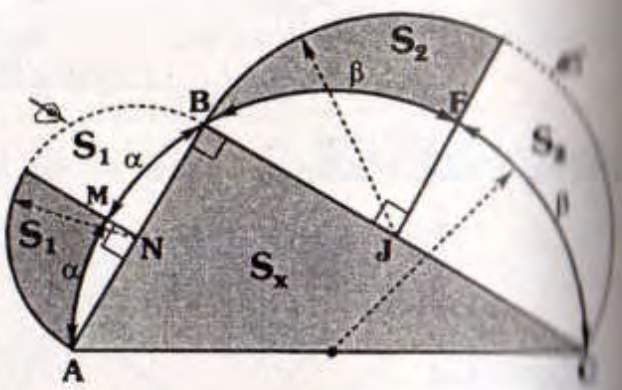
- $\mathbb{A} = 3^2 + 2\left(\frac{270°}{360°}\pi \cdot 3^2\right) = 9 + \frac{27}{2}\pi$

$$\Rightarrow \ S_x = \pi 6^2 - \mathbb{A}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_x = \frac{45}{2}\pi - 9}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 60**




Piden $S_x$

Dato $S_1 = 3$ y $S_2 = 4$

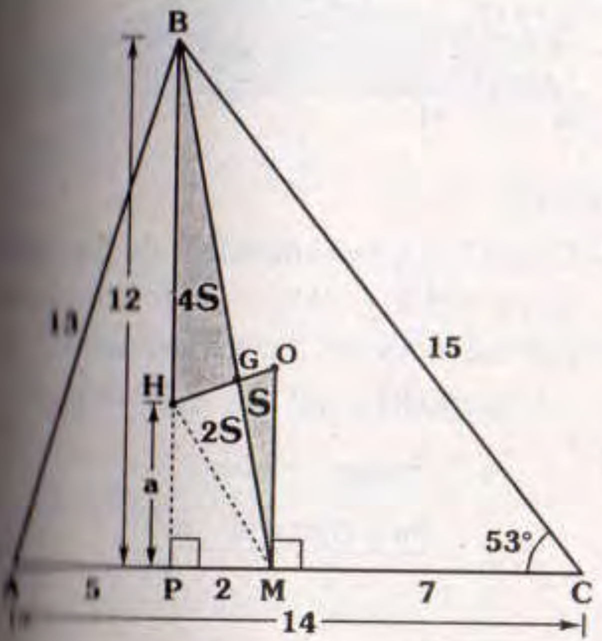
- Como $\overline{MN}$ y $\overline{JF}$ son flechas, entonces AN=NB y BJ=JC, al completar los arcos se apreciará las lúnulas cuyas áreas serán $2S_1$ y $2S_2$.

$$\Rightarrow \ S_x = 2S_1 + 2S_2 = 2(S_1 + S_2)$$

$$\therefore \ \mathbf{S_x = 14}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 61**




Nos piden $S_{\Delta OGM} + S_{\Delta HBG}$

- Como $HG = 2(GO)$ y

  $BG = 2(GM)$

Sea $S_{\Delta OGM} = S$ y

$$\Rightarrow S_{\Delta HGM} = 2S$$

$$S_{\Delta HBG} = 4S$$

- Por teorema de relaciones métricas:

$$BP = 12$$

- Por teorema de semejanza:

$$(PB)(PM) = (AP)(PC)$$

$$\Rightarrow 12a = (5)(9) \Rightarrow a = \frac{15}{4}$$

- Luego: $BH = \dfrac{33}{4}$

- $\underbrace{S_{\Delta MHB}}_{} = \dfrac{(BH)(PM)}{2}$

$$6S = \frac{33}{4} \Rightarrow S = \frac{11}{8}$$

- Finalmente:

$$S_{\Delta OGM} + S_{\Delta HBG} = 5S = \mathbf{\frac{55}{8}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 62**

Piden demostrar:

$$\mathbb{A}_x = \mathbb{A}_2 \left[\frac{\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2}\right]$$

Sabemos que D, A, E y C forman una

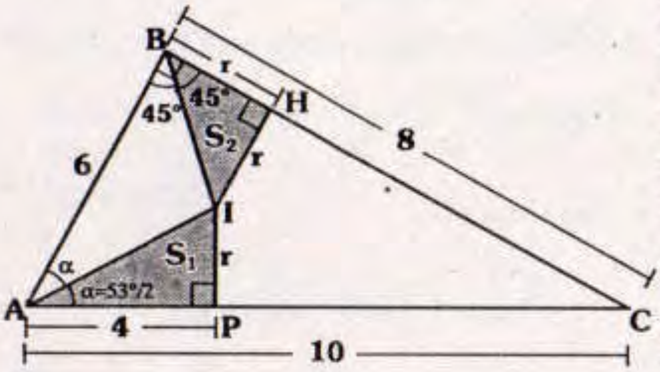
cuaterna:

$$\frac{DA}{AE}=\frac{DC}{EC}$$

$$\frac{\mathbb{A}_x}{\mathbb{A}_2}=\frac{\mathbb{A}_x+\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1}$$

$$\therefore\quad \mathbb{A}_x=\mathbb{A}_2\left[\frac{\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1-\mathbb{A}_2}\right]$$

**RESOLUCIÓN Nº 63**




Nos piden $S_1+S_2$

- como AB=6 y BC=8 ⇒ AC=10 y $m\sphericalangle BAC=53°$ en consecuencia: $\alpha=\frac{53°}{2}$

- Por teorema de Poncelet:

$$6+8=10+2r\ \Rightarrow\ r=2$$

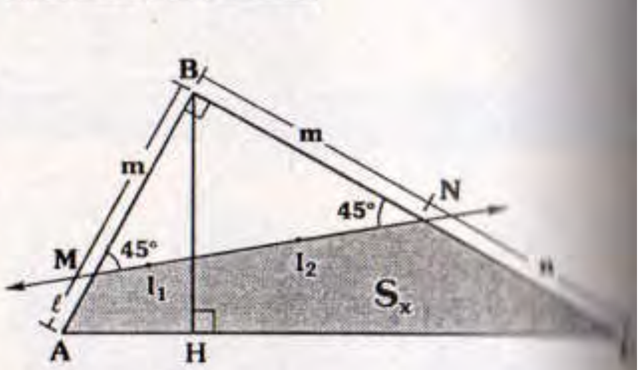
- En ⊿API: AP=4

$$\Rightarrow\quad S_1+S_2=\frac{(2)(4)}{2}+\frac{(2)(2)}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_1+S_2=6u^2}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 64**




Piden $S_x$

- Como $I_1$ e $I_2$ son incentros de los triángulos AHB y BHC respectivamente, por teorema de puntos notables:

$$m\sphericalangle BMN=45°\Rightarrow\quad MB=NB=m$$

- $$S_x=S_{⊿ABC}-S_{⊿ABN}$$

$$S_x=\frac{(m+\ell)(m+n)}{2}-\frac{m^2}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_x=\frac{\ell}{2}(m+n)+\frac{mn}{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 65**

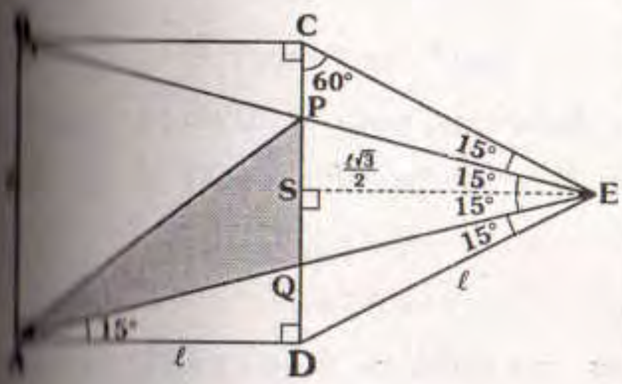
Sea S el área de la región triangular ABC, entonces:

$$\left.\begin{aligned}S&=\frac{ah_1}{2}\\ S&=\frac{bh_2}{2}\\ S&=\frac{ch_3}{2}\end{aligned}\right\}\ S^3=\frac{abch_1h_2h_3}{8}$$

$$\therefore\quad \mathbf{S=\frac{\sqrt[3]{abch_1h_2h_3}}{2}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 66**




Piden $S_{\Delta APQ}$

- Notemos que $AD=DE=CE=\ell \Rightarrow$ los ∆s BCE y ADE son isósceles
- En ⊿ESQ: $SE=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$
- En ⊿SQE: de la observación

$$SQ=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})$$

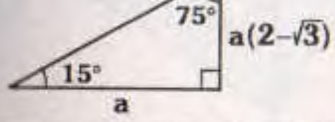
$$\Rightarrow PQ=\ell\sqrt{3}\ (2-\sqrt{3})$$

$$S_{\Delta APQ}=\ell^2\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})$$

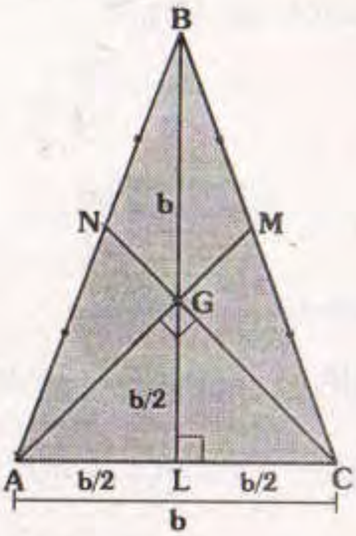
$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta APQ}=\frac{\ell^2}{2}(2\sqrt{3}-3)}$$

**Clave B**

**Observación**




**RESOLUCIÓN Nº 67**



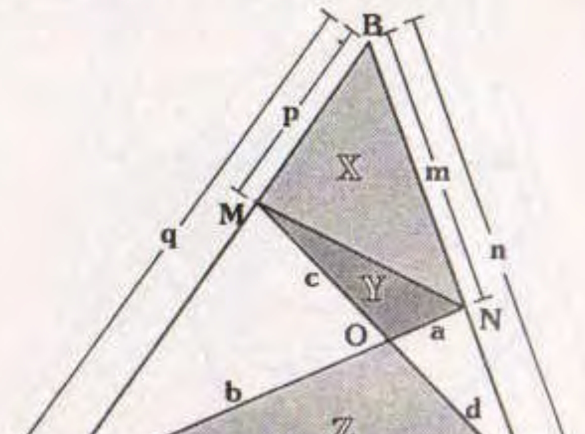

Piden $S_{\Delta ABC}$

- Como G es baricentro, entonces $\overline{BL}$ es mediana y altura por ser AB=BC
- En ⊿AGC: $AL=LC=GL=\frac{b}{2} \Rightarrow BG=b$
- $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}b\left(\frac{3b}{2}\right)$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ABC}=\frac{3}{4}b^2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 68**



Sea S el área de la región triangular ABC

• Por relación de áreas:

$$\frac{S}{X}=\frac{mp}{nq} \qquad ...(I)$$

$$\frac{Z}{Y}=\frac{bd}{ac} \qquad ...(II)$$

• Por teorema de Menelao

– En $\Delta ANB$: $bp(NC) = a(AM)n$

– En $\Delta MBC$: $cq(NC) = d(AM)m$

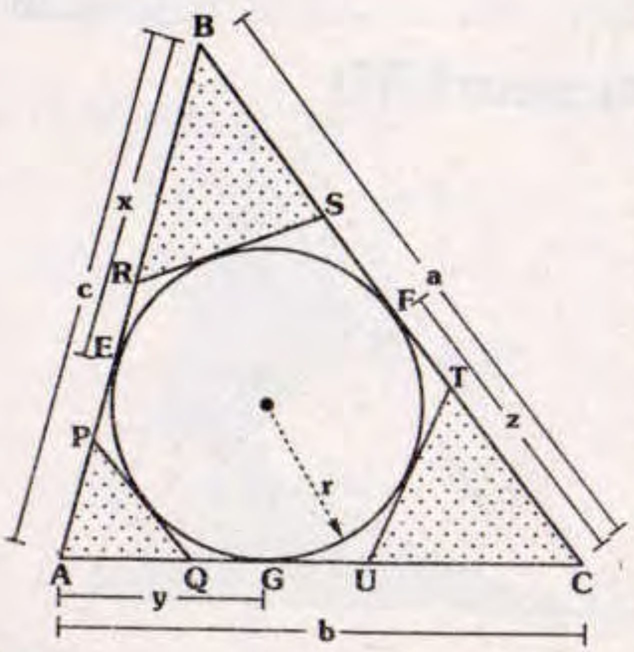
$$\Rightarrow \frac{bp}{cq}=\frac{an}{dm} \Rightarrow \frac{mp}{nq}=\frac{bd}{ac} \qquad ...(III)$$

• De (I), (II) y (III): $\frac{S}{X}=\frac{Z}{Y}$

$$\therefore \ \mathbf{S=\frac{XZ}{Y}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 69**




Piden r

Dato: $(p_{APQ})(p_{RBS})(p_{TCU}) = 336$

$$p_{APQ} + p_{RBS} + p_{TCU} = 21$$

• Sabemos, para el $\Delta RBS$ : $x = p_{RBS}$

• Para los $\Delta$s APQ y TCU:

$$y = p_{APQ}$$
$$z = p_{TCU}$$

$\Rightarrow \ xyz = 336 \ \wedge \ x+y+z=21$

• Para el $\Delta ABC$ : $p=x+y+z$

$$pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \ pr^2=\underbrace{(p-a)}_{y}\underbrace{(p-b)}_{x}\underbrace{(p-c)}_{z}$$

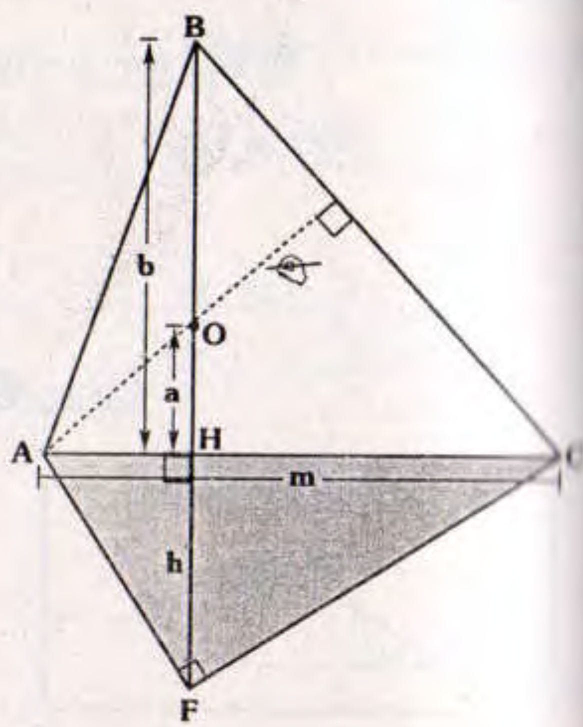
p es el semiperímetro de $\Delta ABC$

$$\Rightarrow 21r^2=336$$

$$\therefore \ \mathbf{r=4}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 70**



Nos piden $S_{\triangle AFC}$

Datos: $mb=32$ y $ma=8$

- $S_{\triangle AFC}=\dfrac{mh}{2}$
- Como O es ortocentro, entonces:

$$(AH)(HC)=ab \quad ....(I)$$

- En el $\triangle AFC$: $h^2=(AH)(HC)...(II)$
- De (I) y (II): $h^2=ab$
- De los datos: $m^2\underbrace{ab}_{h^2}=32\times 8$

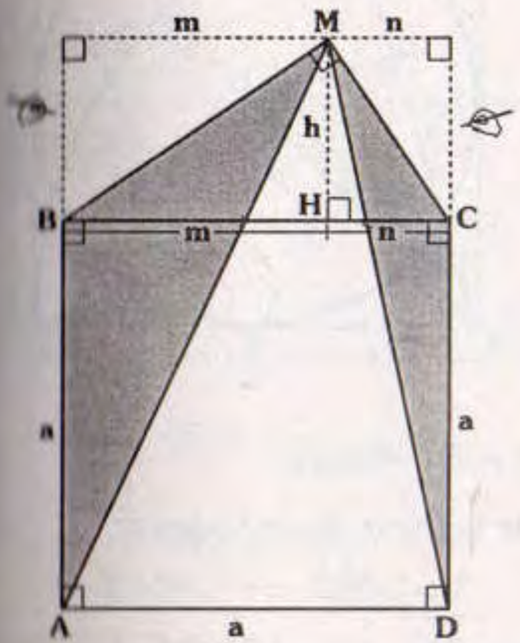
$$\Rightarrow mh=16$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AFC}=\frac{mh}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle AFC}=8}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 71**




Piden $S_{\triangle BMC}$

Datos: $(S_{\Delta ABM})(S_{\Delta MCD})=36$

- $S_{\triangle BMC}=\dfrac{ah}{2}$
- En el $\triangle BMC$: $h^2=mn$
- Por fórmula básica:

$$\left.\begin{matrix} S_{\Delta ABM}=\dfrac{am}{2} \\ S_{\Delta MCD}=\dfrac{an}{2}\end{matrix}\right\}(S_{\Delta ABM})(S_{\Delta MCD})=\frac{a^2mn}{4}=\frac{a^2h^2}{4}$$

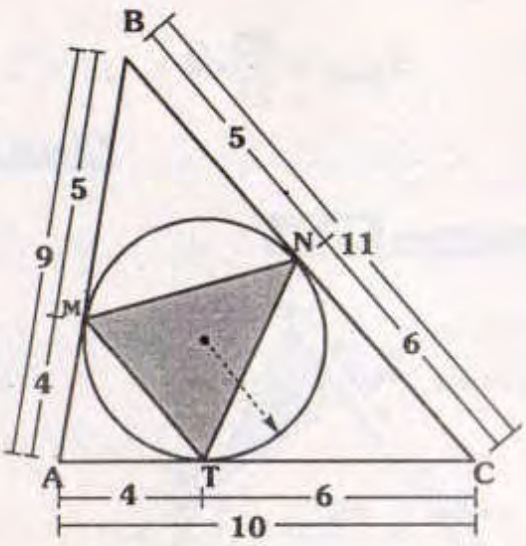
Finalmente:

$$\underbrace{(S_{\Delta ABM})(S_{\Delta MCD})}_{36}=\left(\frac{ah}{2}\right)^2=\left(S_{\triangle BMC}\right)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle BMC}=6}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 72**




Nos piden $S_{\Delta MNT}$

- $p=\dfrac{10+11+9}{2}=15 \Rightarrow AT=15-11=4$
- Por relación de áreas.

$$\frac{S_{\Delta AMT}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{4\times 4}{9\times 10}$$

$$\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{5\times 5}{9\times 11}$$

$$\frac{S_{\Delta CNT}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{6\times 6}{10\times 11}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta AMT}+S_{\Delta MBN}+S_{\Delta CNT}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{4\times 4}{9\times 10}+\frac{5\times 5}{9\times 11}+\frac{6\times 6}{10\times 11} \ldots (I)$$

- Por teorema de Herón:

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{(15)(5)(4)(6)}=30\sqrt{2}$$

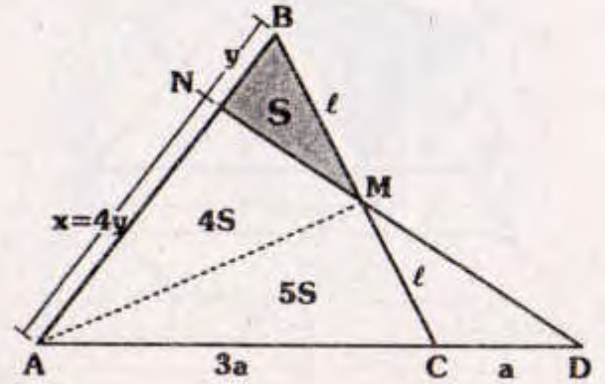
- En (I):
- $S_{\Delta AMT}+S_{\Delta MBN}+S_{\Delta CNT}=\dfrac{25}{33}S_{\Delta ABC}$
- $S_{\Delta MNT}=S_{\Delta ABC}-(S_{\Delta AMT}+S_{\Delta MBN}+S_{\Delta CNT})$

$$S_{\Delta MNT}=30\sqrt{2}-\frac{250}{11}\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta MNT}=\frac{80}{11}\sqrt{2}}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 73




Piden: $\dfrac{S_{\Delta BMN}}{S_{ANMC}}$

- Para el $\Delta ABC$, usemos el teorema de Menelao:

$$x\ell(a)=y\ell(4a) \Rightarrow x=4y$$

- Por relación de áreas:

Sea $S_{\Delta BMN}=S \Rightarrow S_{\Delta ANM}=4S$ y

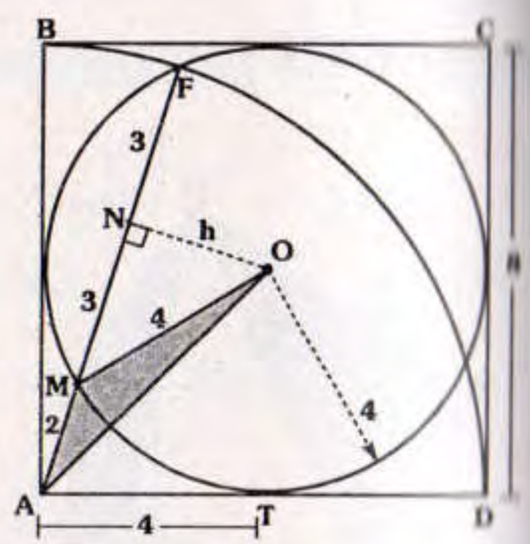
$$S_{\Delta AMC}=5S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BMN}}{S_{ANMC}}=\frac{S}{9S}$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{ANMC}}=\frac{1}{9}}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 74




Nos piden $S_{\Delta AOM}$

- Por teorema de la tangente:

$$4^2=(AM)8 \Rightarrow AM=2$$

$$\Rightarrow MF=6 \text{ y } MN=NF=3$$

En $\measuredangle$ONM:

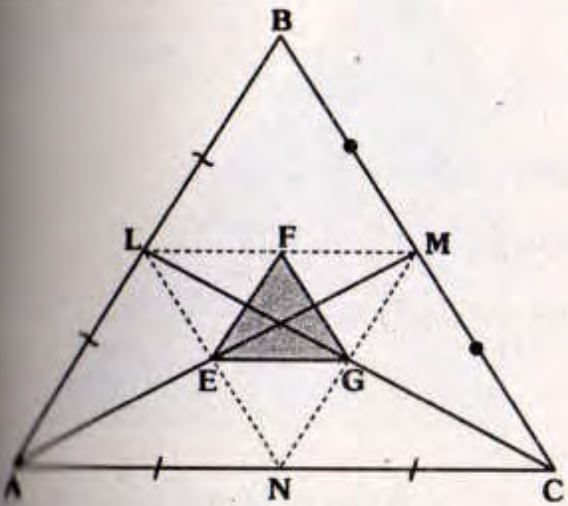
$$h^2+3^2=4^2 \quad \Rightarrow h=\sqrt{7}$$

$$S_{\Delta AOM}=\frac{(2)(\sqrt{7})}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\Delta AOM}=\sqrt{7}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 75**




Nos piden $S_{\Delta EFG}$

Dato: $S_{\Delta ABC}=\mathbb{A}$

- Como M, L y N son puntos medios, entonces:

$$S_{\Delta MNL}=\frac{\mathbb{A}}{4}$$

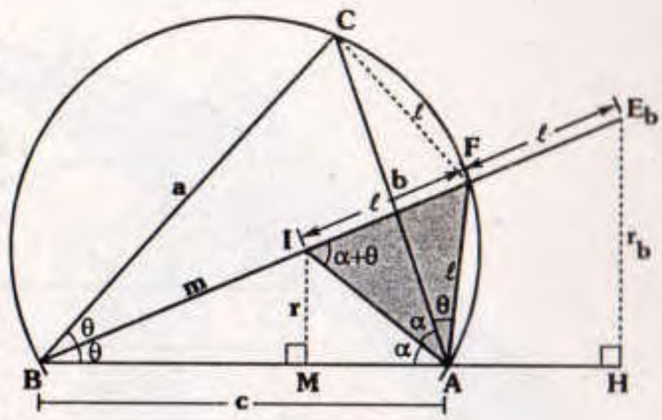
- Para el $\Delta$MNL , E, F y G son puntos medios entonces:

$$S_{\Delta EFG}=\frac{1}{4}S_{\Delta MNL}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\Delta EFG}=\frac{\mathbb{A}}{16}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 76**




Nos piden probar: $S_{\Delta AIF}=\dfrac{bc(r+r_b)}{4(a+c)}$

- Por relación de áreas:

$$\frac{S_{\Delta AIF}}{S_{\Delta BIA}}=\frac{\ell}{m} \Rightarrow S_{\Delta AIF}=\frac{\ell}{m}\cdot\left(\frac{cr}{2}\right) \quad ...(I)$$

- Por teorema de Ptolomeo:

$$b(\ell+m)=a\ell+c\ell \Rightarrow \frac{\ell+m}{\ell}=\frac{a+c}{b} \quad ...(II)$$

- $\measuredangle BMI \sim \measuredangle BHE_b$:

$$\frac{r_b}{r}=\frac{m+2\ell}{m} \Rightarrow \frac{r+r_b}{r}=\frac{2(m+\ell)}{m} \quad ...(III)$$

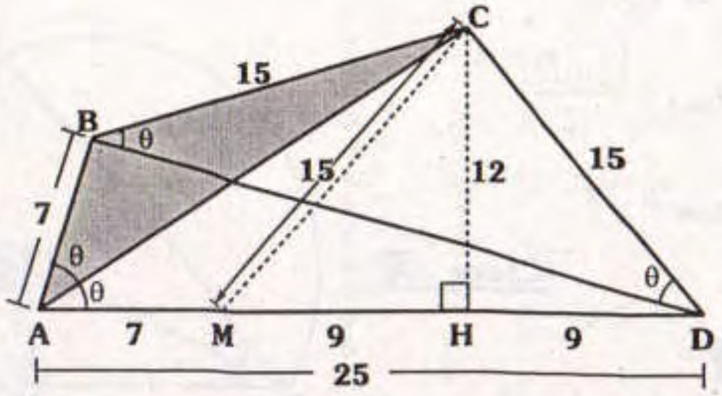
- De (II) y (III):

$$\frac{r+r_b}{r}=\frac{2(a+c)}{b}\cdot\frac{\ell}{m} \Rightarrow \frac{\ell}{m}=\frac{b(r+r_b)}{2r(a+c)} \quad ...(IV)$$

- De (IV) y (I):

$$S_{\Delta AIF}=\frac{bc(r+r_b)}{4(a+c)}$$

**RESOLUCIÓN Nº 77**



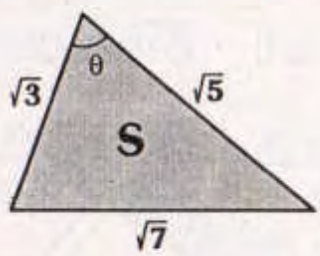

Nos piden $S_{\Delta ABC}$

- Se traza $\overline{CM}$ tal que $AM=AB=7 \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta AMC \Rightarrow MC=15$
- $\Delta MCD$: isósceles, con $MC=CD=15$ y $MD=18$
- En $\Delta MCD$, se traza la altura CH $\Rightarrow MH=HD=9 \Rightarrow CH=12$
- Como $\Delta ABC \cong \Delta AMC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMC}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(7)(12)}{2} \qquad \therefore\ \mathbf{S_{\Delta ABC} = 42\ cm^2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 78**




Nos piden S

- Usemos: $S = \dfrac{(\sqrt{3})(\sqrt{5})}{2}\operatorname{sen}\theta$ ...(I)
- Por teorema de cosenos:

$$\sqrt{7}^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2 - 2(\sqrt{3})(\sqrt{5})\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{15}}$$

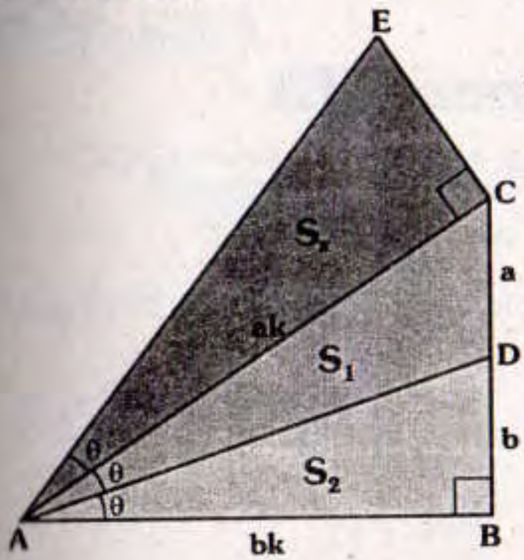
- Como $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{59}}{2\sqrt{15}}$

• En (I): $S=\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{\sqrt{59}}{2\sqrt{15}}$

$$\therefore\ \mathbf{S=\frac{\sqrt{59}}{4}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 79**




Piden $S_x$ en función de $S_1$ y $S_2$

• En ⊿ABC: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}$

• Por teorema de la bisectriz en ⊿ABC:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{a}{b}$$

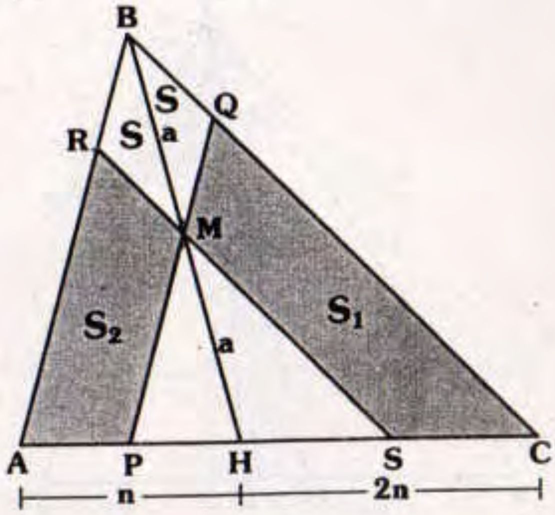
• ⊿ABD ~ ⊿ACE $\Rightarrow$ $\frac{S_x}{S_2}=\left(\frac{ak}{bk}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2$

$$\Rightarrow\ \frac{S_x}{S_2}=\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_x=\frac{S_1{}^2}{S_2}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 80**




Nos piden: $S_1-S_2$

• Dato: $S_{\Delta ABC}=120$

• Como $HC=2(AH)\Rightarrow S_{\Delta ABH}=80$ y $S_{\Delta HBC}=40$

• De la observación:

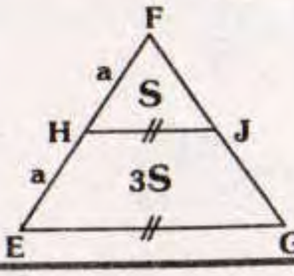
$$S_1+S=\frac{3}{4}(80)=60$$

$$S_2+S=\frac{3}{4}(40)=30$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1-S_2=30}$$

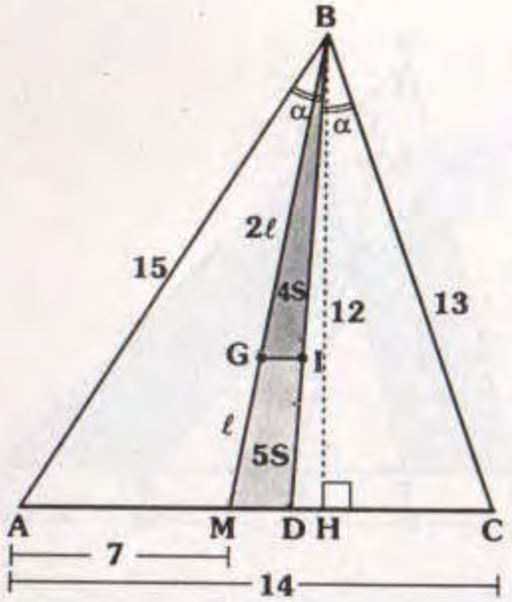
**Clave E**

*Observación*




$S_{EHJG}=\frac{3}{4}S_{\Delta EFG}$

**RESOLUCIÓN Nº 81**




Piden $S_{\Delta BGI}$

- Por teorema del incentro:

$$\frac{BI}{ID}=\frac{15+13}{14}=2$$

- Como G es baricentro ⇒ BG=2(GM)

$$\Rightarrow \overline{GI}//\overline{MD} \Rightarrow \Delta GBI \sim \Delta MBD$$

- Por teorema:

$$\frac{S_{\Delta GBI}}{S_{\Delta MBD}}=\left(\frac{2\ell}{3\ell}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta GBI}=4S \;\; y \;\; S_{\Delta MBD}=9S$$

- Por teorema de la bisectriz.

$$\frac{AD}{DC}=\frac{15}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{\underbrace{AD+DC}_{14}}=\frac{15}{15+13}$$

$$\Rightarrow AD=\frac{15}{2} \Rightarrow MD=\frac{1}{2}$$

- $S_{\Delta MBD}=9S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(12) \Rightarrow S=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta GBI}=\frac{4}{3}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 82**

Sea p el semiperímetro de ABC

Nos piden $S_{\Delta ABC}$

Datos: inradio : 2; AB+BC=18 y AC=6

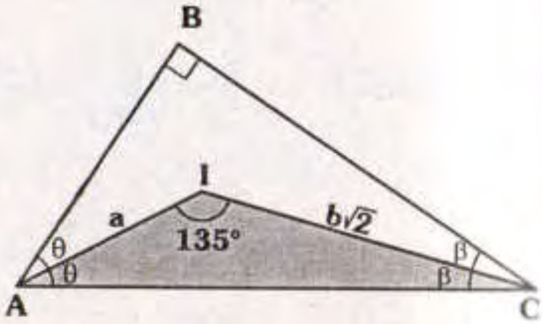
- $p=\frac{AB+BC+AC}{2}=12$

- $S_{\Delta ABC}=p\,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{inradio}}}{r}$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ABC}=24}$$

**Clave**

**RESOLUCIÓN Nº 83**




Piden $S_{\Delta AIC}$

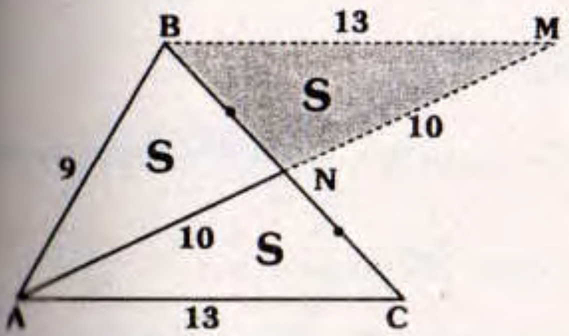
• Como I es incentro $\Rightarrow$ $m\measuredangle AIC=135°$

$$S_{\Delta AIC}=\frac{ab\sqrt{2}}{2}\text{sen}135°$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_{\Delta AIC}=\frac{ab}{2}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 84**




Nos piden $S_{\Delta ABC}$

• Se prolonga $\overline{AN}$ hasta M tal que NM=10

$$\Rightarrow \Delta ANC\cong\Delta MNB\Rightarrow BM=13$$

• $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABM}$

• Por teorema de Herón:

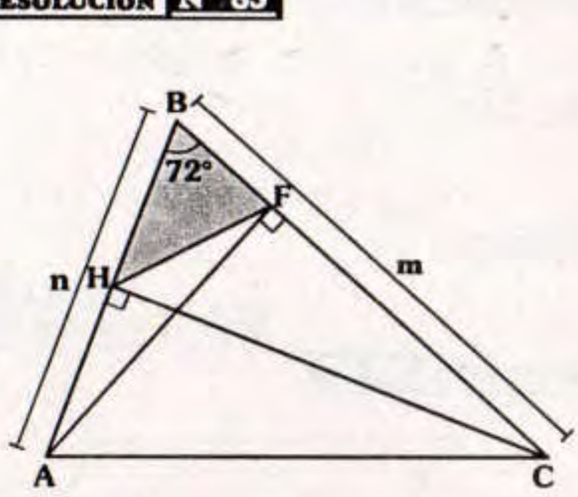
• Semiperímetro del $\Delta ABM$: **21**

$$\Rightarrow S_{\Delta ABM}=\sqrt{21(1)(12)(8)}$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_{\Delta ABC}=12\sqrt{14}}$$

**Clave C**

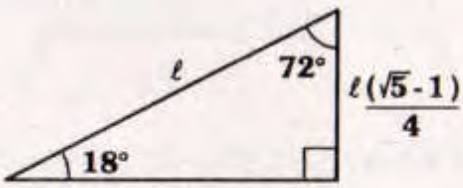
**RESOLUCIÓN Nº 85**




Dato: $S_{\Delta HBF}=(a-b\sqrt{5})S_{\Delta ABC}$

Nos piden: $\frac{a}{b}$

Usemos:




• En ⊿AFB y ⊿CHB:

$$BF=\frac{n(\sqrt{5}-1)}{4}\ \text{ y }\ BH=\frac{m(\sqrt{5}-1)}{4}$$

• Por razón de áreas:

$$\frac{S_{\Delta HBF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(BF)(BH)}{mn}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{5}$$

• Del dato: $a=\frac{3}{8}$ y $b=\frac{1}{8}$

$$\therefore\quad \mathbf{\frac{a}{b}=3}$$

**Clave B**

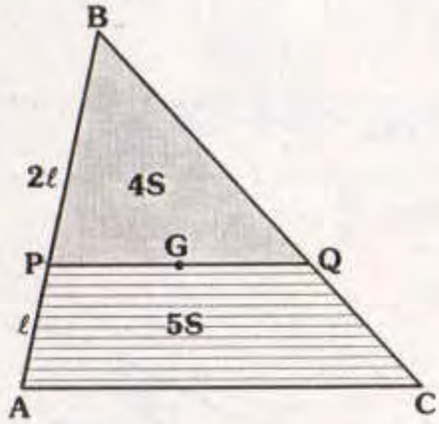
**RESOLUCIÓN Nº 86**

Como el inradio es 1, entonces su lado mide $2\sqrt{3}$.

$$\Rightarrow\ S_{\Delta ABC}=(2\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 87**




Piden $S_{\square APQC}$

Datos: $S_{\Delta ABC}=ku^2$

- Como G es baricentro y $\overline{AC}//\overline{PQ}$

$$\Rightarrow\ BP=2(AP)$$

- $\Delta PBQ\sim\Delta ABC\Rightarrow\ \dfrac{S_{\Delta PBQ}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\dfrac{2\ell}{3\ell}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

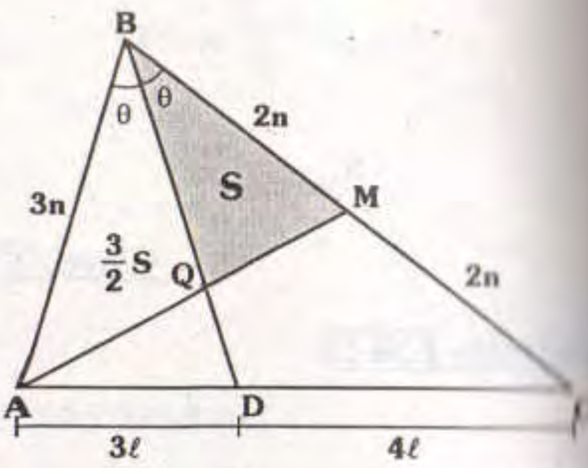
$$\Rightarrow\ S_{\Delta PBQ}=4S\ \text{ y }\ S_{\square APQC}=5S$$

- Como $\underbrace{S_{\Delta ABC}}_{9S}=k\ \Rightarrow\ S=\dfrac{1}{9}k$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square APQC}=\frac{5}{9}k}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 88**




Nos piden $S_{\Delta ABC}$

Dato: $S_{\Delta BQM}=S$

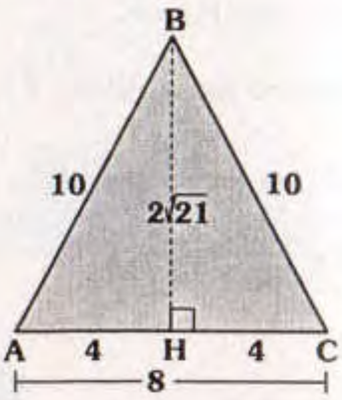
- Como $\overline{BD}$ es bisectriz $\Rightarrow\ \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{4}$
- Sea $BM=MC=2n\ \Rightarrow\ AB=3n$
- Por relación de áreas en $\Delta ABM$:

$$S_{\Delta ABQ}=\frac{3}{2}S\ \Rightarrow\ S_{\Delta ABM}=\frac{5}{2}S$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ABC}=5S}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 89**



Nos piden $S_{\Delta ABC}$

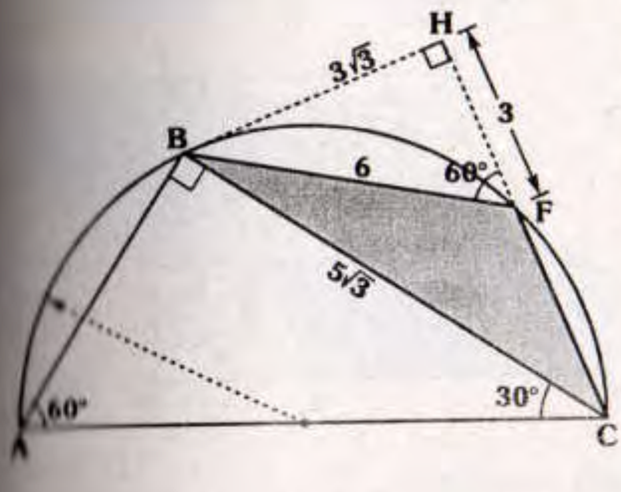
- Se podría optar por el teorema de Herón, pero como el $\Delta ABC$ es isósceles, optemos por la altura BH $\Rightarrow AH=HC=4$.
- En $\triangle CHB$: $BH=2\sqrt{21}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{(8)2\sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ABC}=8\sqrt{21}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 90**




Nos piden $S_{\Delta BFC}$

- Se prolonga $\overline{CF}$ y se traza $\overline{BH}\perp\overline{CF}$ (H en $\overleftrightarrow{FC}$)
- $\triangle BHF$: notable de 30° y 60°

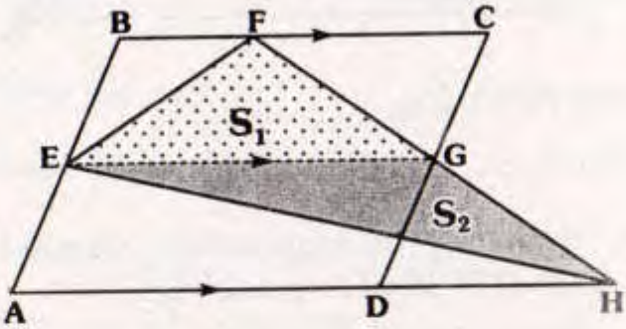
$$\Rightarrow BH=3\sqrt{3}\quad y\quad HF=3$$

- $\triangle BHC$: $HC=4\sqrt{3}\ \Rightarrow\ FC=4\sqrt{3}-3$
- $$S_{\Delta BFC}=\frac{(4\sqrt{3}-3)3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta BFC}=\frac{9}{2}(4-\sqrt{3})}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 91**




Nos piden $S_{\Delta EFG}$

Dato: $S_{\square ABCD}=S$

- Como $AE=DG \Rightarrow$ AEGD y EBCG son paralelogramos.
- Sea $S_1=S_{\Delta EFG}$ y $S_2=S_{\Delta EGH}$
- Por teorema:

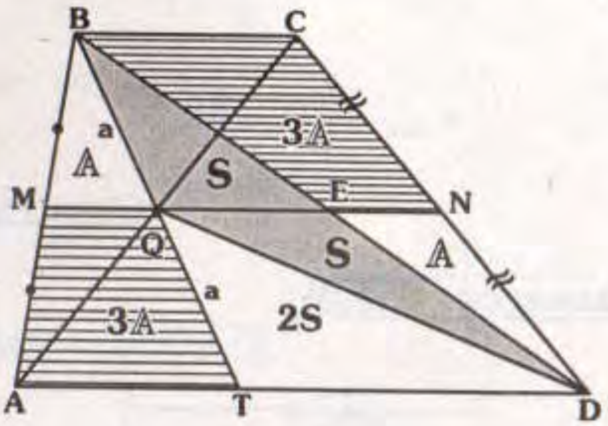
$$S_1=\frac{S_{\square EBCG}}{2}\quad y\quad S_2=\frac{S_{\square AEGD}}{2}$$

$$\Rightarrow S_1+S_2=\frac{S_{\square EBCG}+S_{\square AEGD}}{2}=\frac{S_{\square ABCD}}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=\frac{S}{2}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 92**




Nos piden $S_{\Delta BDQ}$

Datos: $S_{\square MBCN}=S_2$ y $S_{\square AMND}=S_1$

- Como $\overline{MN}$ es base media, entonces BQ=QT, BE=ED y MQ=EN.
- Como consecuencia de lo anterior:

$$S_{\Delta MBQ}=S_{\Delta NDE}=\mathbb{A}$$

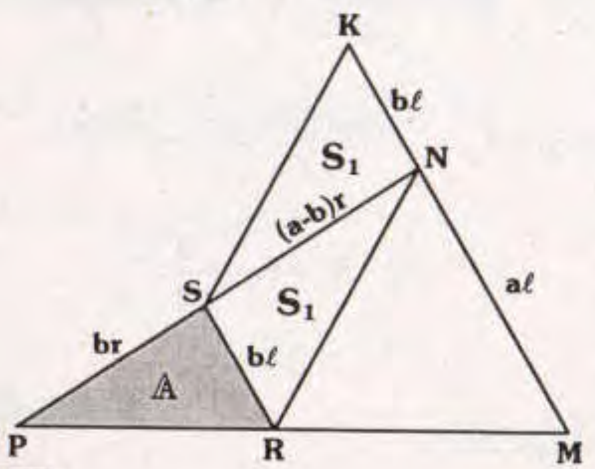
$$\Rightarrow S_{\square AMQT}=S_{\square BCNE}=3\mathbb{A}$$

- $$\left.\begin{array}{l} S_1=4\mathbb{A}+3S \\ S_2=4\mathbb{A}+S \end{array}\right\} S_1-S_2=\underbrace{2S}_{S_{\Delta BQD}}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta BQD}=S_1-S_2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 93**




Nos piden $S_{\square RSKN}$

- En $\square$RSKN: $\quad S_{\square RSKN}=2S_1$
- Como $\overline{RS}//\overline{MN}\ \Rightarrow\ \dfrac{PS}{PN}=\dfrac{b}{a}$

$$\Rightarrow PS=br\ \wedge\ SN=(a-b)r$$

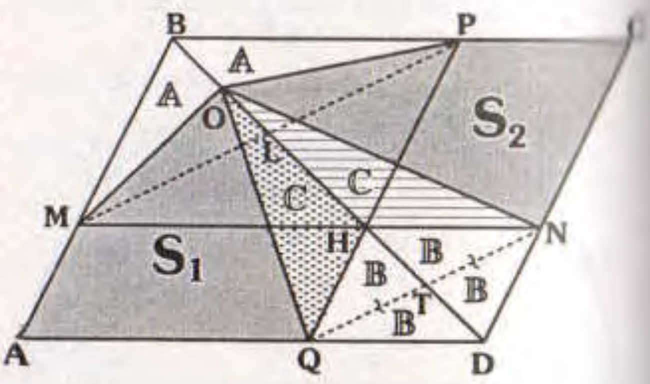
- Por razón de áreas:

$$\frac{S_1}{\mathbb{A}}=\frac{a-b}{b}\ \Rightarrow\ S_1=\left(\frac{a-b}{b}\right)\mathbb{A}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square RSKN}=\frac{2(a-b)}{b}\mathbb{A}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 94**




Nos piden $S_2$

Dato: $S_1=17u^2$

- Como BPH y QHND son paralelogramos, entonces: ML=LP y QT=TN
- Luego: $\quad S_{\Delta OMB}=S_{\Delta OPB}=\mathbb{A}$

$$S_{\Delta OQH}=S_{\Delta ONH}=\mathbb{C}$$

- Finalmente:

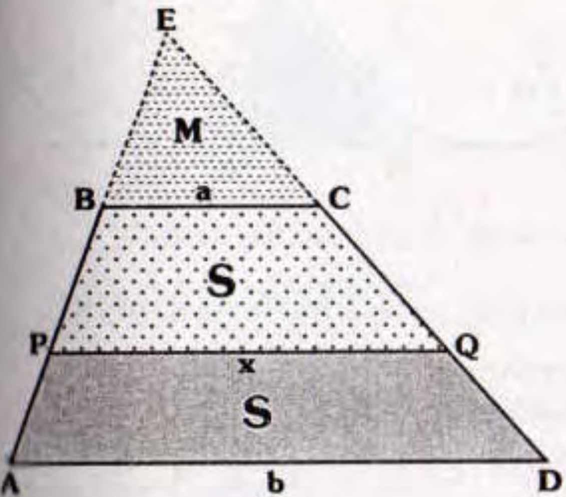
$$S_1+\mathbb{A}+\mathbb{C}+2\mathbb{B}=S_2+\mathbb{A}+\mathbb{C}+2\mathbb{B}$$

$\Rightarrow \quad S_1 = S_2$

$\therefore \quad \mathbf{S_2 = 17u^2}$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 95**




Piden x en función de a y b.

- $\Delta PEQ \sim \Delta BEC$

$$\Rightarrow \frac{S+M}{M} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{S}{M} = \frac{x^2-a^2}{a^2} \qquad ...(I)$$

- $\Delta AED \sim \Delta BEC$

$$\Rightarrow \frac{2S+M}{M} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{2S}{M} = \frac{b^2-a^2}{a^2} \qquad ...(II)$$

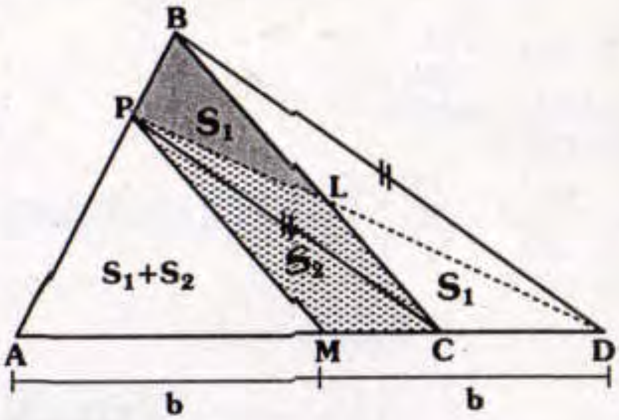
- De (I) y (II):

$$2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right) = \frac{b^2-a^2}{a^2}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 96**




Piden $S_{\triangle MPBC}$

Dato: $S_{\Delta ABC} = 16$

- Sea $S_{\triangle MPBC} = S_{\Delta PBL} + S_{\triangle MPLC} = S_1 + S_2$
- Como $\overline{PC} // \overline{BD} \Rightarrow S_{\Delta PLB} = S_{\Delta CLD} = S_1$
- Debido a que AM=MD

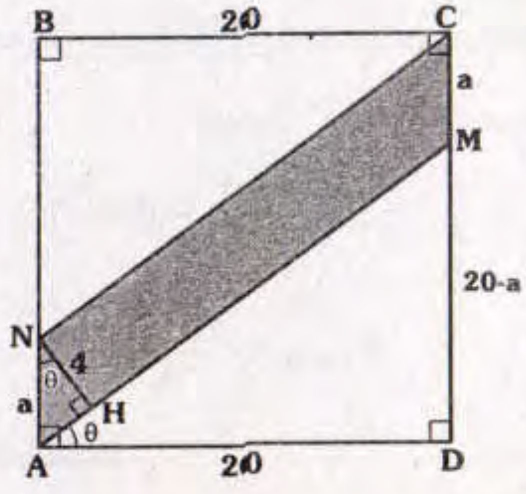
$\Rightarrow S_{\Delta APM} = S_{\Delta MPD} = S_1 + S_2$

$\Rightarrow 2(S_1+S_2) = 16 \Rightarrow S_1 + S_2 = 8$

$\therefore \; \mathbf{S_{\triangle MPBC} = 8}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 97**



Nos piden $S_{\square AMCN}$

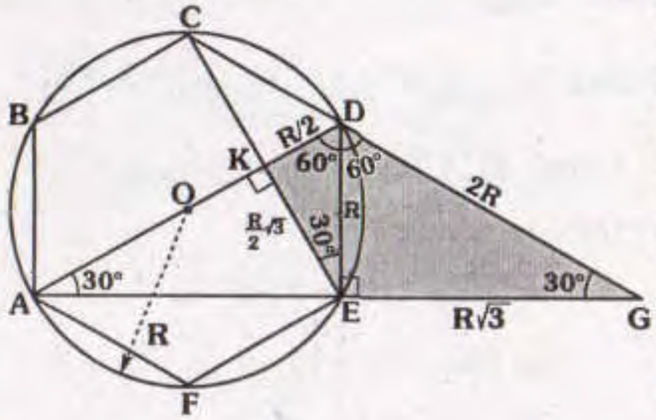
- $S_{\square AMCN} = 20a$
- $\triangle AHN \sim \triangle ADM$

$$\Rightarrow \frac{20-a}{20} = \frac{\sqrt{a^2-16}}{4} \Rightarrow a = 5$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\square AMCN} = 100}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 98




Nos piden $S_{(EKDG)}$

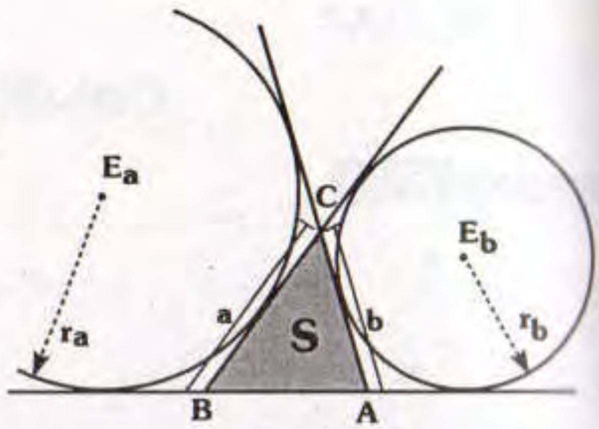
- Como ABCDEF es un hexágono regular, entonces $AD=2R$, $DE=R$, $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ y $m\measuredangle ADE = m\measuredangle EDG = 60°$
- $\triangle ADG$: isósceles
- $S_{(EKDG)} = S_{\triangle EKD} + S_{\triangle DEG}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}(R)(R\sqrt{3})$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{(EKDG)} = \frac{5R^2\sqrt{3}}{8}}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 99




Nos piden S en función de a, b, $r_a$ y $r_b$

- Sea p el semiperímetro del $\triangle ABC$
- Entonces:

$$S = r_b(p-b) \quad \Rightarrow \quad \frac{S}{r_b} = p - b \quad \ldots(I)$$

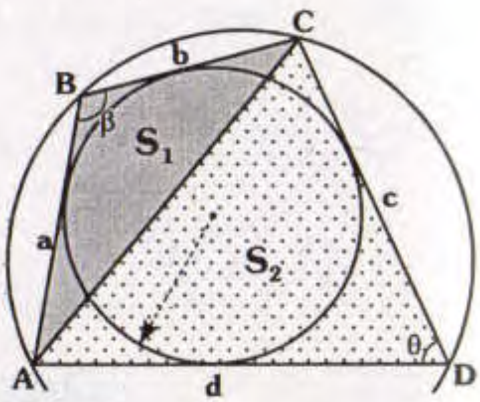
$$S = r_a(p-a) \quad \Rightarrow \quad \frac{S}{r_a} = p - a \quad \ldots(II)$$

- De (I) y (II): $\quad \dfrac{S}{r_b} - \dfrac{S}{r_a} = a - b$

$$\therefore \quad \mathbf{S = \frac{r_a r_b (a-b)}{r_a - r_b}}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 100



Sea $S_1$: área de ABC

$S_2$: área de ADC

Nos piden $S_1$

• Como $\beta+\theta=180° \Rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{ab}{cd}$

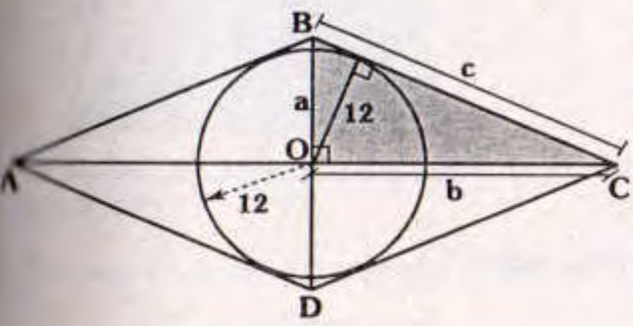
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_1+S_2}=\frac{ab}{ab+cd}$$

• Como $S_1+S_2=\sqrt{abcd}$

$$\therefore \ \mathbf{S_1=\frac{ab\sqrt{abcd}}{ab+cd}}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 101




Nos piden $S_{(ABCD)}$

Dato $AC+BD=70$

• Como "O" es centro, entonces: $a+b=35$

• En ⊿BOC: $ab=12c$

También: $a^2+b^2=c^2$

$$\Rightarrow (a+b)^2=c^2+2ab$$

$$35^2=c^2+24c$$

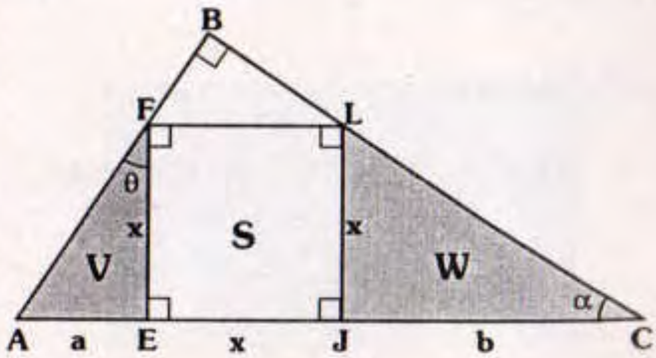
$$25(25+24)=c(c+24) \Rightarrow c=25$$

• $S_{(ABCD)}=4S_{\Delta BOC}=4\frac{(25)(12)}{2}$

$$\therefore \ \mathbf{S_{(ABCD)}=600}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 102




Nos piden S

• $S=x^2$; $V=\frac{ax}{2}$ y $W=\frac{bx}{2}$

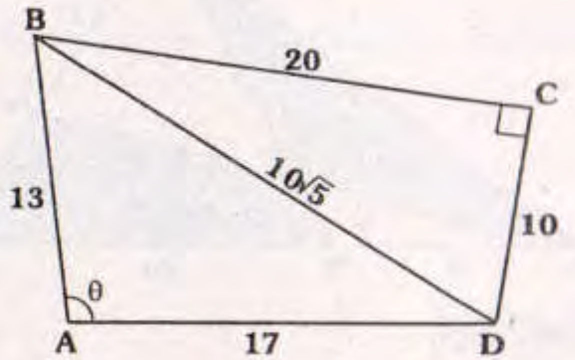
• ⊿AEF ~ ⊿LJC

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b} \Rightarrow x^2=ab \Rightarrow 4VW=\underbrace{ab\cdot x^2}_{S^2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S=2\sqrt{VW}}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 103



Nos piden $S_{(ABCD)}$

- $S_{(ABCD)} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}$ ...(I)

- $S_{\Delta BCD} = \dfrac{(10)(20)}{2} = 100$ ...(II)

- $S_{\Delta ABD} = \dfrac{(13)(17)}{2}\text{sen}\theta$ ...(III)

- En $\Delta ABD$:

$$(10\sqrt{5})^2 = 13^2 + 17^2 - 2(13)(17)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{21}{(13)(17)}$$

- Como

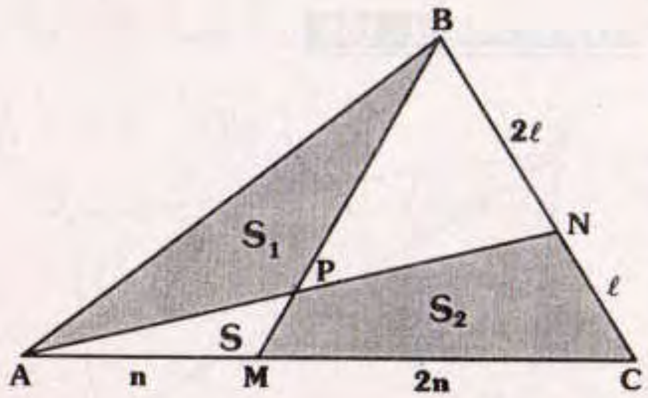
$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{220}{(13)(17)}$$

- En (III): $S_{\Delta ABD} = 110$ ...(IV)
- De (IV), (II) y (I):

$$\mathbf{S_{(ABCD)} = 210}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 104**




Nos piden $S_2$

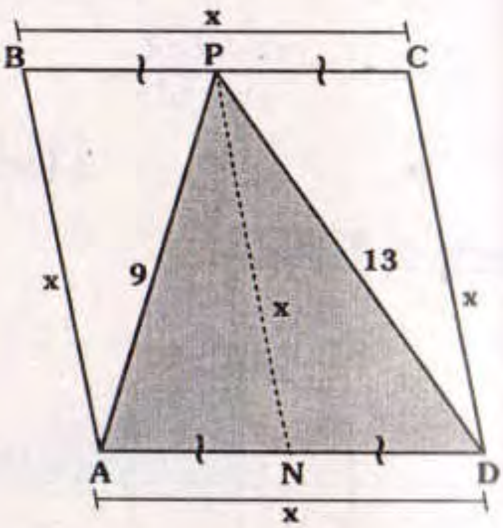
- Dato $S_1 = 10$
- Del gráfico:

$$\left.\begin{aligned} S_1 + S &= \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \\ S_2 + S &= \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \end{aligned}\right\} S_1 = S_2$$

$$\therefore \mathbf{S_2 = 10}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 105**




Nos piden $S_{(ABCD)}$

- Se traza $\overline{PN} // \overline{CD}$ (N en $\overline{AD}$)
- Por teorema del cálculo de la mediana:

$$9^2 + 13^2 = 2x^2 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = 10$$

- Por teorema de Herón:

$$S_{\Delta APD} = \sqrt{16(3)(7)(6)}$$

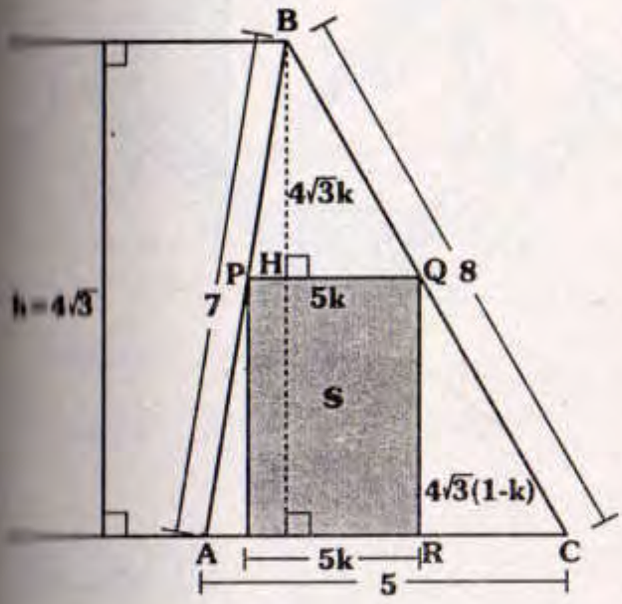
$$S_{\Delta APD} = 12\sqrt{14}$$

Como $S_{(ABCD)} = 2(S_{\Delta APD})$

$$\therefore\ \mathbf{S_{(ABCD)} = 24\sqrt{14}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 106**




Nos piden el área máxima de la región sombreada.

• Por teorema del cálculo de la altura:

$$h = \frac{2}{5}\sqrt{10(10-8)(10-7)(10-5)} = 4\sqrt{3}$$

• $\Delta ABC \sim \Delta PBQ$

$$\Rightarrow PQ = 5k \ \text{ y } \ BH = 4\sqrt{3}k$$

• Sea S el área de la región sombreada.

$$S = 5k.4\sqrt{3}(1-k) = 20\sqrt{3}(k-k^2)$$

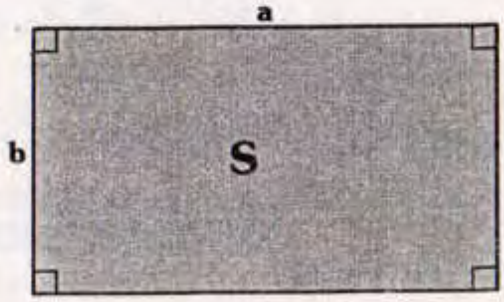
$$\Rightarrow S = 20\sqrt{3}\left[\frac{1}{4} - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right]$$

• Como S es máximo $\Rightarrow\ k - \frac{1}{2} = 0$

$$\therefore\ \mathbf{S = 5\sqrt{3}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 107**




Datos S = 60 y $a \wedge b \in \mathbb{Z}$

Nos piden el perímetro máximo.

- Como ab=60, sin pérdida de generalidad: a>b
- Como a y b son enteros analicemos los divisores; así:

| a | 60 | 30 | 20 | 15 | 12 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

- Notemos que el perímetro máximo es para: a=60 y b=1

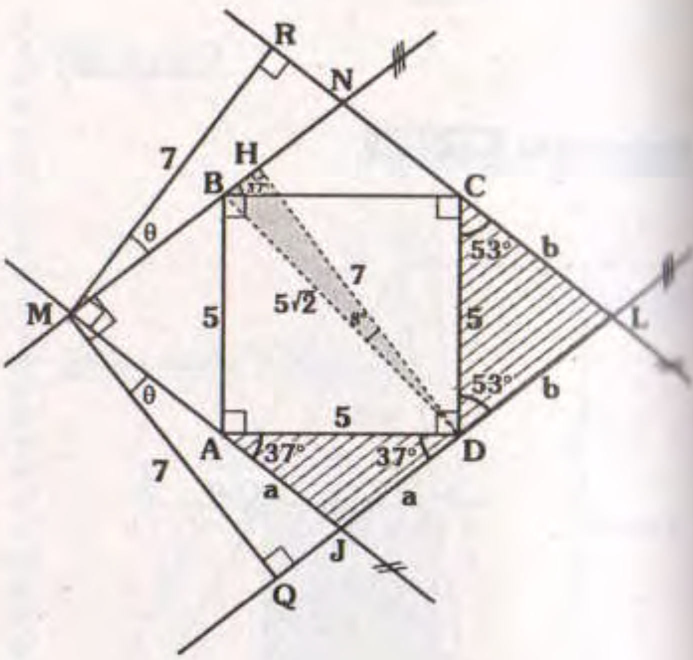
∴ Perímetro máximo: **122u**

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 108**

Nos piden $S_{(MNLJ)}$

- $\measuredangle MQJ \cong \measuredangle MRN \Rightarrow MN=MJ$, es decir MNLJ es un rombo.
- Se traza $\overline{DH} \perp \overline{MN} \Rightarrow \measuredangle BHD$ notable de 8°
- Si hacemos algo parecido desde "C", al trazar la perpendicular habrán dos posibilidades, si el pie esta en $\overleftrightarrow{AM} \Rightarrow$ MNLJ es cuadrado, si dicho pie está en $\overline{AJ} \Rightarrow \Delta AJD$: isósceles
- En $\Delta AJD$ y $\Delta DCL$:




$$a=\frac{25}{8} \text{ y } b=\frac{25}{6} \Rightarrow a+b=\frac{175}{24}$$

$$\Rightarrow S_{(MNLJ)}=7\left(\frac{175}{24}\right)=\mathbf{\frac{1225}{24}}$$

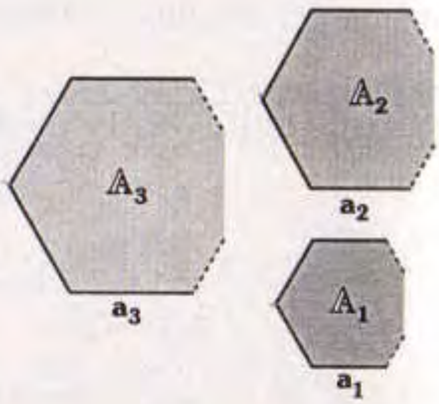
**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 109**

Piden $a_3$

Dato: $\mathbb{A}_3=\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2$

- Como los tres polígonos tienen igual cantidad de lados, entonces son semejantes.
- Por teorema:



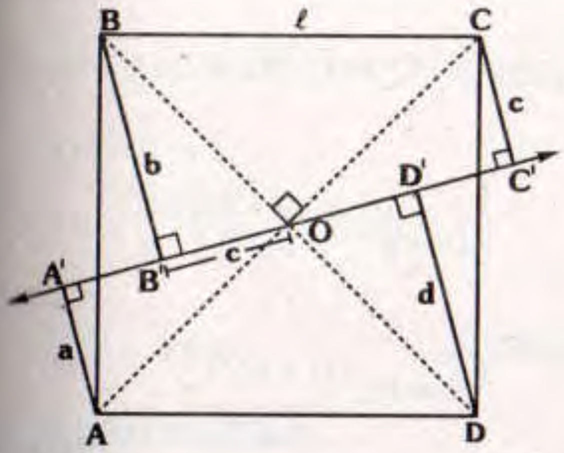

$$\frac{\mathbb{A}_3}{(a_3)^2}=\frac{\mathbb{A}_2}{(a_2)^2}+\frac{\mathbb{A}_1}{(a_1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbb{A}_3}{(a_3)^2}=\frac{\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_1}{(a_2)^2+(a_1)^2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{a_3=\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 110**




Piden $S_{(ABCD)}$

Dato: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100$

- Notemos: $a=c$ y $b=d$
- $\triangle BB'O \cong \triangle OC'C \Rightarrow OB' = c$

$$\Rightarrow (OB)^2 = b^2 + c^2$$

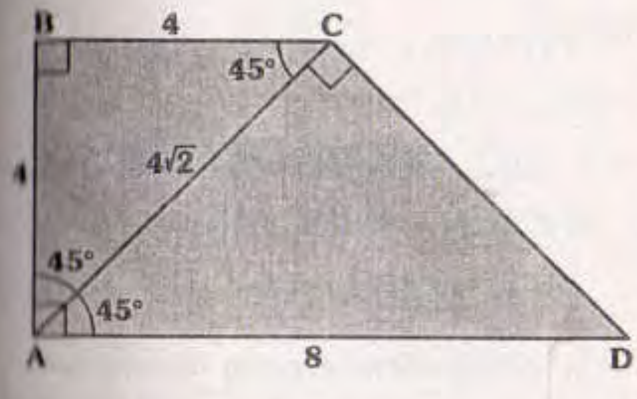
- Del dato: $b^2 + c^2 = 50$

$$\Rightarrow OB = 5\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 10$$

$\therefore$ $\mathbf{S_{(ABCD)} = 100}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 111**




Piden $S_{(ABCD)}$

- Como ABCD es trapecio y $\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$ (pues $m\measuredangle ABC = 90°$ y $m\measuredangle BCD = 135°$)

$$\Rightarrow \overline{AD} // \overline{BC}$$

- $$S_{(ABCD)} = \left(\frac{8+4}{2}\right).4$$

$\therefore$ $\mathbf{S_{(ABCD)} = 24}$

**Clave B**

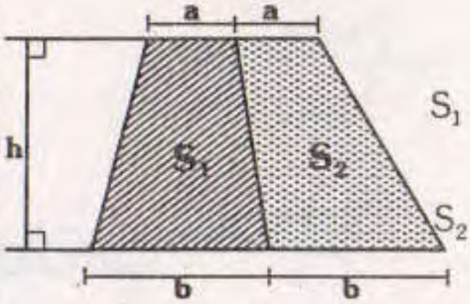
**RESOLUCIÓN Nº 112**

**I. Es verdadero**

Estamos considerando porsupuesto un cuadrilátero plano, ya fue demostrado en la página Nº29.

**II. Es verdadero**

Veamos el gráfico:

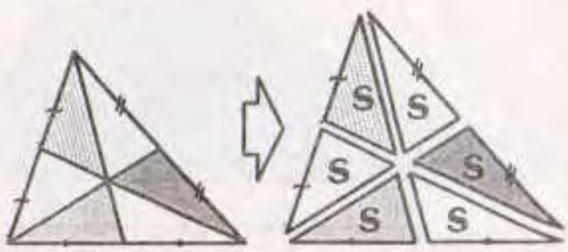



$$S_1 = \left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

$$S_2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

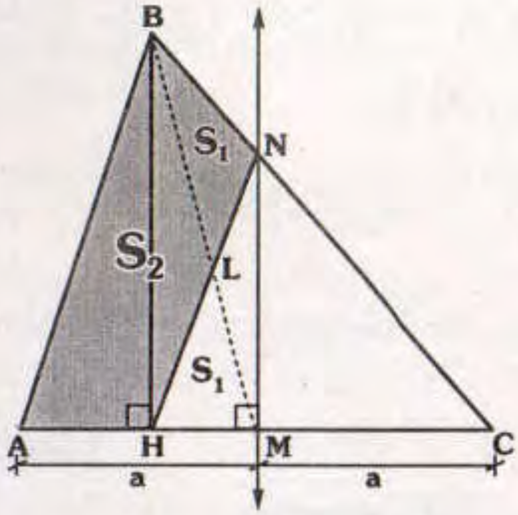
De donde: $S_1 = S_2$

**III. Es Verdadero**




**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 113**




Nos piden: $S_{\square ABNH}$

Dato: $S_{\Delta ABC}=18$

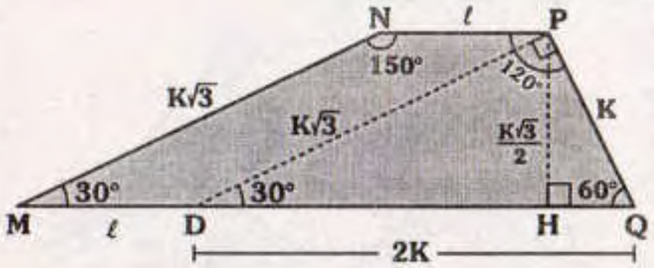
- Como $\overline{BH}//\overline{NM}$ $\Rightarrow$ $S_{\Delta HLM}=S_{\Delta BLN}=S_1$

- $S_{\square ABNH}=\underbrace{S_1+S_2}_{S_{\Delta ABM}}$, $\quad S_{\Delta ABM}=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{2}$

$\therefore$ $\mathbf{S_{\square ABNH}=9}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 114**




Piden $S_{\square MNPQ}$

- Se traza $\overline{PD}//\overline{NM}$ $\Rightarrow$ $PD=k\sqrt{3}$

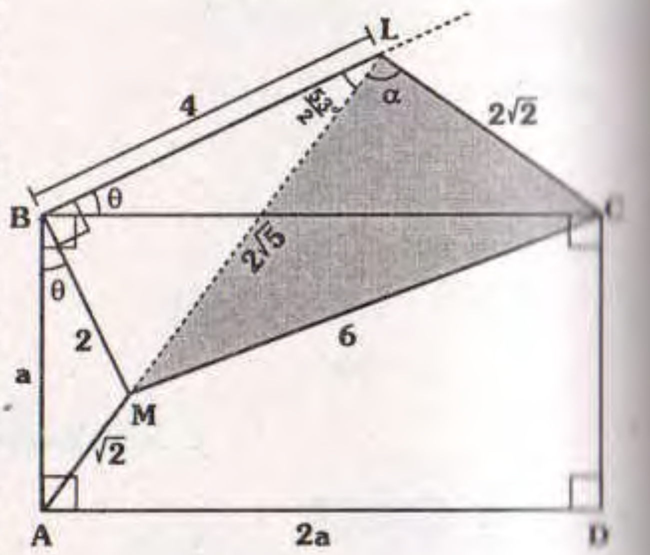
- ⊿DPQ: PQ = k, DQ = 2k y $PH=\dfrac{k\sqrt{3}}{2}$

$$S_{\square MNPQ}=\frac{(\ell+\ell+2k)}{2}\frac{k\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_{\square MNPQ}=(\ell+k)\frac{k\sqrt{3}}{2}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 115**




Piden $S_{(ABCD)}$

- $S_{(ABCD)}=2a^2$

- Se traza exteriormente el ΔBLC tal que m∢CBL = m∢ABM y BL=4

$\Rightarrow$ ΔABM~ΔCBL $\Rightarrow$ $LC=2\sqrt{2}$

- En ΔMLC : Por teorema de cosenos:

$$\alpha=180°-\frac{143°}{2}$$

$\Rightarrow m\sphericalangle BLC = 135°$

• En $\Delta BLC$:

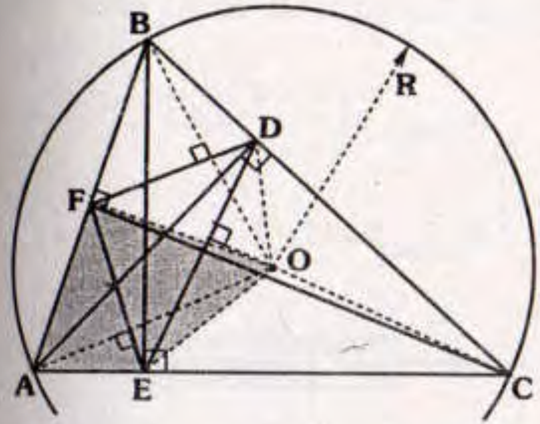
$(2a)^2 = 4^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(4)(2\sqrt{2})\cos 135°$

$\Rightarrow a^2 = 10$

$$\therefore \mathbf{S_{(ABCD)} = 20}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 116**




Sea $p = \dfrac{EF + FD + DE}{2}$

Por demostrar: $S_{\Delta ABC} = pR$

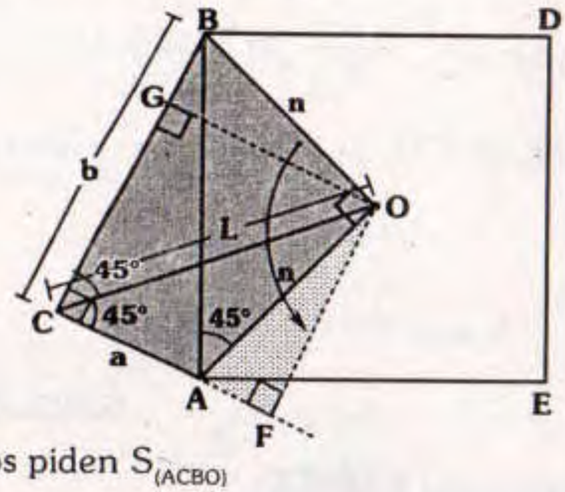
• Por teorema de puntos notables:

$\overline{OB} \perp \overline{FD}$, $\overline{OA} \perp \overline{EF}$ y $\overline{OC} \perp \overline{ED}$

• $S_{\Delta ABC} = \underbrace{S_{(AFOE)}}_{\frac{(EF)R}{2}} + \underbrace{S_{(OFBD)}}_{\frac{(FD)R}{2}} + \underbrace{S_{(CDOE)}}_{\frac{(ED)R}{2}}$

$$\therefore \mathbf{S_{\Delta ABC} = R\left(\frac{EF + FD + ED}{2}\right)}$$

**RESOLUCIÓN Nº 117**



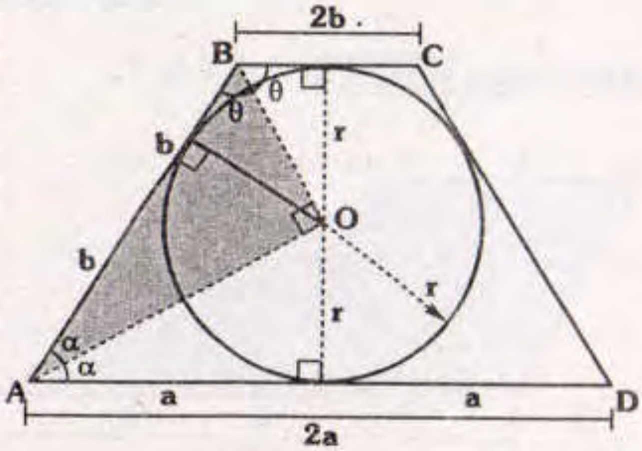

Nos piden $S_{(ACBO)}$

- Se traza $\overline{OG} \perp \overline{OB}$ y $\overline{OF} \perp \overline{CA}$
- Como ◸ACBO es inscriptible, entonces: $⊿OGB \cong ⊿AFO$
- Luego $S_{(ACBO)} = S_{(CGOF)}$
- Pero CGOF es un cuadrado cuya diagonal mide L, entonces:

$$\therefore \mathbf{S_{(ACBO)} = S_{(CGOF)} = \frac{L^2}{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 118**



Piden $S_{ABCD}$

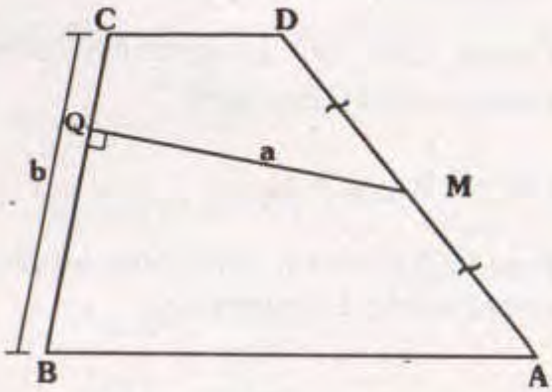
- $S_{(ABCD)} = \left(\dfrac{2a+2b}{2}\right)2r = 2r(a+b)$
- En ⊿AOB, por relaciones métricas:

$$r^2 = ab \Rightarrow r = \sqrt{ab}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{(ABCD)} = 2\sqrt{ab}(a+b)}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 119**



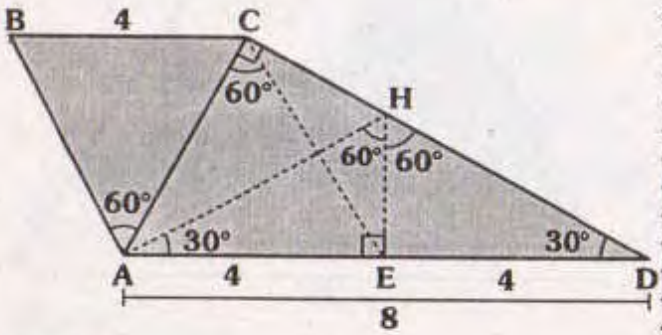

Piden $S_{\triangle ABCD}$

- Ya fue demostrado (ver pág. Nº29 y 30)

$$\therefore \mathbf{S_{\triangle ABCD} = ab}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 120**




Piden $S_{\triangle ABCD}$

- Se traza $\overline{CE} // \overline{BA} \Rightarrow AE=BC=4$
- Desde E se traza $\overline{EH} \perp \overline{AD} \Rightarrow$

$$m\measuredangle AHE = m\measuredangle EHD = 60°$$

- △ACHE: inscriptible, entonces:

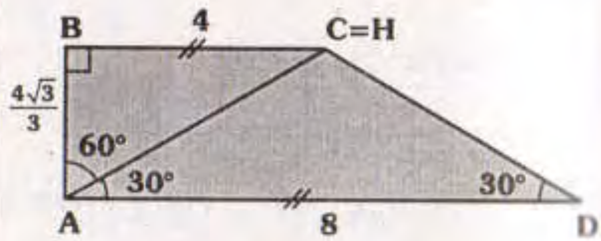
$$m\measuredangle ACD = 90°$$

- Como $m\measuredangle CAD = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ es equilátero, entonces su altura mide $2\sqrt{3}$
- $S_{\triangle ABCD} = \left(\dfrac{8+4}{2}\right)2\sqrt{3}$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\triangle ABCD} = 12\sqrt{3}}$$

**Observación**

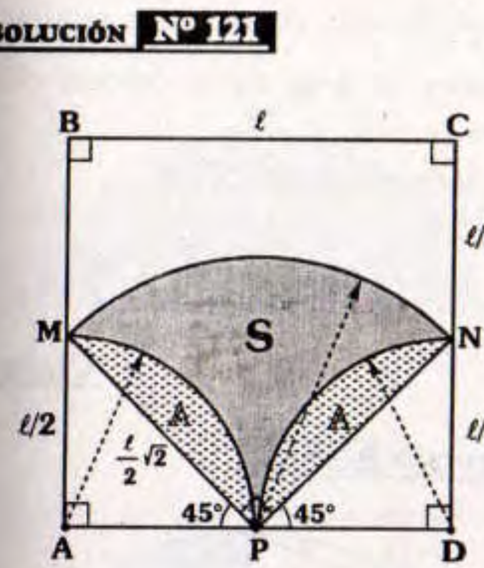
*Puede ocurrir: H=C, el gráfico, quedará así:*




$$S_{\triangle ABCD} = \left(\frac{8+4}{2}\right)\frac{4\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 121**




Nos piden S.

- Del gráfico:

$$S+2A=\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi\ell^2}{8} \qquad ...(I)$$

$$A=\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{\pi\ell^2}{16}-\frac{\ell^2}{8} \quad ...(II)$$

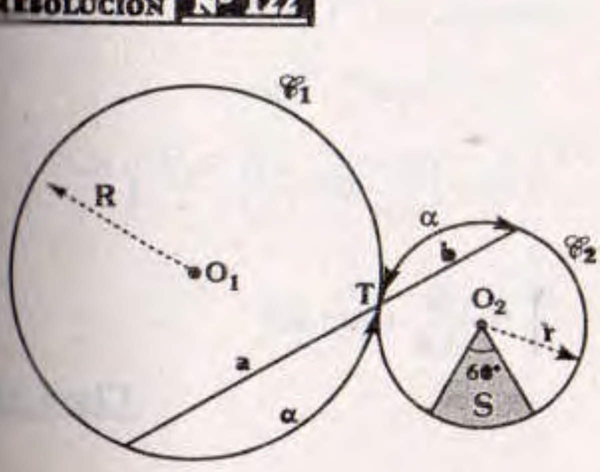
- De (I) y (II):

$$S+2\left(\frac{\pi\ell^2}{16}-\frac{\ell^2}{8}\right)=\frac{\pi\ell^2}{8}$$

$$\therefore\ \mathbf{S=\frac{\ell^2}{4}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 122**




Nos piden S

- $$S=\frac{60°}{360°}\times\pi r^2=\frac{1}{6}\pi r^2 \qquad ...(I)$$

- Como $\mathscr{C}_1 \sim \mathscr{C}_2 \Rightarrow \frac{r}{R}=\frac{b}{a}$

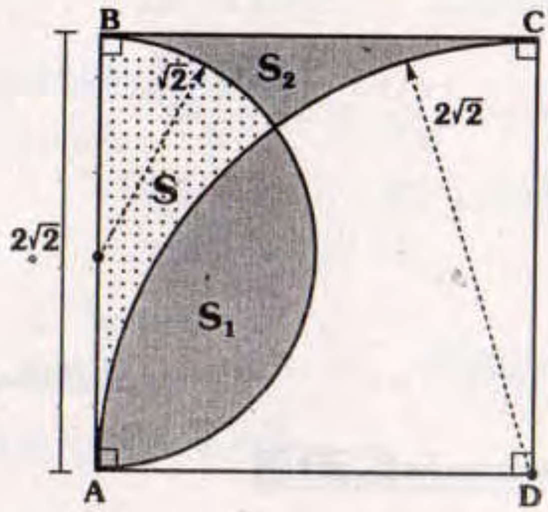
$$\Rightarrow r=\left(\frac{b}{a}\right)R \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$\therefore\ \mathbf{S=\frac{\pi b^2R^2}{6a^2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 123**




Nos piden $S_1 - S_2$

$$S_1+S=\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2=\pi \qquad ...(I)$$

- $$S_2+S=S_{(ABCD)}-S_{\triangle}$$

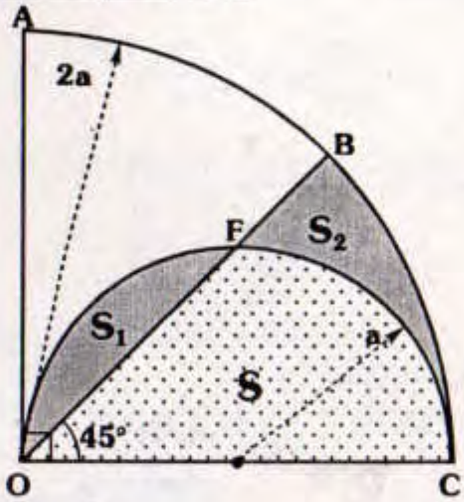
$$S_2+S=(2\sqrt{2})^2-\frac{1}{4}\pi(2\sqrt{2})^2=8-2\pi \ ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$\therefore\ \mathbf{S_1-S_2=3\pi-8}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 124**




Nos piden $S_2$

Dato: $S_1 = 36cm^2$

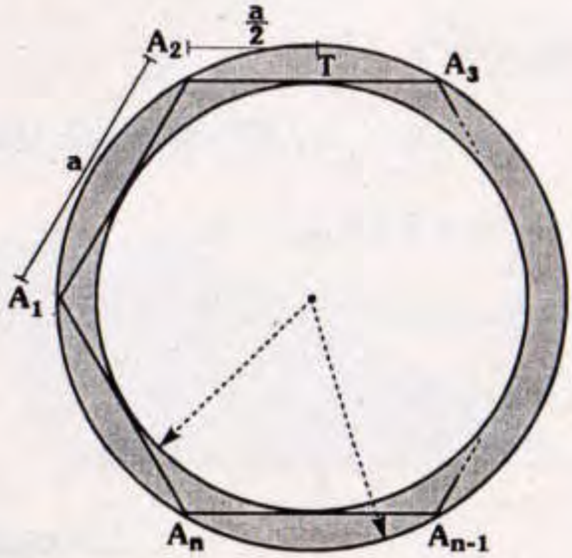
- $S_1 + S = \frac{1}{2}\pi a^2$ ...(I)
- $S_2 + S = \frac{45°}{360°}\cdot\pi(2a)^2 = \frac{1}{2}\pi a^2$ ...(II)
- De (I) y (II): $S_1 + S = S_2 + S$

$\Rightarrow S_1 = S_2$

$\therefore$ $\mathbf{S_2 = 36cm^2}$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 125**




Sea $A_1A_2A_3....A_n$ el polígono regular.

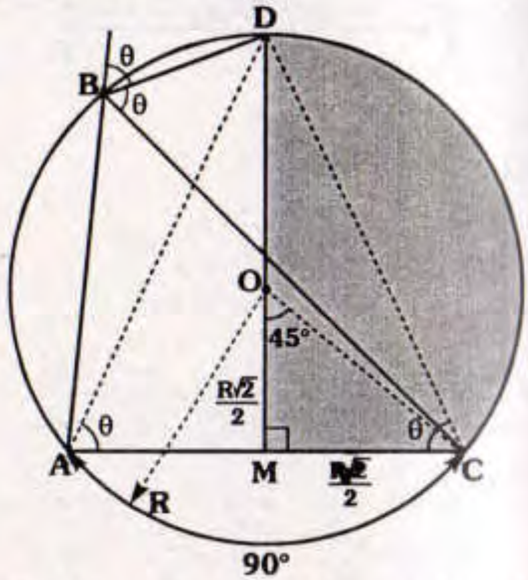
Nos piden el área de la corona circular ($A_{cc}$).

- Por teorema (pág. N°38)

$$\therefore \quad \mathbf{A_{cc} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 126**




Sea S el área de la región sombreada.

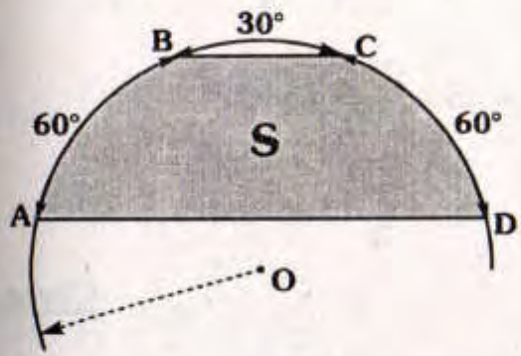
- Como $\overline{BD}$ es bisectriz exterior, entonces $\Delta DAC$ es isósceles, luego $\overline{DM}$ es mediana y altura y está contenido en la mediatriz $\Rightarrow$ $O \in \overline{DM}$
- $S = S_{\triangle DOC} + S_{\triangle OMC}$

$$S = \frac{135°}{360°}\pi R^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{S = \frac{R^2}{8}(3\pi + 2)}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 127**




Nos piden el área de la región sombreada: S.

• $S = S_{\frown AD} - S_{\frown BC}$

• $S_{\frown AD} = \dfrac{150°}{360°}\pi R^2 - \dfrac{R^2}{2}\operatorname{sen}150° = \dfrac{5}{12}\pi R^2 - \dfrac{R^2}{4}$ ...(I)

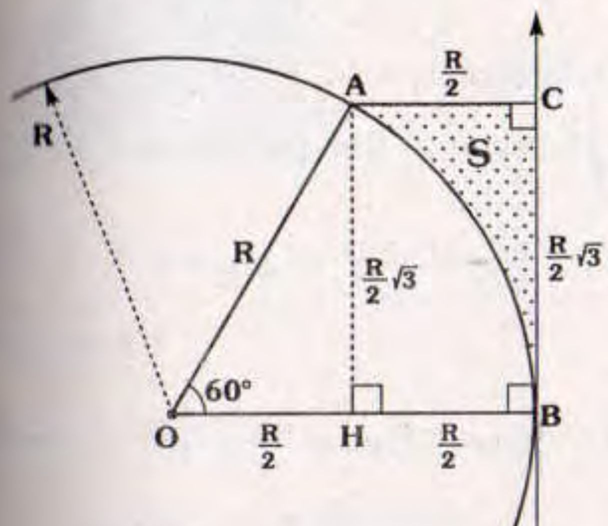
• $S_{\frown BC} = \dfrac{30°}{360°}\pi R^2 - \dfrac{R^2}{2}\operatorname{sen}30° = \dfrac{1}{12}\pi R^2 - \dfrac{R^2}{4}$ ...(II)

• De (I) y (II):

$$\therefore\ \mathbf{S = \frac{1}{3}\pi R^2}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 128**




Nos piden S

• $S = S_{(\triangle OACB)} - S_{\triangle AOB}$

$$S_{(\triangle OACB)} = \frac{1}{2}\left(R + \frac{R}{2}\right)\cdot\frac{R}{2}\sqrt{3} = 3R^2\frac{\sqrt{3}}{8}$$

• $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{6}\pi R^2$

$$\Rightarrow\ S = 3R^2\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{6}\pi R^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}}$$

**Clave B**

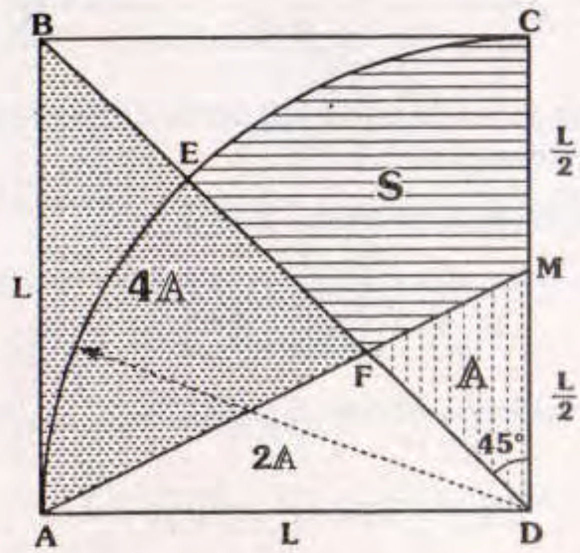
**RESOLUCIÓN Nº 129**

Por teorema:

$$A_{\substack{\text{corona}\\ \text{circular}}} = \frac{\pi(2^2)}{4} = \pi$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 130**



Nos piden S

- $\Delta AFB \sim \Delta MFD \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta DMF}}{S_{\Delta BFA}} = \dfrac{1}{4}$

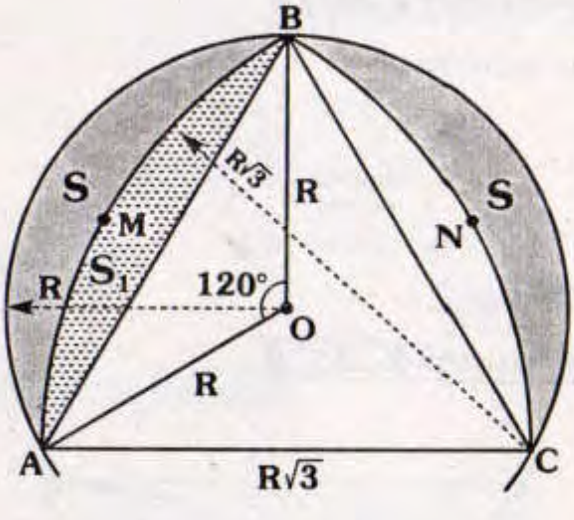
- Como $6\mathbf{A} = \dfrac{L^2}{2} \Rightarrow S_{\Delta DMF} = \dfrac{1}{12}L^2$

- $S = \dfrac{45°}{360°}\pi L^2 - \dfrac{1}{12}L^2$

$$\therefore \ \mathbf{S = \frac{L^2}{24}(3\pi - 2)}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 131**




Nos piden la suma de áreas de las regiones sombreadas: 2S

- Hallemos primero: $S + S_1$

$$S + S_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 - R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- Hallemos ahora: $S_1$

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi(R\sqrt{3})^2 - (R\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

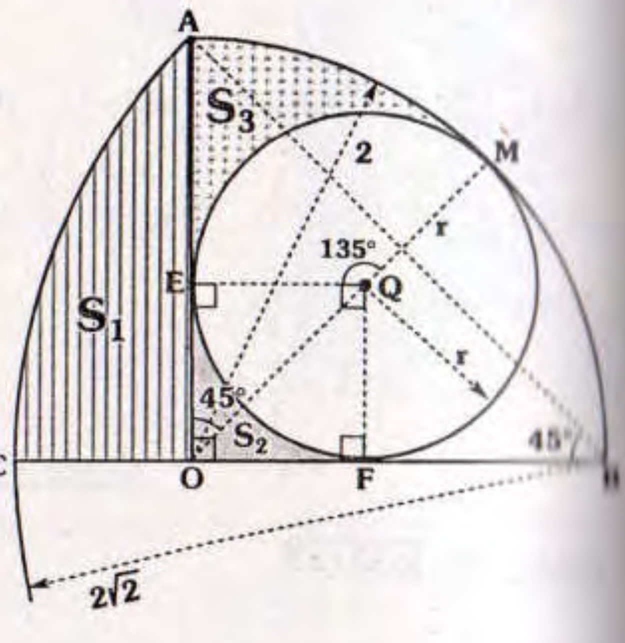
$$S_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \ S = \frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$$

$$\therefore \ \mathbf{2S = \frac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 132**




Nos piden $S_1 + S_2 + S_3$

- Hallemos el área por separado:

$$S_1 = \frac{45°}{360°}\pi(2\sqrt{2})^2 - \underbrace{S_{\triangle AOB}}_{2} = \pi - 2 \qquad \text{...(I)}$$

$$S_2 = S_{(EOFQ)} - S_{\triangle EQF} = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 \qquad \text{...(II)}$$

$$S_3 = S_{(\triangle AOM)} - S_{\Delta OEQ} - S_{\triangle EQM}$$

$\Rightarrow\ S_3=\dfrac{45°}{360°}\pi(2)^2-\dfrac{r^2}{2}-\dfrac{135°}{360°}\pi r^2$

$\Rightarrow\ S_3=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{r^2}{2}-\dfrac{3}{8}\pi r^2$ ...(III)

• Sumando (I), (II) y (III)

$S_1+S_2+S_3=\dfrac{3\pi}{2}-2+\dfrac{r^2}{2}-\dfrac{5}{8}\pi r^2$ ...(IV)

• Pero $r+r\sqrt{2}=2\ \Rightarrow\ r=2(\sqrt{2}-1)$

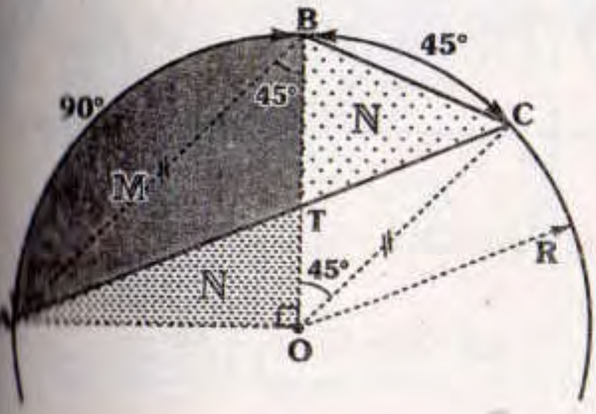
$\Rightarrow\ r^2=4(3-2\sqrt{2})$

• Reemplazando en (IV):

$S_1+S_2+S_3=\mathbf{(4+5\pi\sqrt{2}-6\pi-4\sqrt{2})u^2}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 133**




Piden $\mathbb{M}+\mathbb{N}$

• Como $m\widehat{AB}=90°$ y $m\sphericalangle\widehat{BC}=45°\ \Rightarrow$

$m\sphericalangle BOC=m\sphericalangle ABO=45°$

$\Rightarrow\ \overline{AB}\,//\,\overline{OC}$

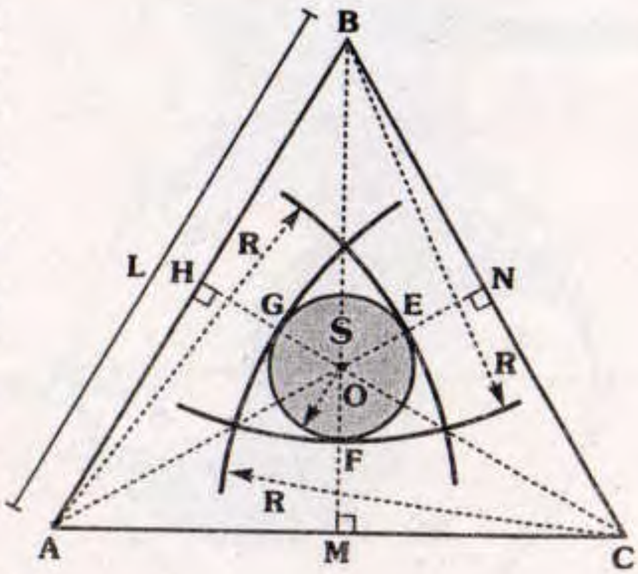
• Por teorema:

$S_{\Delta BTC}=S_{\triangle AOT}=\mathbb{N}$

• $\mathbb{M}+\mathbb{N}=\mathbf{S}_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{4}\pi\mathbf{R}^2$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 134**




Nos piden S

• $\Delta ABC$ : Equilátero con AB = L

$\Rightarrow\ AN=CH=BM=\dfrac{L}{2}\sqrt{3}$

• Al trazar los arcos de centros A, B y C de radios $R=\dfrac{2}{5}L\sqrt{3}$ cada dos arcos concurren con la altura.

• Como $OG=OE=OF=\underbrace{R}_{\frac{2}{5}L\sqrt{3}}-\underbrace{AO}_{\frac{L}{3}\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \ OG = \frac{L}{15}\sqrt{3}$$

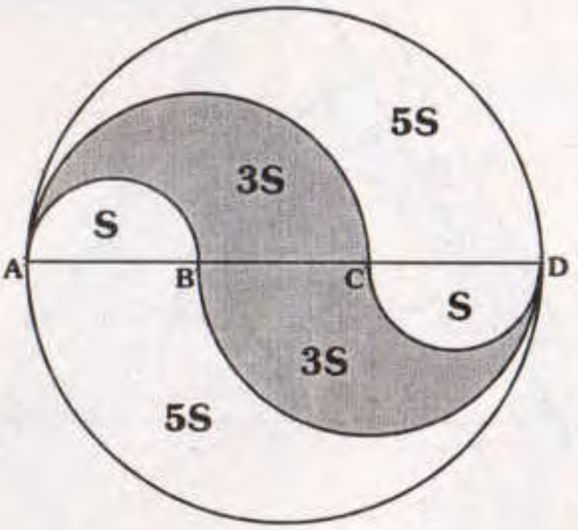
- Nos piden el área del círculo de radio OG

$$\Rightarrow \ S = \pi\left(\frac{L}{15}\sqrt{3}\right)^2$$

$$\therefore \ \mathbf{S = \frac{\pi L^2}{75}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 135**




- Sea $S_x$ el área de la parte sombreada
- $S_y$ el área de la parte no sombreada
- Nos piden $\frac{S_x}{S_y}$
- Como los semicírculos son semejantes

$$\Rightarrow \ \frac{S_{\triangle AB}}{(AB)^2} = \frac{S_{\triangle AC}}{(AC)^2} = \frac{S_{\triangle AD}}{(AD)^2} = S$$

$$\Rightarrow \ S_{\triangle AB} = S \ ; \ S_{\triangle AC} = 4S \ \text{y}$$

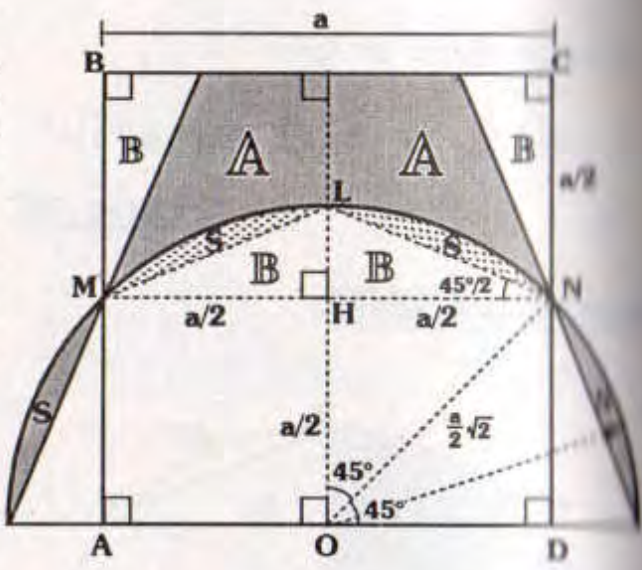
$$S_{\triangle AD} = 9S$$

- Análogamente para la parte
- Luego: $S_x = 6S$ y $S_y = 12S$

$$\therefore \ \mathbf{\frac{S_x}{S_y} = \frac{1}{2}}$$

**Clave**

**RESOLUCIÓN Nº 136**




Nos piden: $2(\mathbb{A} + S)$

- $$2(\mathbb{A} + 2\mathbb{B} + S) = a\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \ \mathbb{A} + S = \frac{a^2}{4} - 2\mathbb{B}$$

- Como

$$ON = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad OH = \frac{a}{2}$$

$\Rightarrow HL = \frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$

$\Rightarrow \mathbb{B} = \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1) = \frac{a^2}{8}(\sqrt{2}-1)$

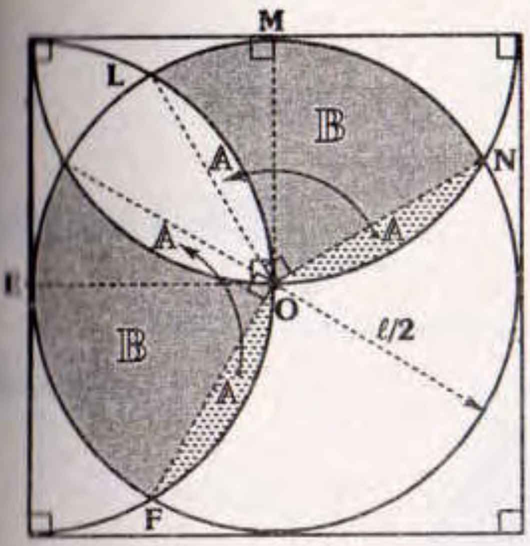
Luego: $\mathbb{A} + S = \frac{a^2}{4} - 2\frac{a^2}{8}(\sqrt{2}-1)$

$\Rightarrow \mathbb{A} + S = \frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2})$

$\therefore\ \mathbf{2(\mathbb{A}+S) = \frac{a^2}{2}(3-2\sqrt{2})}$

**Clave E**

## Resolución Nº 137




Nos piden el área de la región sombreada

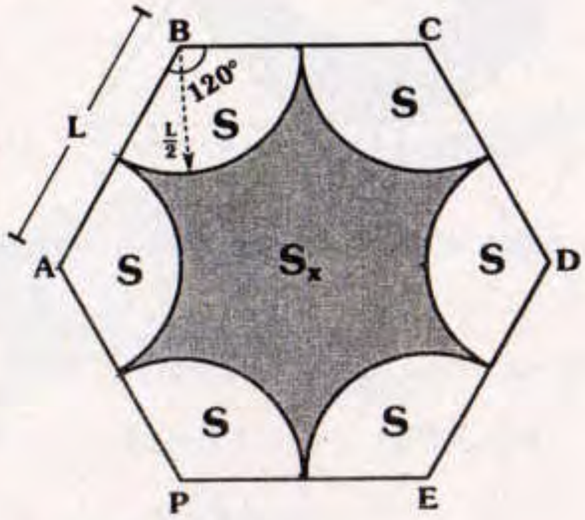
- Notemos que los $\Delta_s$ EOF y MON son equiláteros.
- Por traslado de áreas, tenemos:

$\mathbb{A} + \mathbb{B} = S_{\triangle} = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\pi\ell^2}{16}$

$\therefore\ \mathbf{2(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \frac{\pi\ell^2}{8}}$

**Clave D**

## Resolución Nº 138




Nos piden $S_x$

- Hallemos $S_x$ por diferencia:

$$S_x = S_{(ABCDEF)} - 6S$$

- $S_{(ABCDEF)} = 6\left(L^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{2}L^2\sqrt{3}$

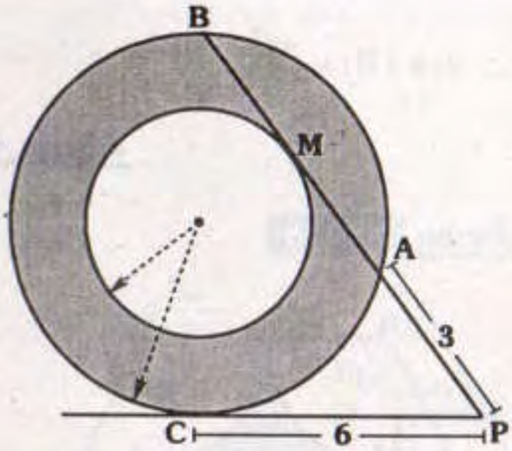
- $S = \frac{120°}{360°}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\pi L^2$

$\Rightarrow\ S_x = \frac{3}{2}L^2\sqrt{3} - 6\left(\frac{1}{12}\pi L^2\right)$

$\therefore\ \mathbf{S_x = \frac{L^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 139




Nos piden el área de la corona circular ($A_{cc}$)

- Por teorema de la tangente:

$$6^2=3(PB) \Rightarrow PB=12$$

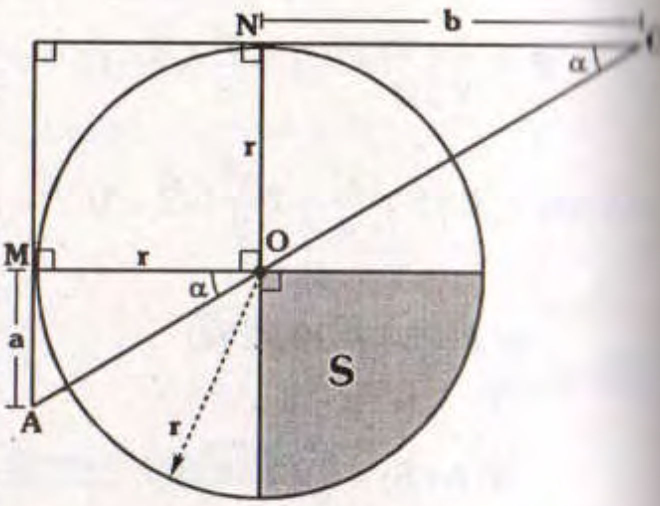
$$\Rightarrow AB=9$$

- Luego: $A_{cc}=\pi\frac{(AB)^2}{4}$

$$\therefore\ \mathbf{A_{cc}=\frac{81}{4}\pi u^2}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 140




Piden S

- Conocemos que $S=\frac{1}{4}\pi r^2$
- $\triangle OMA \sim \triangle CNO$

$$\frac{r}{a}=\frac{b}{r}$$

$$\Rightarrow r^2=ab$$

$$\therefore\ \mathbf{S=\frac{\pi}{4}ab}$$

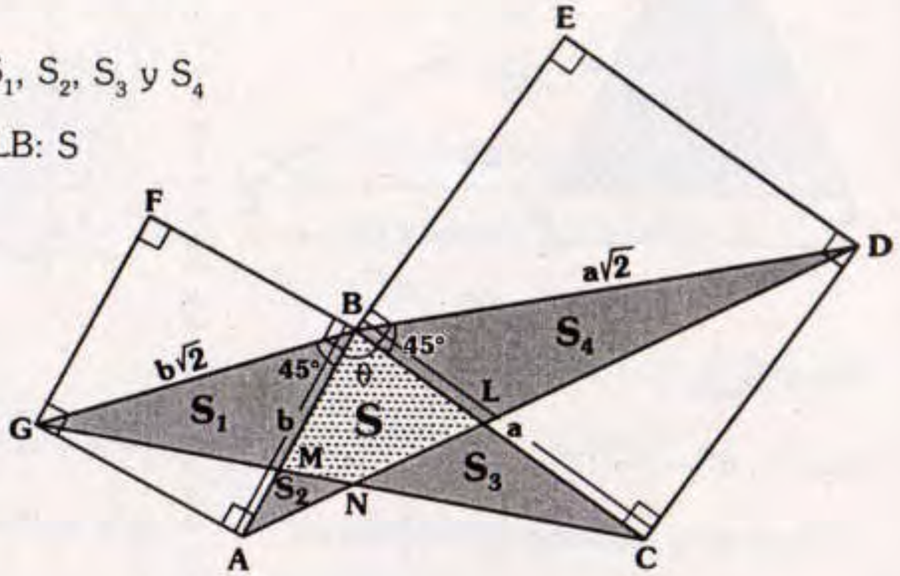
**Clave D**

**Resolución Nº 141**

Nos piden la relación entre $S_1$, $S_2$, $S_3$ y $S_4$

Sea el área de la región MNLB: S

Del gráfico:




$$S_{\Delta GBC} = \frac{(b\sqrt{2})a}{2}\text{sen}(45° + \theta)$$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{b(a\sqrt{2})}{2}\text{sen}(45° + \theta)$$

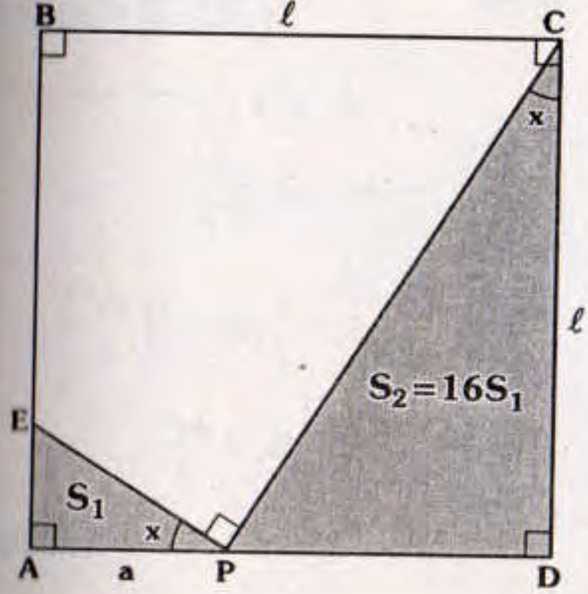
$\Rightarrow$ $S_{\Delta GBC} = S_{\Delta ABD}$

$\Rightarrow$ $S_1+S+S_3=S_2+S+S_4$

$\therefore$ $\mathbf{S_1+S_3=S_2+S_4}$

**Clave A**

**Resolución Nº 142**




Nos piden x

- Notemos que: ⊿PDC ~ ⊿EAP

$$\Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\ell}{a}\right)^2$$

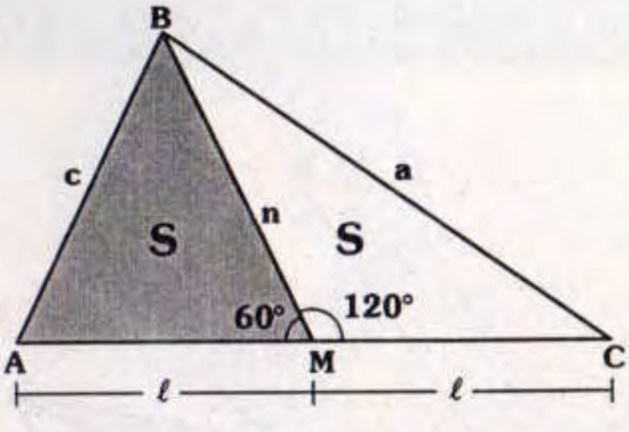
$$\Rightarrow \ell = 4a$$

- Luego: PD = 3a
- ⊿PDC: notable

$$\therefore \mathbf{x = 37°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 143




Piden $S_{\Delta ABC}$

Dato: $a^2 - c^2 = 12$

- Usemos el teorema de cosenos en

$\Delta MBC: \quad a^2 = \ell^2 + n^2 + \ell n$

$\Delta ABM: \quad c^2 = \ell^2 + n^2 - \ell n$

$$\Rightarrow \underbrace{a^2 - c^2}_{12} = 2\ell n$$

$$\Rightarrow \ell n = 6$$

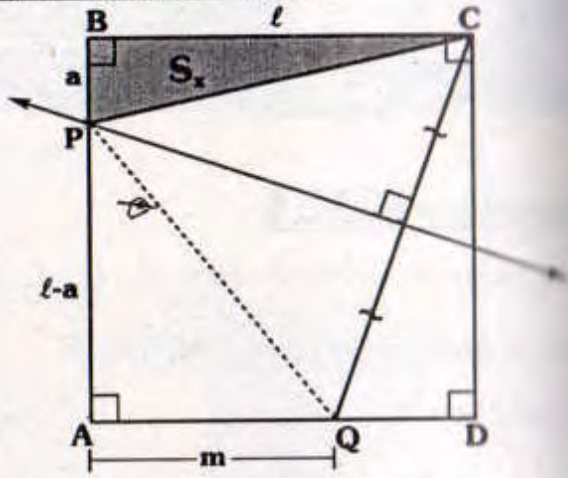
- $S_{\Delta ABM} = S = \dfrac{\ell n}{2}\text{sen}60°$

$$\Rightarrow S = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\therefore \mathbf{S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 144




Nos piden $S_x$

- En $⊿PBC$: $\quad S_x = \dfrac{a\ell}{2}$ ...(I)

- Por teorema de la mediatriz:

$$PC = PQ$$

- Por teorema de Pitágoras en:

$⊿PBC: \quad a^2 + \ell^2 = (PC)^2$

$⊿PAQ: \quad m^2 + (\ell - a)^2 = (PQ)^2$

$$\Rightarrow a^2 + \ell^2 = m^2 + (\ell - a)^2$$

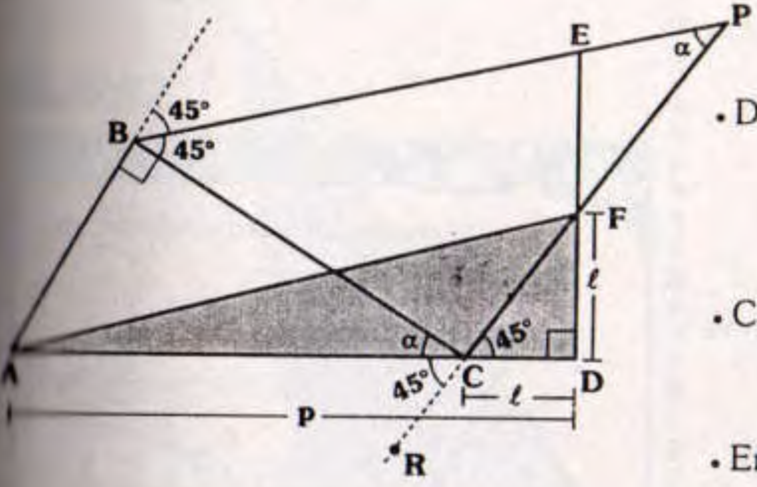
$$\Rightarrow a\ell = \frac{m^2}{2}$$

- En (I): $\quad S_x = \dfrac{1}{2}(a\ell) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m^2}{2}\right)$

$$\therefore \mathbf{S_x = \frac{m^2}{4}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 145**




Nos piden: $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADF}}$

- Del gráfico:

$$S_{\triangle ADF}=\frac{p\ell}{2} \qquad ...(I)$$

- Como E es excentro del $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ m∢LBE = m∢CBE = 45°

- En $\triangle BPC$, por ∢ exterior:

m∢RCA = 45°

- En $\triangle CDF$: CD = DF = $\ell$

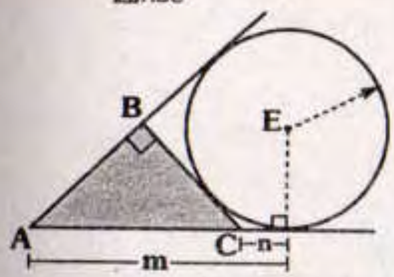
- Del gráfico: $S_{\triangle ABC}=p\ell$ ...(II)

- De (I) y (II):

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADF}}=2$$

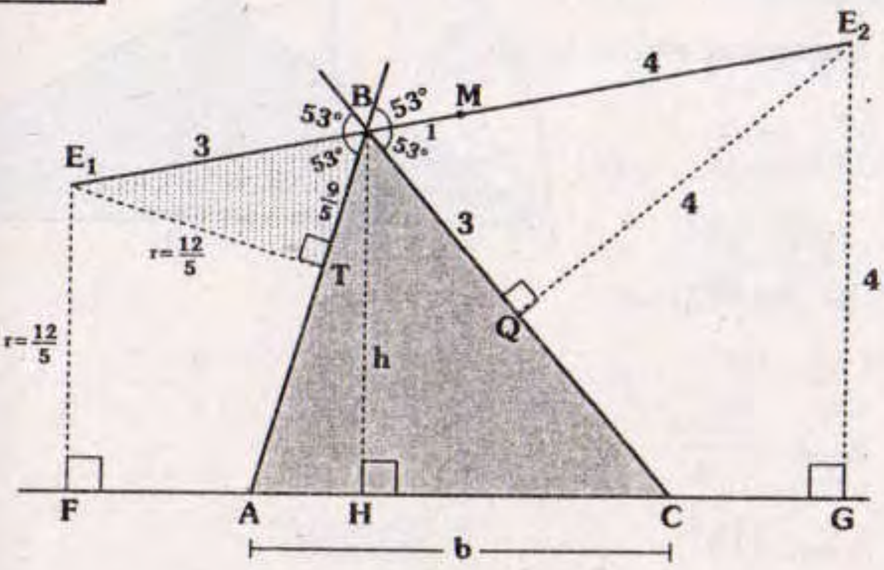
*Recordar*

$S_{\triangle ABC}=mn$




**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 146**



Piden $S_{\Delta ABC}$

- Sea $AB = c$ ; $BC = a$ y $AC = b$
- Como $E_1$ y $E_2$ son excentros, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} BQ = p - c \\ BT = p - a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3 + \dfrac{9}{5} = \underbrace{2p - a - c} \\ \dfrac{24}{5} = \quad b \end{array}$$

- En el trapecio $FE_1E_2G$; por teorema de semejanza:

$$h = \frac{4(3) + \frac{12}{5}(5)}{3+5}$$

$$\Rightarrow \quad h = 3$$

- Finalmente:

$$\mathbf{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{5}\right)3 = \frac{36}{5}}$$

**Clave A**

**Nota**

*También se podría trazar la circunferencia inscrita:*

$$S_{\Delta ABC} = (p-a)(p-c).\text{ctg}\frac{74°}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{9}{5}.3.\frac{4}{3}$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = \frac{36}{5}$$

**RESOLUCIÓN Nº 147**

Nos piden $S_{\Delta AMD}$

- Por teorema de circunferencia:

A, T y N colineales y

$$m\measuredangle ABH = m\measuredangle BNA$$

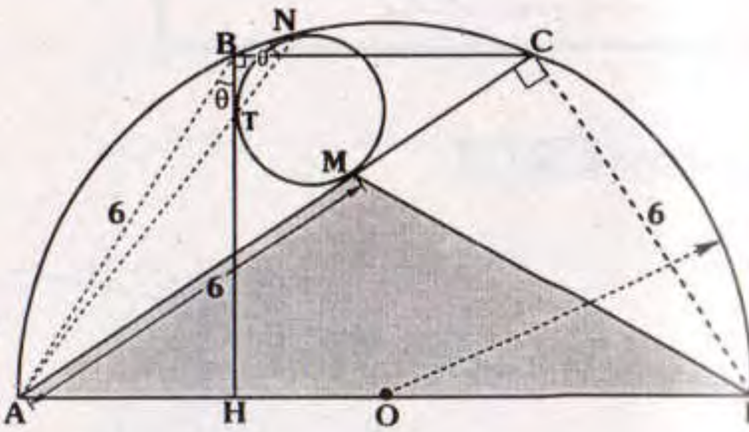
- Por teorema de la tangente:

$$(AM)^2 = (AT)(AN) \qquad ...(I)$$

- Por teorema de semejanza en el $\Delta ABN$:

$$(AB)^2 = (AT)(AN) \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II): $\quad AM = AB$
- Como $\overline{AD} // \overline{BC} \Rightarrow AB = CD = 6$
- Finalmente:

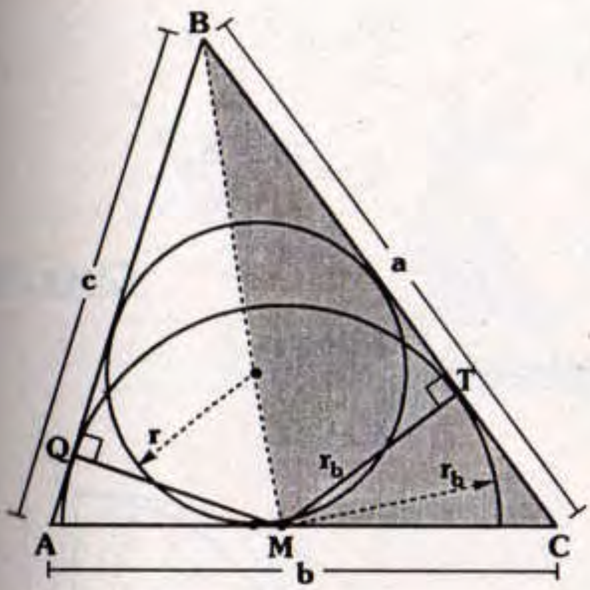



$$S_{\Delta AMD} = \frac{(6)(6)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\Delta AMD} = 18}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 148**




Sea S el área de la región ABC

Dato: $\frac{x}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$ ; piden x

$$\Rightarrow\ S=S_{(\Delta AMB)}+S_{(\Delta MBC)}$$

$$S=\frac{cr_b}{2}+\frac{ar_b}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{r_b}=\frac{a+c}{2S}$$

Análogamente: $\frac{1}{r_a}=\frac{b+c}{2S}$

$$\frac{1}{r_c}=\frac{a+b}{2S}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{\not{2}(a+b+c)}{\not{2}S}=2\frac{p}{S}$$

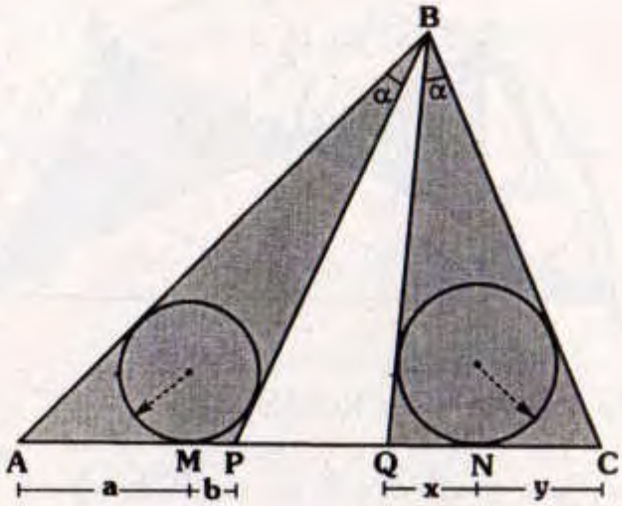
Pero: $\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$

Finalmente: $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{r}$

$$\therefore\quad \mathbf{x=2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 149**




Por demostrar: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

Por teorema (página Nº43):

$$S_{\Delta ABP}=(ab)\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$S_{\Delta QBC}=(xy)\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta QBC}}=\frac{ab}{xy}$$

Por relación de áreas:

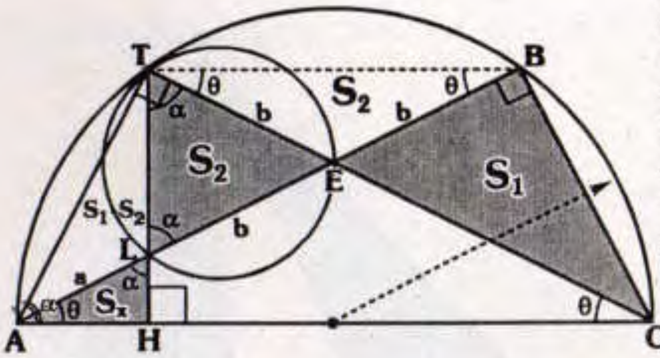
$$\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta QBC}}=\frac{a+b}{x+y}$$

$$\Rightarrow\ \frac{ab}{xy}=\frac{a+b}{x+y}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x+y}{xy}=\frac{a+b}{ab}$$

$$\therefore\quad \mathbf{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

**Resolución Nº 150**




Nos piden $S_x$ en función de $S_1$ y $S_2$

- Sea $m\measuredangle BAC=\theta \Rightarrow m\measuredangle BTE=\theta$
- Como: $m\widehat{TE}=m\widehat{TC}$

$$\Rightarrow m\measuredangle TLE=m\measuredangle TAC=\alpha$$

- Como: $\alpha+\theta=90°$

$$\Rightarrow m\measuredangle ACT=\theta=m\measuredangle ABT$$

$$\Rightarrow \overline{TB}//\overline{AC} \Rightarrow S_{\triangle ATE}=S_{\triangle EBC}=S_1$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ALT}=S_1-S_2$$

- Por razón de áreas:

$$\frac{S_1-S_2}{S_2}=\frac{a}{b} \qquad ...(I)$$

- Por teorema de semejanza:

$$\frac{S_x}{2S_2}=\left(\frac{a}{2b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2S_x}{S_2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \qquad ...(II)$$

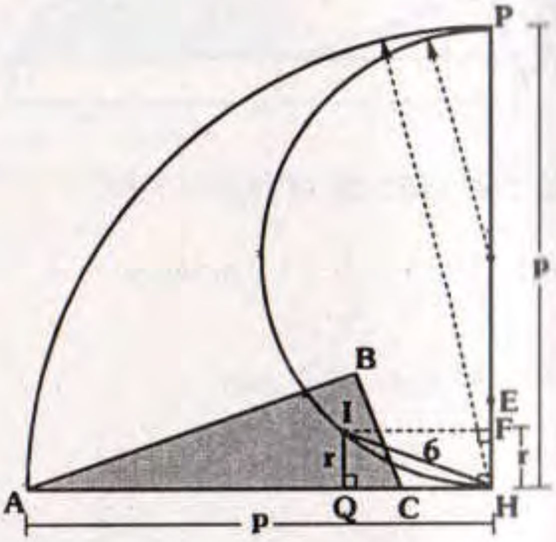
- De (I) y (II):

$$\frac{2S_x}{S_2}=\left(\frac{S_1-S_2}{S_2}\right)^2$$

$$\therefore \mathbf{S_x=\frac{(S_1-S_2)^2}{2S_2}}$$

**Clave D**

**Resolución Nº 151**




Nos piden $S_{\Delta ABC}$

- Sabemos que AH=HP representa el semiperímetro del triángulo ABC
- Se traza $\overline{IF}\perp\overline{HP}$ (F en $\overline{HP}$)

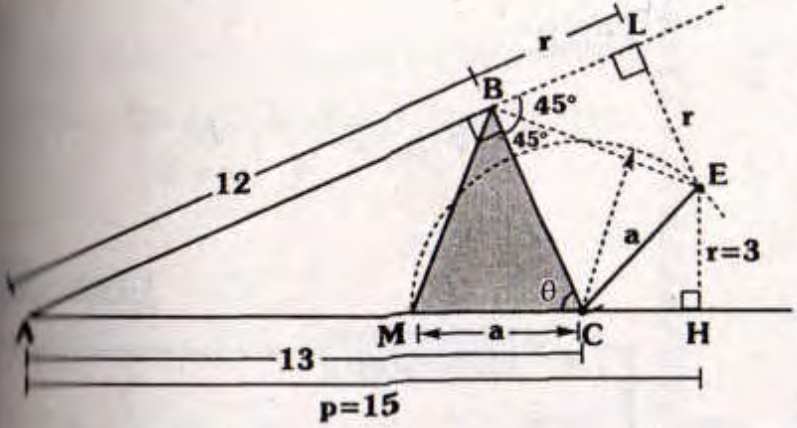
$$\Rightarrow HF=r$$

- En ◠: $6^2=\underbrace{rp}_{S_{\Delta ABC}}$

$$\therefore \mathbf{S_{\Delta ABC}=36}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 152**




Nos piden $S_{\Delta CMB}$

- Por fórmula trigonométrica:

$$S_{\Delta CMB} = \frac{(a)(5)}{2}\operatorname{sen}\theta \qquad ...(I)$$

- En ⊿ABC: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{12}{13}$

- Por teorema de circunferencia:

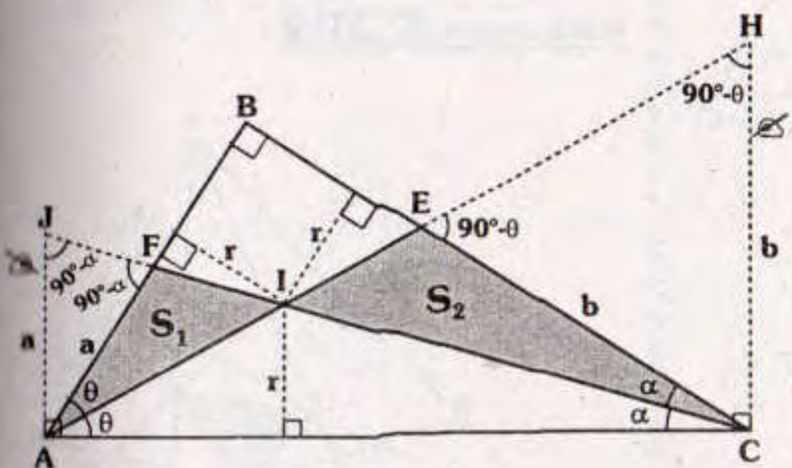
$$AL = AH = p = \frac{13+12+15}{2} = 15 \quad \Rightarrow \quad CH = 2 \text{ y } BL = r = 3$$

- En ⊿CHE: $a^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow a = \sqrt{13}$
- En (I):

$$S_{\Delta CMB} = \frac{(\sqrt{13})(5)}{2}\cdot\frac{12}{13} \qquad \therefore \ \mathbf{S_{\Delta CMB} = \frac{30}{13}\sqrt{13}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 153**




Nos piden: $S_1 + S_2$

Sea r el inradio del triángulo ABC

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = \frac{r}{2}(a+b) ...(II)$$

- Se trazan las perpendiculares a $\overline{AC}$ por A y C las cuales cortan a las prolongaciones de $\overline{CF}$ y $\overline{AE}$ en J y H respectivamente.

- Luego los $\Delta$s JAF y ECH son isósceles
- Por teorema de semejanza:

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

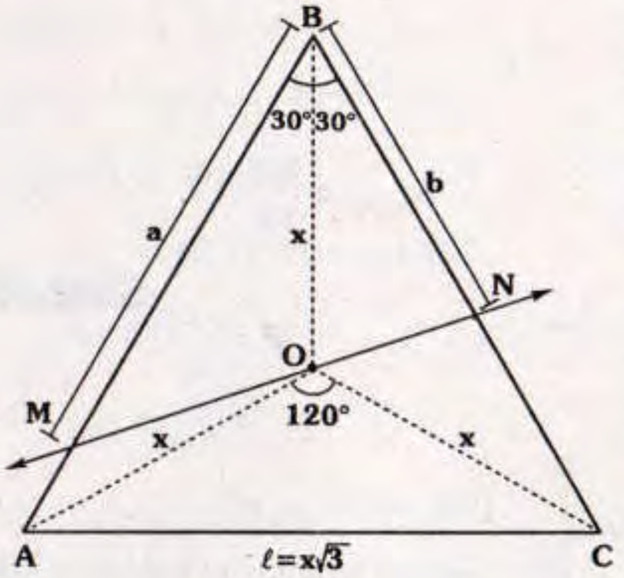
- En (I):

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\frac{ab}{(a+b)}(a+b)$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1 + S_2 = \frac{ab}{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 154**




Nos piden $S_{\Delta ABC}$

- Como es equilátero, entonces:

$$S_{\Delta ABC} = \ell^2\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad ...(I)$$

- En $\Delta MBN$, de la observación:

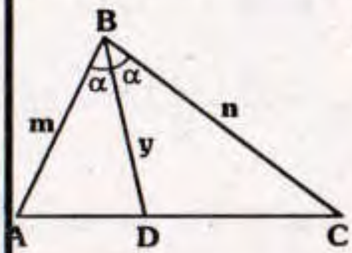
$$x = \frac{2ab}{a+b}\cos 30° = \frac{ab}{a+b}\sqrt{3}$$

- En $\Delta AOC$: $\ell = x\sqrt{3} = \dfrac{3ab}{a+b}$
- En(I):

$$\mathbf{S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2}$$

**Clave C**

**Observación**




Se cumple:

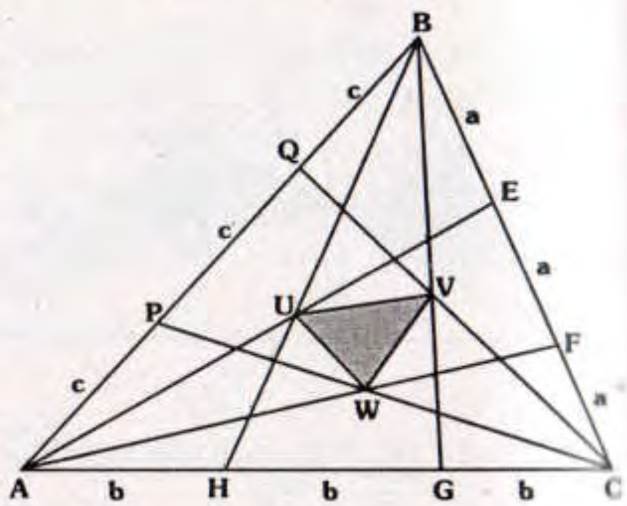
$$y = \frac{2mn}{m+n}\cos\alpha$$

Prueba: $S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC} = S_{\Delta ABC}$

$$\frac{my}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{ny}{2}\operatorname{sen}\alpha = \frac{mn}{2}\operatorname{sen}2\alpha$$

$$\therefore\ y = \frac{2mn}{m+n}\cos\alpha$$

**RESOLUCIÓN Nº 155**



Nos piden $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta UVW}}$

- En el $\Delta ABG$, usemos el teorema de Menelao ( $\overline{QC}$ es la recta secante)

$$(2c)(BV)b = c(VG)3b$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BV}{VG} = \frac{3}{2} \qquad \ldots(I)$$

- En $\Delta HBG$, $\overleftrightarrow{AE}$ es la recta secante también por teorema de Menelao:

$$\frac{BU}{UH} = \frac{3}{2} \qquad \ldots(II)$$

- De (I) y (II): $\overline{UV} // \overline{HG}$
- Análogamente se prueba:

$$\overline{UW} // \overline{EF} \quad y \quad \overline{WV} // \overline{PQ}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta UVW$$

- Como $\Delta UBV \sim \Delta HBG \Rightarrow \dfrac{UV}{b} = \dfrac{3}{5}$

$$\Rightarrow \frac{UV}{AC} = \frac{1}{5}$$

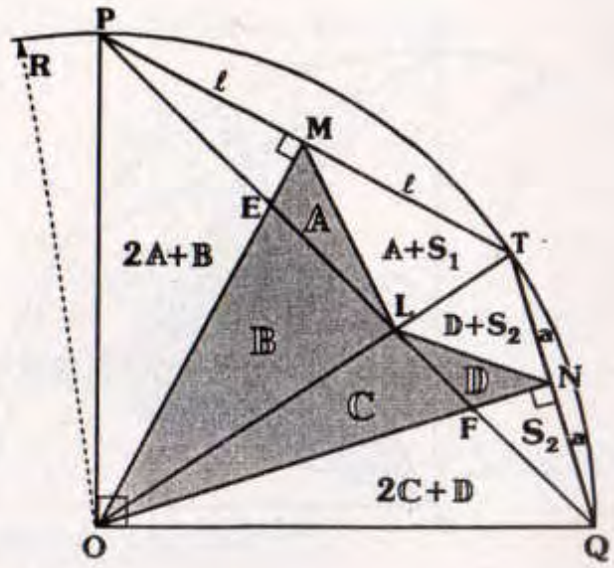
- Por teorema de semejanza de áreas.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta UVW}} = \left(\frac{AC}{UV}\right)^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta UVW}} = 25}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 156**




Nos piden $S_{\measuredangle MLNO}$

- Del gráfico tenemos que M y N son puntos medios de $\overline{PT}$ y $\overline{TQ}$ respectivamente.
- Luego:

$$S_{\Delta LMT} = S_{\Delta LMP} = \mathbb{A} + S_1$$

$$S_{\Delta OMP} = S_{\Delta OMT} \Rightarrow S_{\Delta OEP} = 2\mathbb{A} + \mathbb{B}$$

Análogamente: $S_{\Delta OFQ} = 2\mathbb{C} + \mathbb{D}$

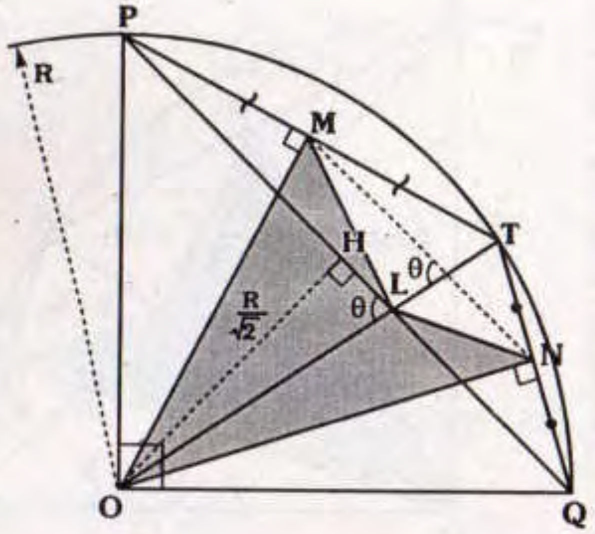
- Finalmente:

$$\underbrace{2\mathbb{A} + 2\mathbb{B} + 2\mathbb{C} + 2\mathbb{D}}_{2S_{\measuredangle MLNO}} = \frac{R^2}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\measuredangle MLNO} = \frac{R^2}{4}}$$

**Clave E**

Otro método




Usando la fórmula general:

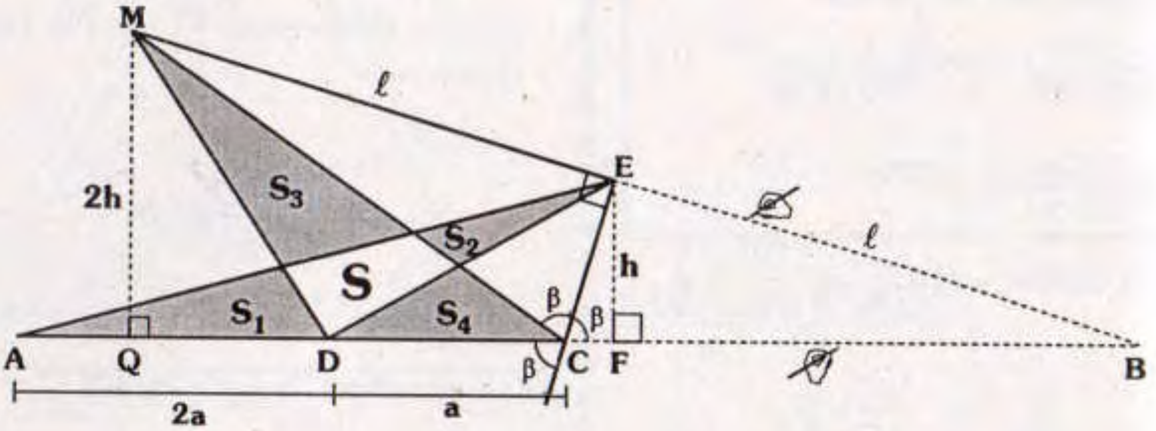
$$S_{\measuredangle MLNO}=\frac{(OL)(MN)}{2}\operatorname{sen}\theta \quad ...(I)$$

- Por base media: $MN=\frac{R\sqrt{2}}{2}$
- En $\measuredangle$OHL:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{R}{\sqrt{2}(OL)}$$

- En (I): $S_{\measuredangle MLNO}=\frac{R^2}{4}$

**Resolución Nº 157**




Nos piden la relación entre $S_1$; $S_2$; $S_3$ y $S_4$

- Al prolongar $\overline{ME}$ y $\overline{AC}$ notemos que el $\Delta$MCB es isósceles $\Rightarrow$ ME = EB
- Tracemos $\overline{EF}$ y $\overline{MQ}$ perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ MQ = 2(EF)
- Finalmente:

$$S_{\Delta ADE}=\frac{(2a)h}{2}=ah$$

$$S_{\Delta CDM}=\frac{(a)2h}{2}=ah$$

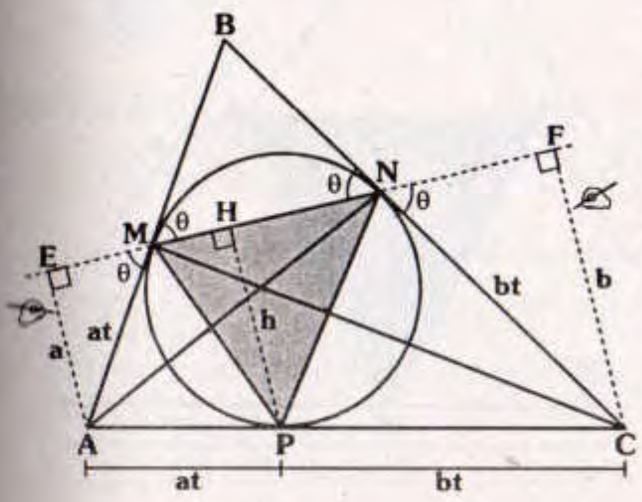
$$\Rightarrow S_{\Delta ADE}=S_{\Delta CDM}$$

$$S_1+S+S_2=S_3+S+S_4$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=S_3+S_4}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 158**




Piden $S_{\Delta MNP}$

Dato: $\dfrac{1}{S_{\Delta AMN}}+\dfrac{1}{S_{\Delta MNC}}=\dfrac{1}{k}$

- Como los tres triángulos (MNP, AMN y MNC) tienen igual base analicemos las alturas.
- $\measuredangle AEM \sim \measuredangle CFN \Rightarrow AM=at$ y $CN=bt$
- En el trapecio AEFC:

$$h=\frac{a(bt)+b(at)}{at+bt}=\frac{2ab}{a+b}$$

$$\Rightarrow\ \frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

- Usemos la última expresión:

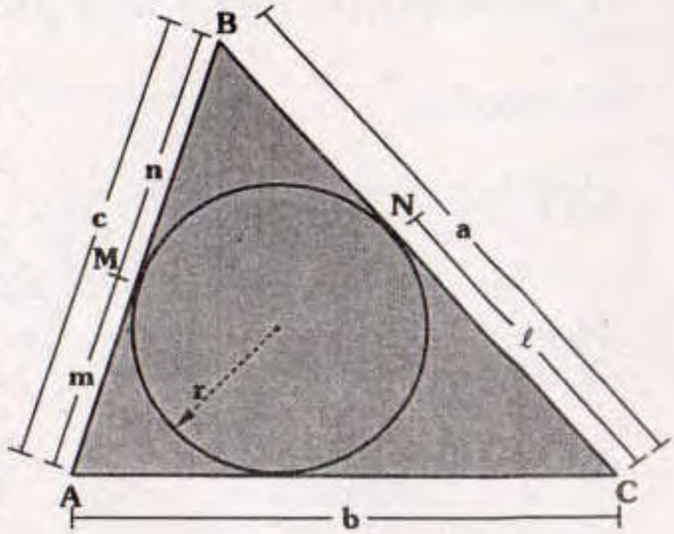
$$\frac{2}{\frac{h(MN)}{2}}=\frac{1}{\frac{a(MN)}{2}}+\frac{1}{\frac{b(MN)}{2}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{2}{S_{\Delta MNP}}=\frac{1}{S_{\Delta AMN}}+\frac{1}{S_{\Delta MNC}}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta MNP}=2k}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 159**




Piden r.

Dato: $\dfrac{1}{mn}+\dfrac{1}{n\ell}+\dfrac{1}{m\ell}=\dfrac{1}{4}$

- Sea $p=\dfrac{a+b+c}{2}\Rightarrow m=p-a;\ n=p-b$

  y $\ell=p-c\ \Rightarrow p=m+n+\ell$

- Usando la siguiente expresión del área:

$$S_{\Delta ABC}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \Rightarrow \quad pr^2=(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow \ (m+n+\ell)r^2=mn\ell \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{mn}+\frac{1}{n\ell}+\frac{1}{m\ell}}=\frac{1}{r^2} \ \left(=\frac{1}{4}\right)$$

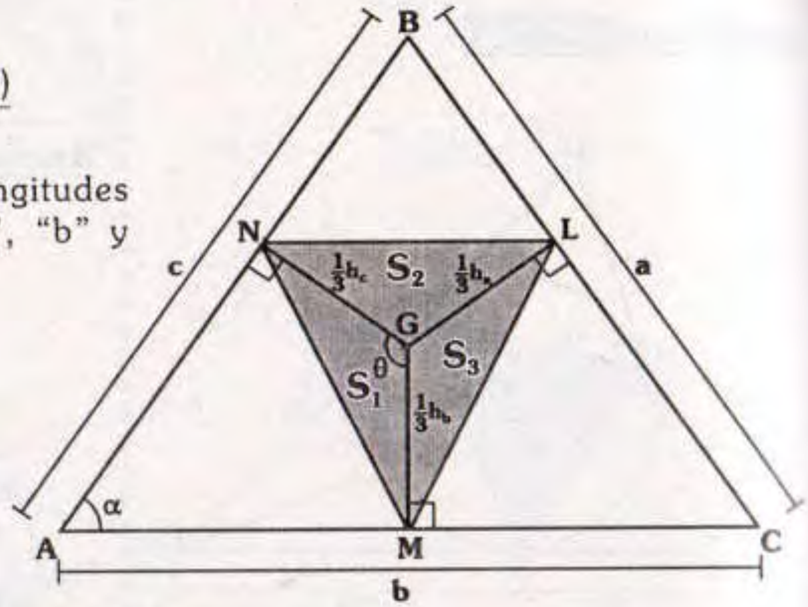
$$\therefore \ \mathbf{r=2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 160**

Nos piden probar:

$$S_{\Delta LMN}=\frac{4(S_{\Delta ABC})^3(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$$




- Sean "$h_a$", "$h_b$" y "$h_c$" las longitudes de las alturas relativas a "a", "b" y "c"
- Por teorema:

$$GN=\frac{1}{3}h_c \quad ; \quad GM=\frac{1}{3}h_b \ \text{ y}$$

$$GL=\frac{1}{3}h_a$$

- Como $\alpha+\theta=180°$ $\Rightarrow$ $\dfrac{S_1}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{h_bh_c}{9bc}$

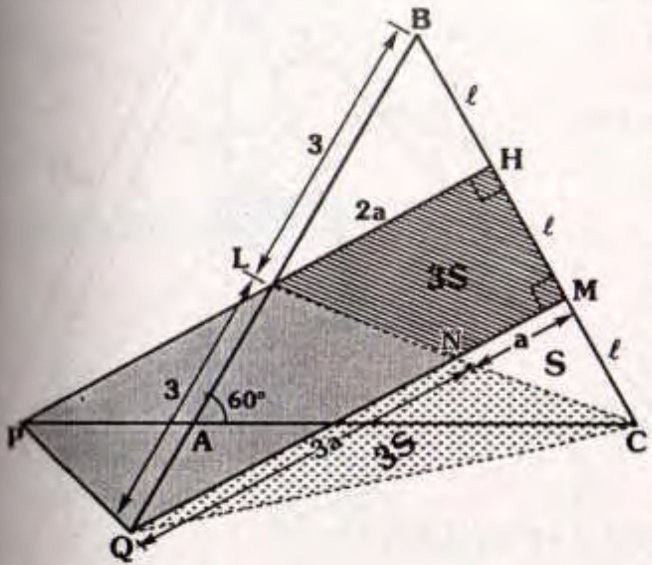
- Análogamente: $\dfrac{S_2}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{h_ah_c}{9ac}$ y $\dfrac{S_3}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{h_ah_b}{9ab}$

$$\Rightarrow \frac{S_1+S_2+S_3}{S_{\Delta ABC}}=\frac{h_bh_c}{9bc}+\frac{h_ah_c}{9ac}+\frac{h_ah_b}{9ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{\Delta LMN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{(bh_b)(ch_c)}{9b^2c^2}+\frac{(ah_a)(ch_c)}{9a^2c^2}+\frac{(ah_a)(bh_b)}{9a^2b^2}$$

- Como: $2S_{\Delta ABC}=ah_a=bh_b=ch_c$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta LMN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{4(S_{\Delta ABC})^2}{9b^2c^2}+\frac{4(S_{\Delta ABC})^2}{9a^2c^2}+\frac{4(S_{\Delta ABC})^2}{9a^2b^2} \qquad \therefore \quad \mathbf{S_{\Delta LMN}=\frac{4S^3_{\Delta ABC}(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}}$$

**RESOLUCIÓN Nº 161**




Nos piden $S_{(PQMH)}$

Dato: PC = 8 y BQ = 6

- Como BH=HM=MC $\Rightarrow \overline{NM}$ es base media en el ⊿LHC $\Rightarrow$ LH=2(MN)=2a; $\overline{LH}$ es base media en el ⊿QMB$\Rightarrow$ QM=2(LH)=4a
- Luego QN=3(NM)=3a
- Sea $S_{(MNC)} = S \Rightarrow S_{(QNC)} = 3S$ y en el ⊿LHC: $S_{(LHMN)} = 3S$

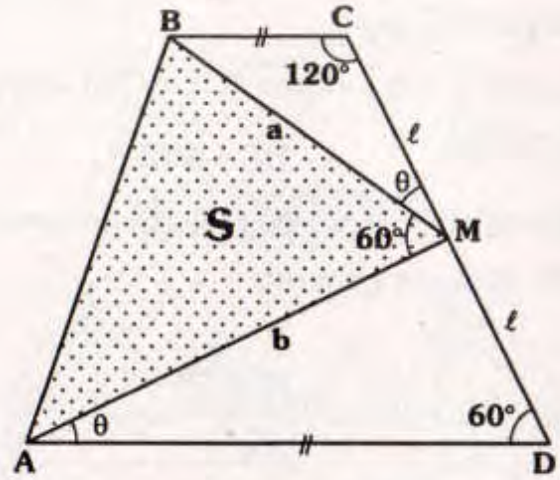
$$\Rightarrow S_{(QNC)} = S_{(LHMN)} = 3S$$

- Notemos ahora: $S_{(PQMH)} = \underbrace{S_{(PLCQ)}}_{\frac{(8)(3)}{2}\text{sen}60°}$

$$\therefore \mathbf{S_{(PQMH)} = 6\sqrt{3}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 162**




Nos piden $S_{(ABCD)}$

Dato $ab = 20u^2$

- Como $\overline{AD} // \overline{BC} \Rightarrow m\sphericalangle ADC = 60°$
- En ΔADM por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle AMC = 60° + \theta \Rightarrow m\sphericalangle AMB = 60°$$

$$\Rightarrow S = \frac{ab}{2}\text{sen}60°$$

$$S = 5\sqrt{3}$$

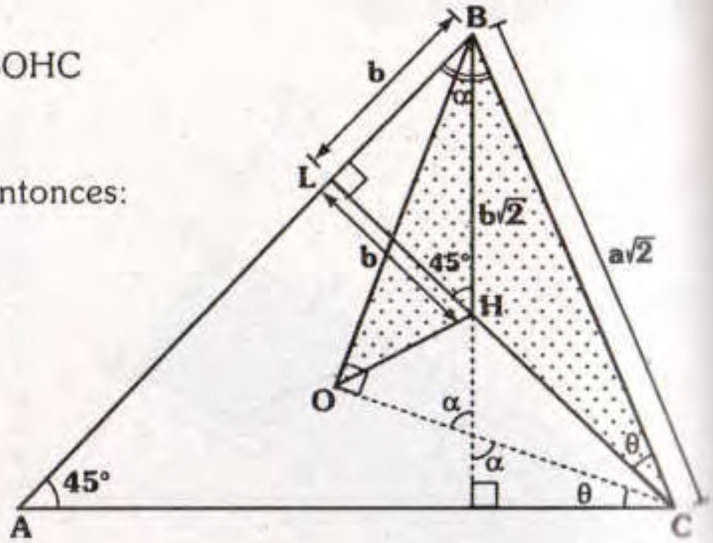
- Por propiedad:

$$S_{(ABCD)} = 2S$$

$$\therefore \mathbf{S_{(ABCD)} = 10\sqrt{3}\ u^2}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 163**




Consideremos el orden de los vértices: BOHC

Nos piden $S_{(\measuredangle BOHC)}$

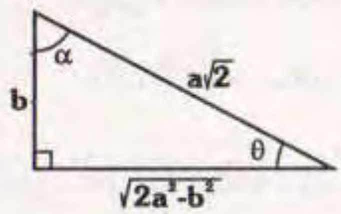
- Como el circunradio (OC=OB) es a, entonces:

$$BC = a\sqrt{2}$$

- En ⊿BLH: $BH = b\sqrt{2}$
- Por fórmula general:

$$S_{(\measuredangle BOHC)} = \frac{(b\sqrt{2})\overbrace{(OC)}^{a}}{2}\operatorname{sen}\alpha \quad ...(I)$$

- Como $m\measuredangle OCA = m\measuredangle HCB = \theta$ y $\alpha + \theta = 90° \Rightarrow m\measuredangle CBA = \alpha$
- En ⊿BLC:

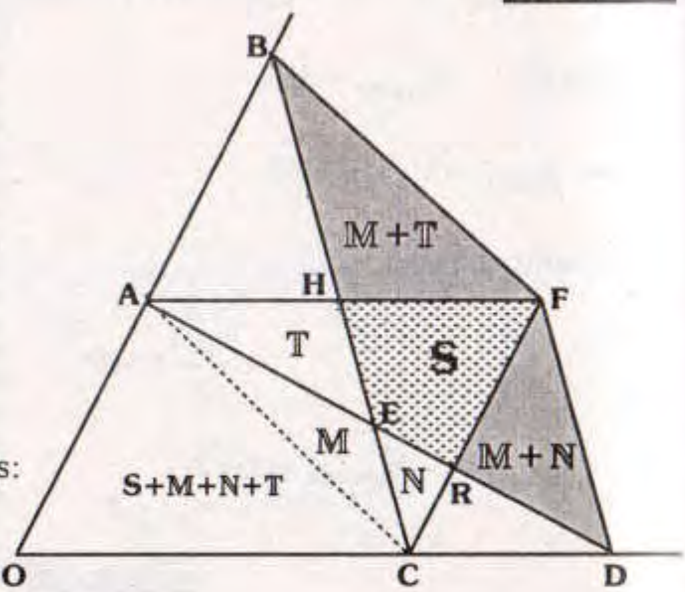



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2a^2 - b^2}}{a\sqrt{2}}$$

- En (I): $S_{(\measuredangle BOHC)} = \frac{b\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2a^2 - b^2}}{a\sqrt{2}}$ $\quad \therefore \quad \mathbf{S_{(\measuredangle BOHC)} = \frac{b\sqrt{2a^2 - b^2}}{2}}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 164**




Por demostrar: $Área_{(OAEC)} = Área_{(BFDE)}$

- Como $\overline{OB} // \overline{CF}$ y $\overline{OC} // \overline{AF}$, entonces:

$- S_{(\Delta ARC)} = S_{(\Delta RFD)} = \mathbb{M} + \mathbb{N}$

$- S_{(\Delta AHC)} = S_{(\Delta BHF)} = \mathbb{M} + \mathbb{T}$

- Al ser OAFC un paralelogramo, entonces:

$- S_{(\Delta OAC)} = S_{(\Delta OFC)} = \mathbb{S} + \mathbb{M} + \mathbb{N} + \mathbb{T}$

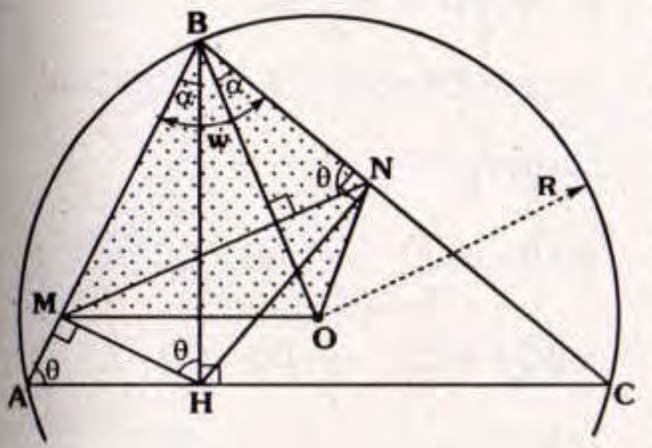
- Luego:

– $\text{Área}_{(OAEC)} = S + 2\mathbb{M} + \mathbb{N} + \mathbb{T}$ y

– $\text{Área}_{(BFDE)} = S + 2\mathbb{M} + \mathbb{N} + \mathbb{T}$

$$\therefore \ \textbf{Área}_{(OAEC)} = \textbf{Área}_{(BFDE)}$$

**RESOLUCIÓN Nº 165**




Piden $S_{(\square ONBM)}$

Dato: $S_{(\Delta ABC)} = S$

- Sea $m\sphericalangle HAM = \theta \Rightarrow m\sphericalangle MHB = \theta$
- Como $\square$MHNB es inscriptible
  $\Rightarrow m\sphericalangle MNB = \theta$
- Debido a que $\alpha + \theta = 90^\circ \Rightarrow \overline{OB} \perp \overline{MN}$
- Sea BH$= \ell$, de la observación:

$$MN = \ell \operatorname{sen} w$$

$$\Rightarrow S_{(\square ONBM)} = \frac{(\ell \operatorname{sen} w)R}{2} \qquad ...(I)$$

- Como AC=2Rsenw

$$\Rightarrow S_{(\Delta ABC)} = \frac{(2R\operatorname{sen} w)\ell}{2} \qquad ...(II)$$

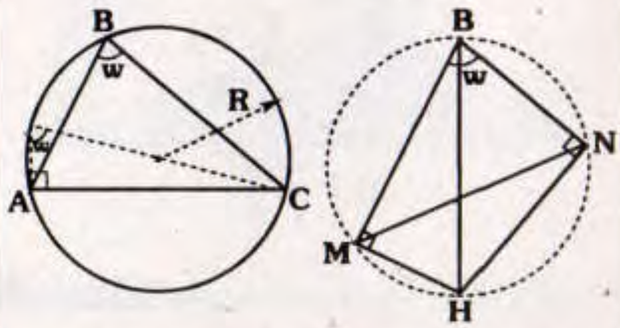
- De (I) y (II):

$$\underbrace{S_{(\Delta ABC)}}_{S} = 2S_{(\square ONBM)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{(\square ONBM)} = \frac{S}{2}}$$

**Clave A**

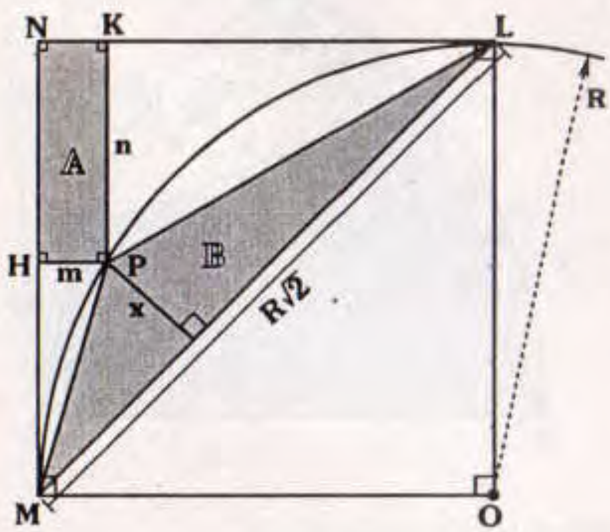
**Observación**




**AC=2Rsenw**

**Como $\overline{BH}$ es diámetro MN=(BH) senw**

**RESOLUCIÓN Nº 166**




Nos piden R en función de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$

- Por propiedad de semejanza:

$$x^2 = mn \qquad ...(I)$$

• Tenemos: $\mathbb{A} = mn$ ...(II)

$$\mathbb{B} = \frac{(R\sqrt{2})x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{B}^2 = \frac{R^2}{2}\cdot x^2 \quad ...(III)$$

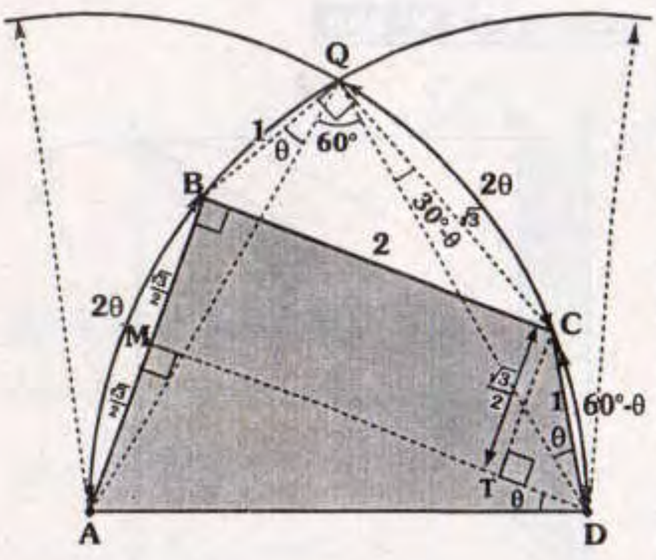
• De (I), (II) y (III):

$$\mathbb{B}^2 = \frac{R^2}{2}\cdot \mathbb{A}$$

$$\therefore \quad \mathbf{R} = \sqrt{\frac{2\mathbb{B}^2}{\mathbb{A}}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 167**




Nos piden $S_{\triangle ABCD}$

• ΔAQD : equilátero

• Trazamos $\overline{DM} \perp \overline{AB}$

$$\Rightarrow m\measuredangle BQA = m\measuredangle ADM = \theta \quad y$$

$$AM = MB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• Se traza $\overline{CT} \perp \overline{DM}$

$$\Rightarrow CT = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• El ⊿CTD es notable

$$\Rightarrow m\measuredangle CDT = 60° \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle QDC = \theta$$

• Luego:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{QC} \quad \Rightarrow \quad AB = QC = \sqrt{3} \quad y$$

$$m\widehat{BQ} = m\widehat{CD} \quad \Rightarrow \quad BQ = CD = 1$$

• También:

$$m\measuredangle BQC = 90° \quad \Rightarrow \quad BC = 2$$

• Como MBCT es rectángulo $\Rightarrow MT = 2$

• $MD = MT + TD = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

• Luego:

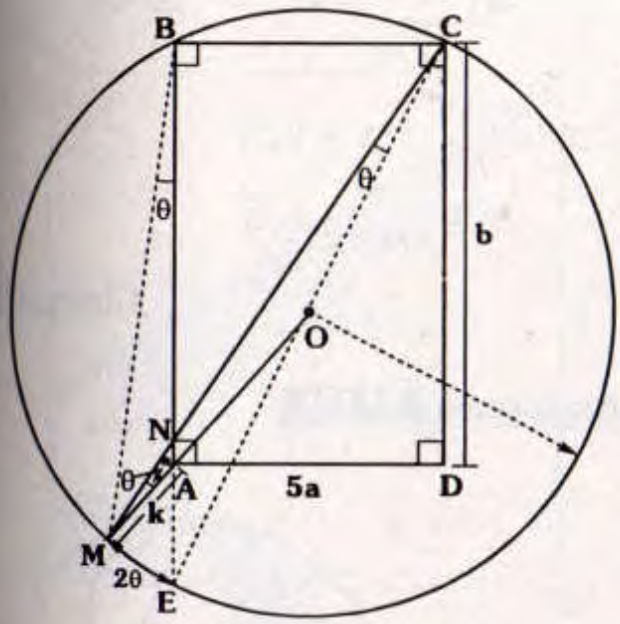
$$S_{\triangle ABCD} = S_{(MBCD)} + S_{(AMD)}$$

$$S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\triangle ABCD} = \frac{7}{4}\sqrt{3}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 168**




Piden $S_{(ABCD)}$

- Se prolonga $\overline{BA}$ hasta que corte a la circunferencia en E, entonces: $\overline{CE}$ es diámetro, pues $m\sphericalangle CBE = 90°$
- $\Delta MCO$: isósceles, entonces:

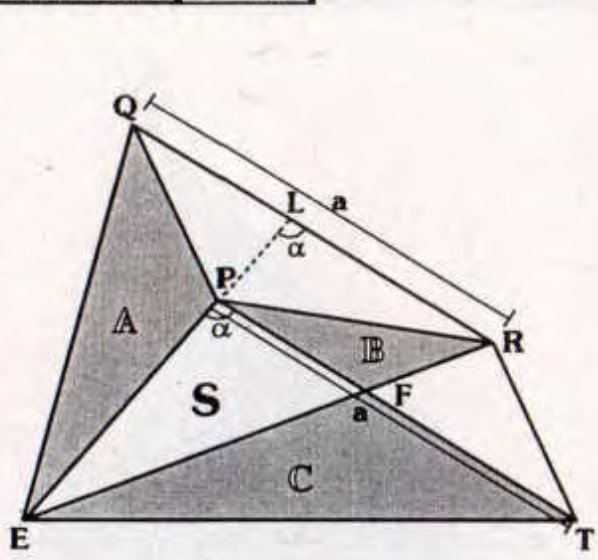
  $m\sphericalangle OMC = m\sphericalangle MCO = \theta$
- Por ángulo inscrito:

  $m\sphericalangle MBE = m\sphericalangle MCE = \theta$
- En $\Delta MAB$: $k^2 = \underbrace{(AN)}_{a}\underbrace{(AB)}_{b}$
- Como $S_{(ABCD)} = (5a)b$

  $\therefore\ \mathbf{S_{(ABCD)} = 5k^2}$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 169**




Nos piden la relación entre $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$.

- Sea $S_{(\Delta EPF)} = S$
- Como PQRT es paralelogramo

  $\Rightarrow m\sphericalangle EPT = m\sphericalangle PLR$ y $PT = QR = a$

- $S_{\measuredangle QPRE} = \mathbb{A} + \mathbb{B} + S = \dfrac{(EP)a}{2}\operatorname{sen}\alpha \qquad ...(I)$

- $S_{\Delta APT} = \mathbb{C} + S = \dfrac{a(EP)}{2}\operatorname{sen}\alpha \qquad ...(II)$

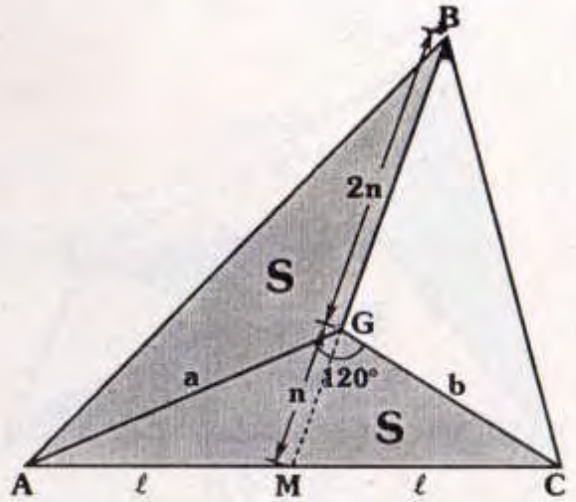
- De (I) y (II):

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} + S = \mathbb{C} + S$$

$$\therefore\ \mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{C}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 170**




Nos piden $S_{\measuredangle ABGC}$

Dato: $AC^2-BG^2=16$

$$\Rightarrow \ell^2-n^2=4$$

- Como G es baricentro, entonces:

$$S_{\Delta ABG}=S_{\Delta BGC}=S$$

$$\Rightarrow S_{\measuredangle ABGC}=2S$$

- En $\Delta AGC$:

$$S=\frac{ab}{2}\text{sen}120°=ab\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad ...(\theta)$$

- Por teorema de cosenos, en $\Delta AGC$:

$$4\ell^2=a^2+b^2+ab \qquad ...(\alpha)$$

- Por teorema del cálculo de la mediana:

$$a^2+b^2=2n^2+\frac{(2\ell^2)}{2}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=2n^2+2\ell^2 \qquad ...(\beta)$$

- De $(\alpha)$ y $(\beta)$:

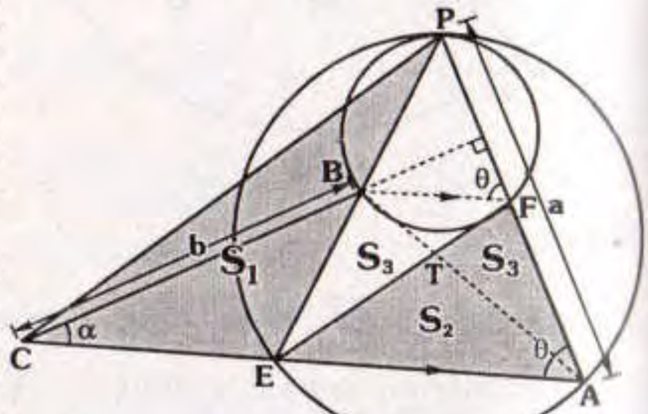
$$2(\underbrace{\ell^2-n^2}_{4})=ab \quad \Rightarrow \quad ab=8$$

- En $(\theta)$: $\quad S=2\sqrt{3}$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\measuredangle ABGC}=4\sqrt{3}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 171**




Nos piden $S_{\Delta CPE}+S_{\Delta EFA}$

- Por propiedad de circunferencia:

$$m\widehat{BP}=m\widehat{EP} \quad \Rightarrow \quad \overline{EA}\ //\ \overline{BF}$$

- Sea: $S_{\Delta FTA}=S_3 \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta BTE}=S_3$
- Luego:

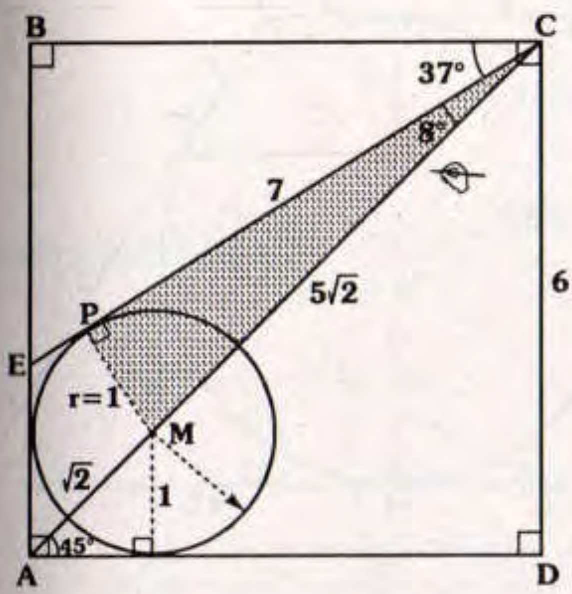
$$S_{\measuredangle CPBA}=S_{\Delta CPE}+S_{\Delta EBA}=S_1+S_2+S_3$$
$$=S_{\Delta CPE}+S_{\Delta EFA}$$

- En (I): Por fórmula general:

$$S_{\measuredangle CPBA}=\frac{ab}{2}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 172**




Nos piden $S_{(ABCD)}$

- Trazamos la diagonal AC, la cual pasará por M:

Como $m\sphericalangle BCA = 45° \Rightarrow m\sphericalangle ACP = 8°$

- En ⊿MPC:

Como $PC = 7 \Rightarrow MP = 1$

$\Rightarrow \quad MC = 5\sqrt{2} \quad y \quad AM = \sqrt{2}$

- Como $AC = 6\sqrt{2}$

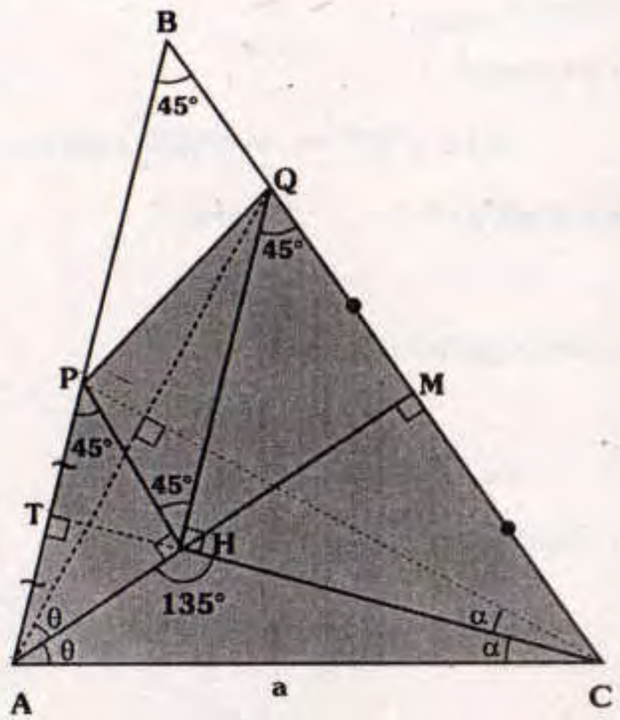
$\Rightarrow \quad CD = 6$

- Finalmente:

$$\mathbf{S_{(ABCD)} = 36}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 173**




Nos piden $S_{\triangle APQC}$

- Como PBQH es un paralelogramo, entonces:

$m\sphericalangle HQC = m\sphericalangle HPA = 45° \quad$ y

$m\sphericalangle QHC = m\sphericalangle AHP = 90°$

- En ⊿AHP y ⊿QHC:

$AT = TP \quad y \quad QM = MC$

$\Rightarrow \quad AC = CP = AQ = a$

- Como $\alpha + \theta = 45° \Rightarrow 2\alpha + 2\theta = 90°$, con ello $\overline{AQ} \perp \overline{CP}$

- Por fórmula general para APQC:

$$S_{\triangle APQC} = \frac{(AQ)(PC)}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\triangle APQC} = \frac{a^2}{2}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 174**

Piden $S_{(ABCD)}$

- Notemos

$$\alpha + \theta = 90° \Rightarrow m\measuredangle AOB = 90°$$

- En ⊿AOB: $r^2 = (4)(9)$

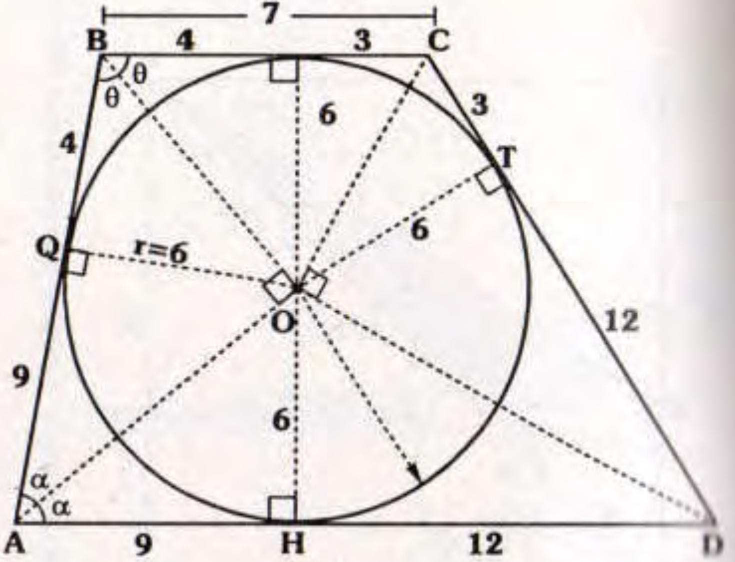
$$\Rightarrow r = 6$$

- Análogamente en ⊿DOC:

$$6^2 = (3)(TD)$$

$$\Rightarrow TD = 12$$

- Finalmente:




$$S_{(ABCD)} = \left(\frac{21+7}{2}\right) \cdot 12$$

$$\therefore \; \mathbf{S_{(ABCD)} = 168\ u^2}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 175**

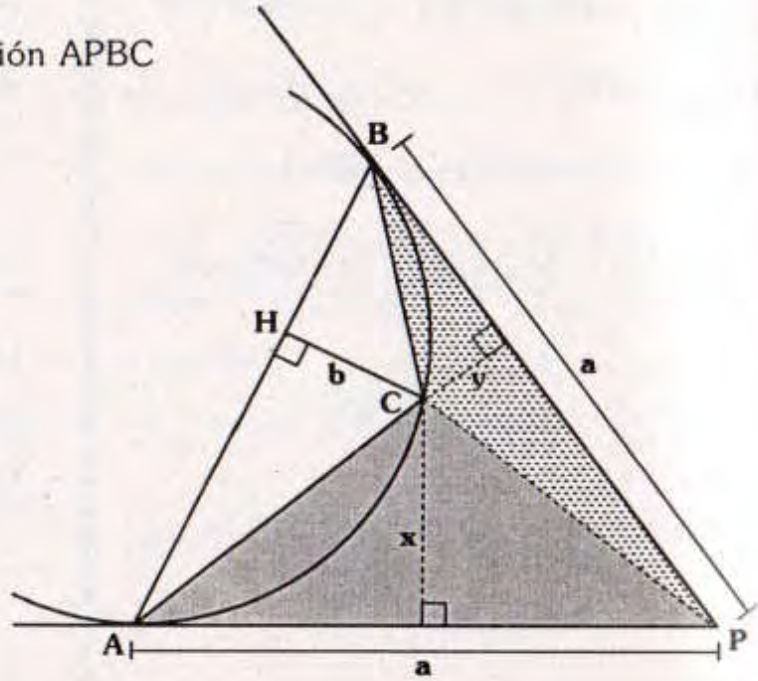
Nos piden el área mínima de la región APBC

- Analizando por partes:

$$S_{APBC} = \underbrace{S_{\Delta ACP}} + S_{\Delta PBC}$$

$$\frac{ax}{2} + \frac{bx}{2}$$

$$\Rightarrow S_{(APBC)} = \frac{a}{2}(x+y)$$




- Por propiedad de semejanza:

$$b^2 = xy$$

- Usando M.A. ≥ M.G para x e y:

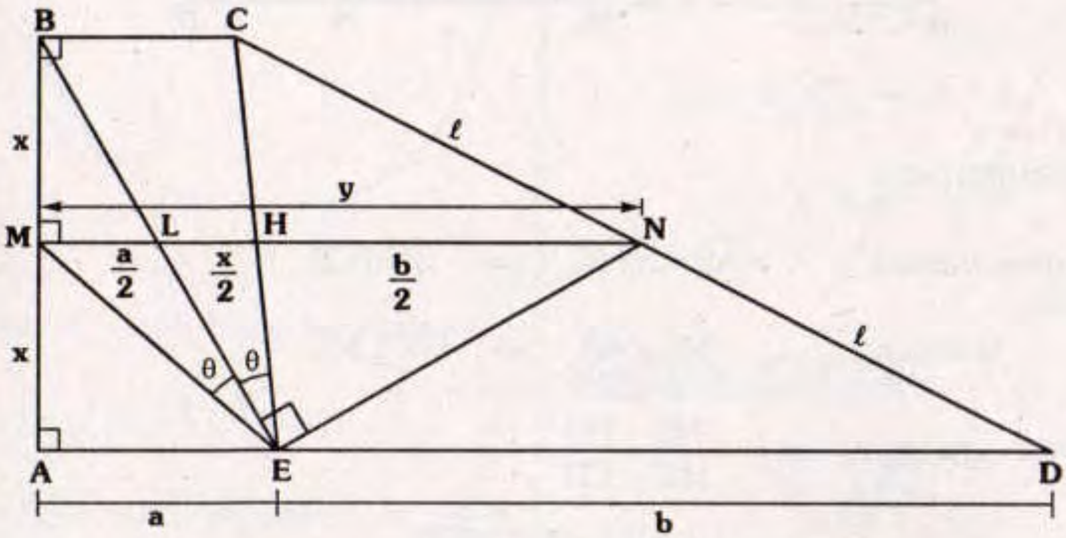
$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow \quad x+y \geq 2b \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{a}{2}(x+y)}_{S_{(APBC)}} \geq ab$$

$\therefore$ **El área mínima es : "ab"**

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 176**




Nos piden $S_{\triangle ABCD}$

Dato: $ab=16$

- Por propiedad $S_{\triangle ABCD}=(AB)(MN)=2xy$

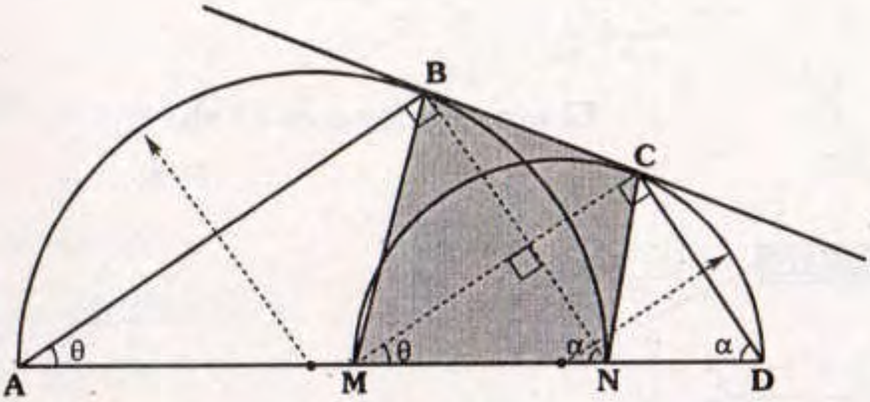
- Notemos que para el $\Delta MHE$ : $\overline{EL}$ y $\overline{EN}$ son bisectrices interior y exterior respectivamente, entonces: M, L, H y N son cuaterna armónica

$$\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{x}{2}y \quad \Rightarrow \quad xy=8$$

$$\therefore \quad S_{\triangle ABCD}=16$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 177**




Piden $S_{(\square MBCN)}$

Dato: $(AB)(CD)=16$

- Por la observación: $m\widehat{AB} = m\widehat{MC} \Rightarrow \overline{BN} \,//\, \overline{CD}$

  también: $\overline{MC} \,//\, \overline{AB} \Rightarrow \overline{BN} \perp \overline{MC}$

- $\triangle ABN \sim \triangle MCD \Rightarrow \dfrac{AB}{MC} = \dfrac{NB}{CD}$

$$\Rightarrow (AB)(CD) = (MC)(NB)$$

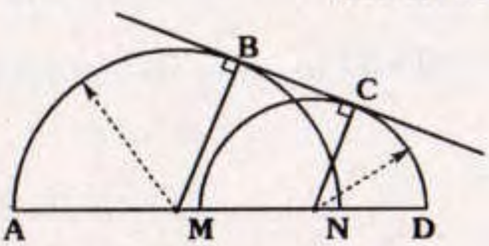
- De la fórmula general:

$$S_{(\square MBCN)} = \frac{(MC)(NB)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{(\square MBCN)} = 8}$$

**Clave B**

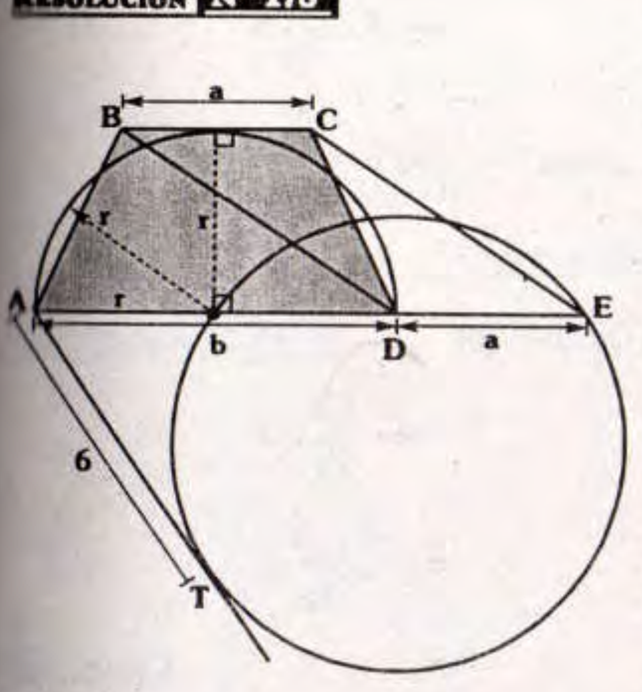
**Observación**




Se cumple : $m\widehat{AB} = m\widehat{MC}$

$m\widehat{BN} = m\widehat{CD}$

**Resolución Nº 178**




Piden $S_{(\square ABCD)}$

- Como ABCD es un trapecio, entonces:

$$S_{(\square ABCD)}=\left(\frac{a+b}{2}\right)r$$

- Al ser DBCD paralelogramo, se tiene BC=DE=a

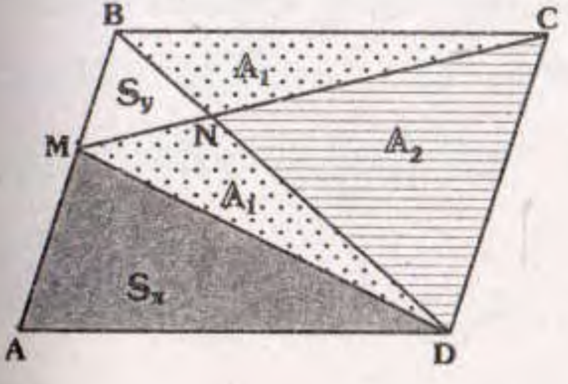
- Por teorema de la tangente:

$$6^2 = r(a+b)$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{(\square ABCD)}=18}$$

**Clave A**

**Resolución Nº 179**




Piden $S_x$ en función de $A_1$ y $A_2$

- Como $\overline{MB}//\overline{DC} \Rightarrow S_{\Delta MND} = A_1$

- Por propiedad: $(S_y)A_2 = A_1^2$

$$\Rightarrow\quad S_y=\frac{A_1^2}{A_2}$$

- Como $\overline{BD}$ es diagonal, entonces:

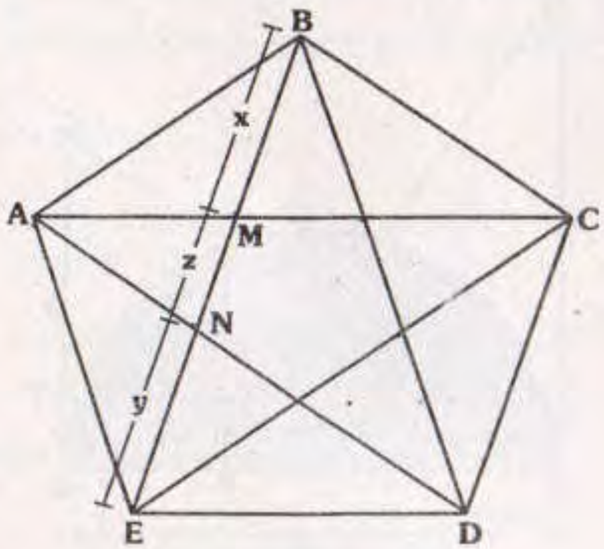
$$S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BCD}$$

$$S_x + A_1 + S_y = A_1 + A_2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_x=\frac{A_2^2-A_1^2}{A_2}}$$

**Clave D**

**Resolución Nº 180**




Piden $\frac{x}{y}$

Dato:

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BCD}=S_{\Delta CDE}=S_{\Delta DEA}=S_{\Delta EAB}$$

• Del dato podemos deducir:

– como $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCD} \Rightarrow \overline{AD} // \overline{BC}$

– como $S_{\Delta CDE} = S_{\Delta DEA} \Rightarrow \overline{ED} // \overline{AC}$

$S_{\Delta CDE} = S_{\Delta BCD} \Rightarrow \overline{DC} // \overline{EB}$

• Luego EMCD y NBCD son paralelogramos

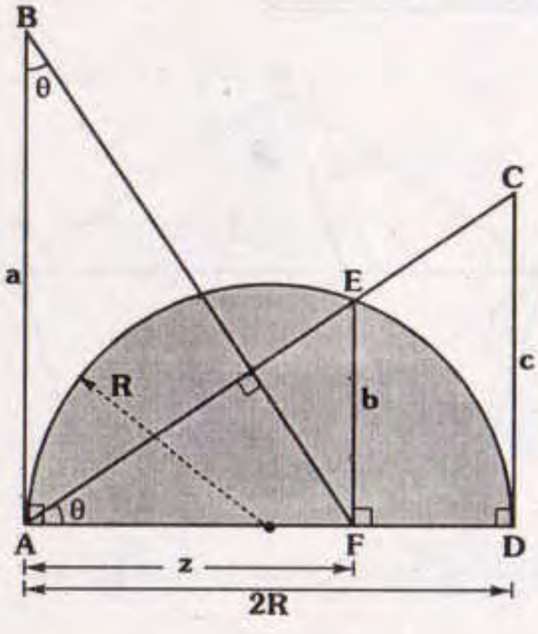
$\Rightarrow$ EM=CD=NB

$\Rightarrow y+z=x+z \Rightarrow x=y$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = 1$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 181**




Piden S⌓ en función de a, b y c

• $S_{⌓} = \frac{\pi R^2}{2}$

• $⊿AFE \sim ⊿ADC \Rightarrow \frac{2R}{c} = \frac{z}{b}$

$$\Rightarrow R = \frac{c}{2b}.z \qquad ...(I)$$

• $⊿BAF \sim ⊿AFE \Rightarrow \frac{z}{a} = \frac{b}{z}$

$$\Rightarrow z = \sqrt{ab} \qquad ...(II)$$

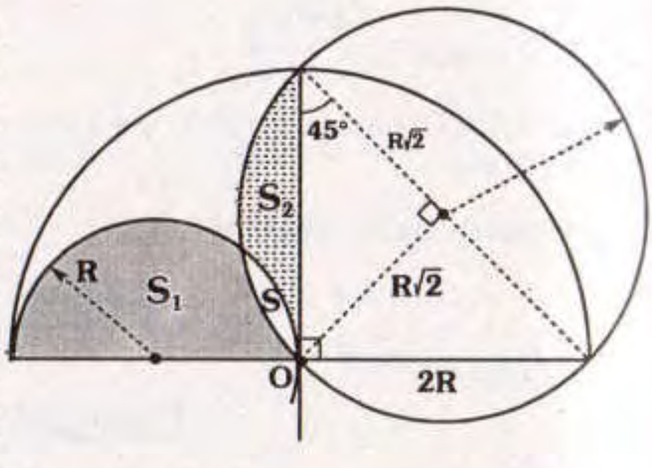
• De (I) y (II):

$$R = \frac{c}{2b}\sqrt{ab}$$

$$\therefore \quad S_{⌓} = \frac{ac^2}{8b}\pi$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 182**




Nos piden $S_1 - S_2$

• Notemos: $S_1 - S_2 = (S_1 + S) - (S_2 + S)$

• Luego:

– $$S_1 + S = \frac{\pi R^2}{2} \qquad ...(I)$$

– $$S_2 + S = \frac{1}{4}\pi(R\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(R\sqrt{2})(R\sqrt{2})$$

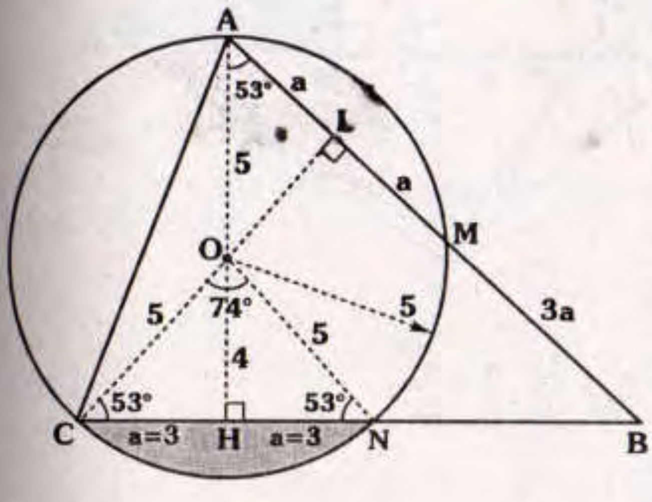
$$\Rightarrow \quad S_2+S=\frac{\pi R^2}{2}-R^2 \qquad ...(II)$$

• De (I) y (II):

$$S_1-S_2=R^2$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 183**




Sea S⌓ el área de la región sombreada

Nos piden S⌓

Dato: 3(AM)=2(BM) ⇒ AM=2a y MB=3a

• Como O es ortocentro del ΔABC, entonces $\overline{CL}$ y $\overline{AH}$ son alturas ⇒ ΔABC ; isósceles

• Tenemos entonces: AL=LM=a

• ⊿AHB: notable de 37° y 53°

⇒ m∢OCN=53° y m∢CON=74°

• Finalmente:

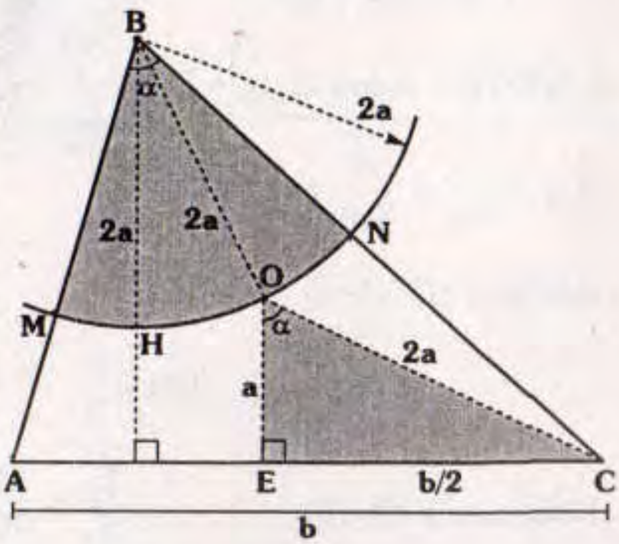
$$S_{⌓}=S_{∢NOC}-S_{\Delta NOC}$$

$$\Rightarrow \quad S_{⌓}=\frac{74°}{360°}\pi 5^2-\frac{(6)4}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{⌓}=\frac{185}{36}\pi-12}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 184**




Nos piden $S_{∢MON}$

• Como HB=OB, al trazar $\overline{OE}\perp\overline{AC}$ se tendrá: HB=2(OE)

• Luego el ⊿OEC es notable de 30° y 60°, entonces: m∢EOC = m∢ABC = 60°

• En el ⊿OEC:

$$\frac{b}{2}=a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{b}{2\sqrt{3}}$$

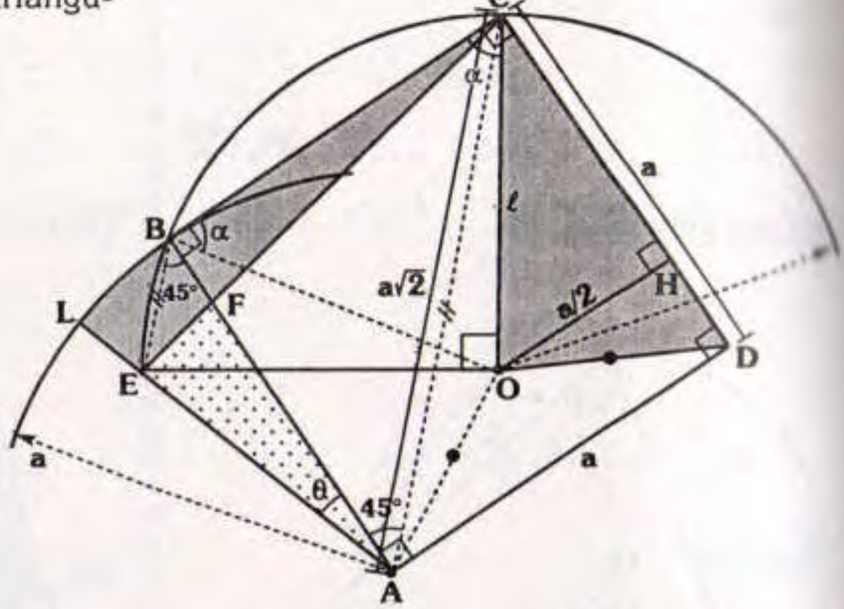
• $$S_{∢MON}=\frac{60°}{360°}\pi(2a)^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{∢MON}=\frac{\pi b^2}{18}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 185**

Sea $S_1$ el área de la región mixtilínea LECB y $S_2$ el área de la región triangular CDO.




Nos piden: $\dfrac{S_1}{S_2}$

- Como $m\sphericalangle EBC = 135°$

$\Rightarrow m\sphericalangle EBA = 45°$

$\Rightarrow \overline{EB} // \overline{AC}$, luego $S_{\Delta FBC} = S_{\Delta EFA}$

- $S_1 = S_{\triangleleft LAB} = \dfrac{\theta}{360°}\pi a^2 \quad ...(I)$

- $\Delta AOB \cong \Delta COD \Rightarrow OA = OD$

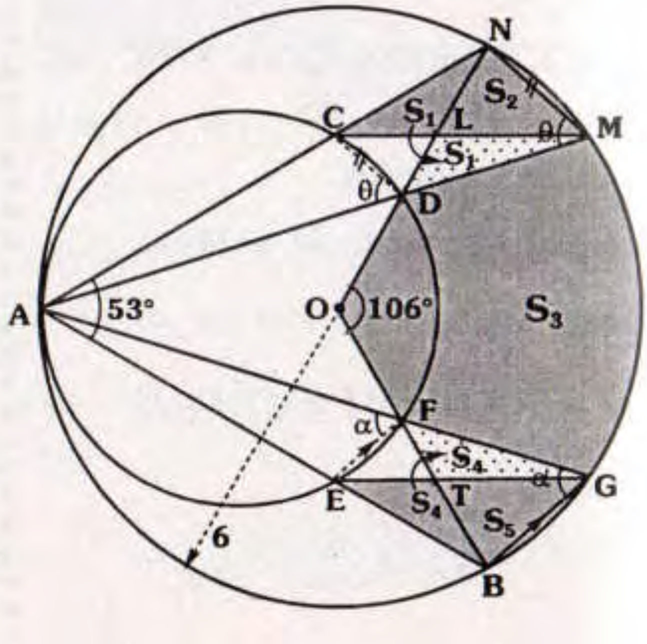
$$OH = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{1a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} \quad ...(II)$$

- Finalmente (I)÷(II): $\quad \therefore \quad \mathbf{\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\pi\theta}{90°}}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 186**

Nos piden $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$




- Como $m\widehat{AC} = m\widehat{AN} \Rightarrow \overline{DC} // \overline{MN}$

$m\widehat{AE} = m\widehat{AB} \Rightarrow \overline{EF} // \overline{BG}$

- Por propiedad de áreas:

$S_{\Delta CLN} = S_{\Delta DLM} = S_1$

$S_{\Delta ETB} = S_{\Delta FTG} = S_4$

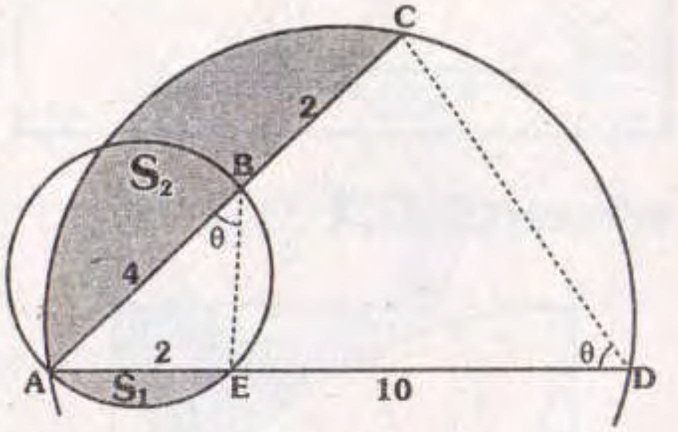
- Luego:

$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5 = S_{\triangleleft NOB}$

$$\Rightarrow\ S_{\triangle NOB}=\frac{106°}{360°}\pi 6^2 \qquad \therefore\ \mathbf{S_{\triangle NOB}=\frac{53}{5}\pi}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 187**




Nos piden $\frac{S_1}{S_2}$

- Notemos (AB)(AC) = (AE)(AD)

  $\Rightarrow$ ⏢EBCD es inscriptible

- Luego $m\measuredangle ABE = m\measuredangle CDA$
- Las regiones sombreadas son semejantes, entonces:

$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

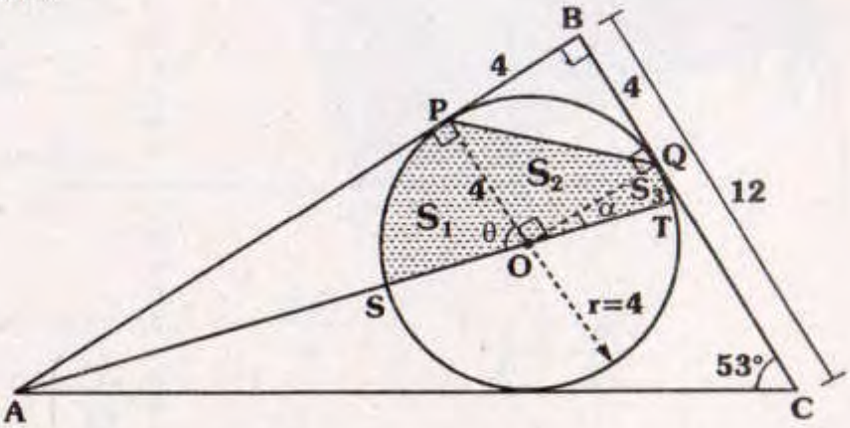
$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_2}{S_1}=9}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 188**

Nos piden el área de la región sombreada

- Optemos hallar el área por partes
- De la observación: r = 4
- Luego:



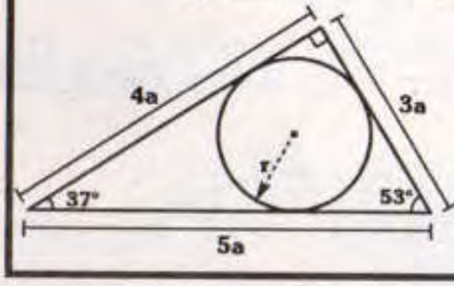

$$S_2=\frac{(4)(4)}{2}=8$$

$$S_1+S_3=S_{\triangle}=\frac{1}{4}\pi(4)^2=4\pi$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2+S_3=4(\pi+2)}$$

**Clave E**

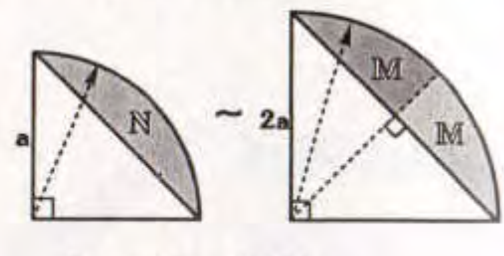
**Observación**




Se cumple :

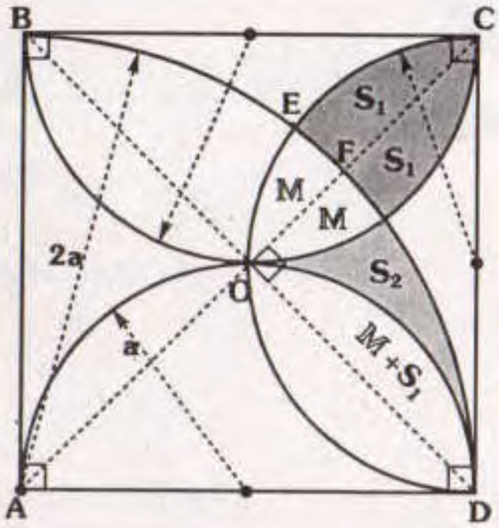
r=a

**Observación**




**Se cumple: M = 2N**

## RESOLUCIÓN Nº 189




Nos piden la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.

- Notemos que el punto de concurrencias de las tres semicircunferencias es el centro del cuadrado.
- De la observación:

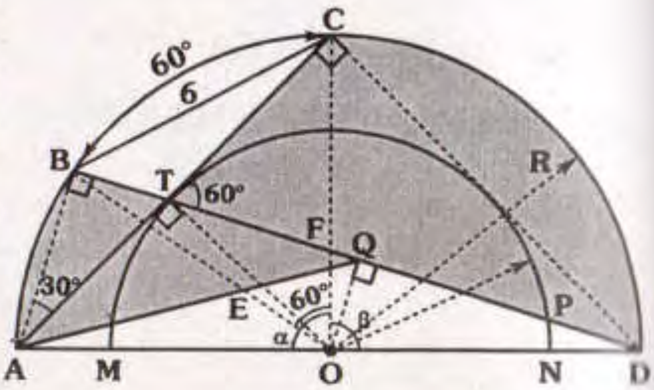
$$2M + S_1 + S_2 = 2(M + S_1)$$

$$\Rightarrow \; S_2 = S_1$$

$$\therefore \; \mathbf{\frac{S_2}{2S_1} = \frac{1}{2}}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 190




Nos piden el área de la región sombreada.

- Como $m\widehat{TP} = 120° \Rightarrow m\measuredangle CTP = 60°$, luego $m\measuredangle BAC = 30°$ y $m\widehat{BC} = 60°$
- $\Delta BOC$ : equilátero $\Rightarrow R = 6$
- Como $\overline{AB} // \overline{OQ}$ y $\overline{OT} // \overline{DC}$

$$\Rightarrow \; S_{\Delta AEO} = S_{\Delta BEQ} \text{ y } S_{\Delta TFC} = S_{\Delta OFD}$$

- El área pedida es:

$$\underbrace{S_{\triangle AOB}} + \underbrace{S_{\triangle DOC}}$$

$$\frac{\alpha}{360°}\pi 6^2 \; + \frac{\beta}{360°}\pi 6^2$$

- Como $\alpha + \beta = 120°$

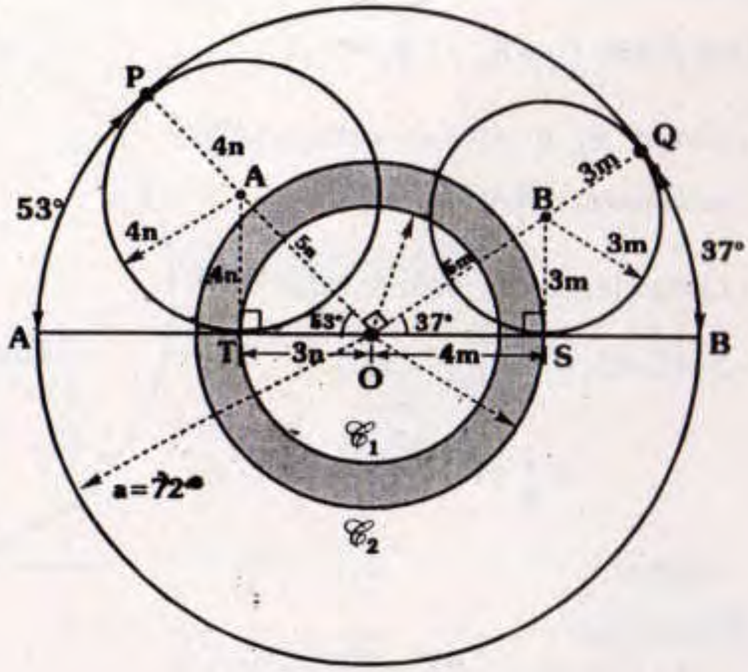
$$\therefore \; \mathbf{S_{\triangle AOB} + S_{\triangle DOC} = 12\pi}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 191**

Sea $A_{cc}$ el área de la corona circular

Nos piden $A_{cc}$



- Los ⊿s OSB y OTA son notables de 37° y 53°.
- Hallemos los radios de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$:

$$9n = 72 \Rightarrow n = 8$$

$$8m = 72 \Rightarrow m = 9$$

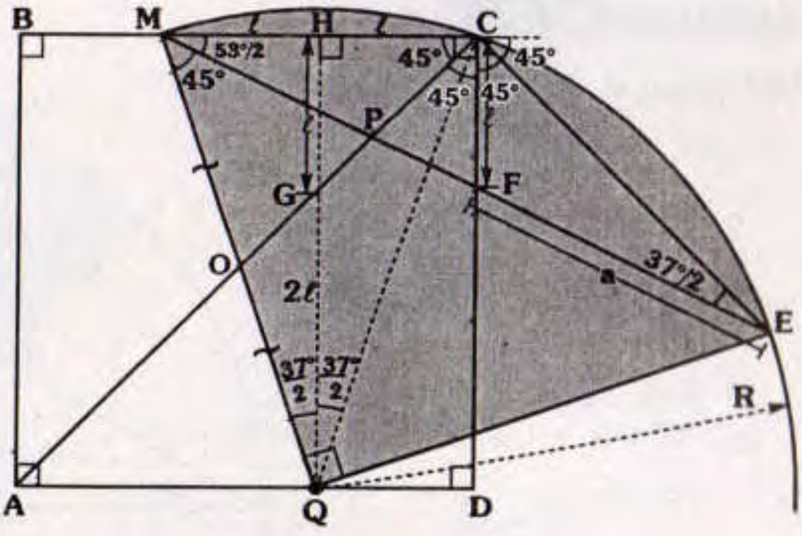
- $A_{cc} = \pi(4m)^2 - \pi(3n)^2$
- Finalmente tenemos:

$$\therefore\ \mathbf{A_{cc} = 720\pi}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 192**

Nos piden $S_{\triangle}$

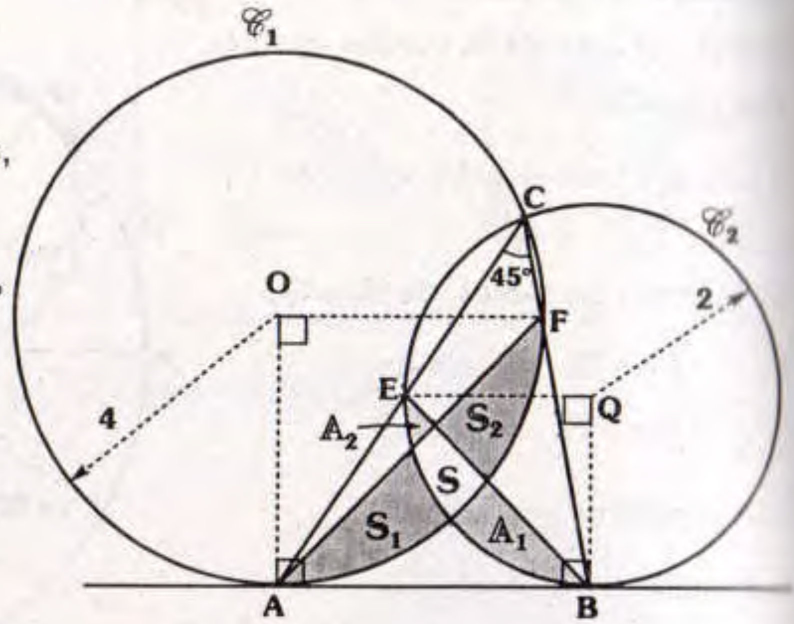


- Sabemos que $S_{\triangle} = \dfrac{1}{4}\pi R^2$
- En el $\Delta$MQC, se traza la altura $\overline{QH} \Rightarrow$ G es baricentro de dicho triángulo, luego QG=2(GH) y como $m\measuredangle GCH = 45° \Rightarrow$ ⊿CHQ es notable de 37°/2
- Como $m\measuredangle MCE = 135°$
  $\Rightarrow m\measuredangle EMC = 53°/2$
- En ⊿MCF, como $\overline{CE}$ es bisectriz exterior: $\Rightarrow \dfrac{R\sqrt{2}}{a} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow R = a\sqrt{2}$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle} = \frac{\pi a^2}{2}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 193**




Nos piden $S_1 + S_2 - (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)$

- Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales, entonces: $m\measuredangle ACB = 45°$
- Luego tenemos: $m\widehat{AF} = m\widehat{EB} = 90°$
- $S_1 + S + S_2 = S_{\square AOF} - S_{\Delta AOF}$

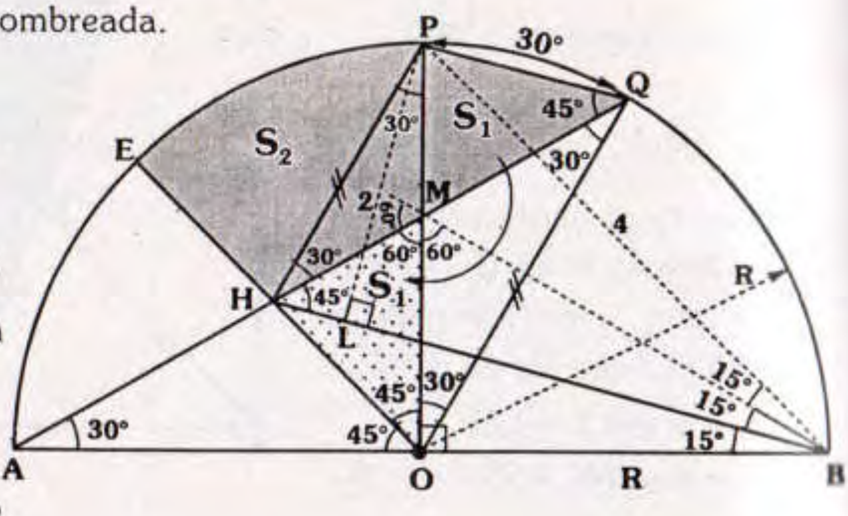
$$= \frac{1}{4}\pi 4^2 - \frac{(4)(4)}{2} = 4\pi - 8$$

- También:
- $\mathbb{A}_1 + S + \mathbb{A}_2 = \frac{1}{4}\pi 2^2 - \frac{(2)(2)}{2} = \pi - 2$

$$\therefore \quad \mathbf{S_1 + S_2 - (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2) = 3(\pi - 2)}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 194**




Nos piden el área de la región sombreada.

- Como

$$m\measuredangle PHQ = m\measuredangle HQO = 30°$$

$\Rightarrow \overline{HP} // \overline{OQ} \Rightarrow S_{\Delta HMO} = S_{\Delta MPQ} = S_1$

- El área de la región pedida es "$S_1 + S_2$", luego:

$$S_1 + S_2 = S_{\triangle POE}$$

- Notemos que H es excentro del $\triangle$MOB, entonces:

$$m\measuredangle OBH = m\measuredangle HBM = 15°$$

- En $\triangle$PLB: notable de 30°, entonces: PB=4

• $\triangle$POB: notable de 45°:

$$\Rightarrow R\sqrt{2}=4 \Rightarrow R=2\sqrt{2}$$

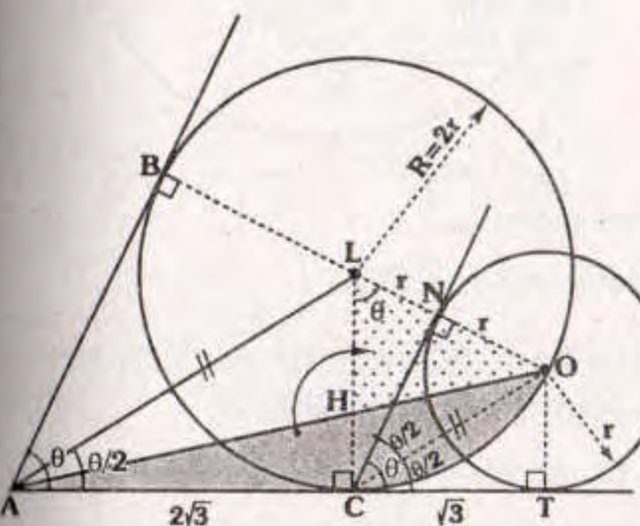
• Finalmente:

$$S_1+S_2=S_{\triangle POE}=\frac{45°}{360°}\pi(2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\triangle POE}=\pi}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 195**




Nos piden el área de la región sombreada

• Como :

$m\overset{\frown}{BC}=180°-\theta$ y $m\overset{\frown}{CO}=\theta \Rightarrow$

$m\overset{\frown}{BCO}=180°$, luego $\overline{BO}$ es diámetro

• $m\measuredangle NOC=90°-\frac{\theta}{2}$, es decir:

$m\measuredangle ONC=\frac{m\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow$ O; N; L y B son colineales

• Como

$\overline{AL}//\overline{CO} \Rightarrow S_{\triangle AHC}=S_{\Delta HLO}$ el área pedida es $S_{\triangle CLO}$

• $\triangle ACL \sim \triangle CTO \Rightarrow R=2r$

Luego:

$LN=NO=r \Rightarrow CL=CO \Rightarrow \Delta CLO$ es equilátero $\Rightarrow \theta=60°$

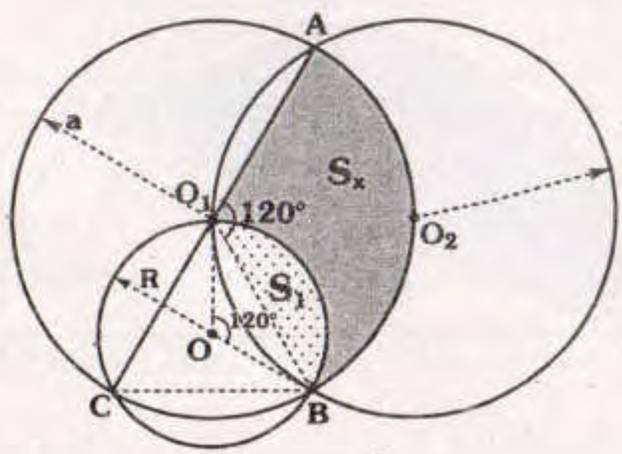
• $\triangle$CTO: notable de 30° $\Rightarrow r=1$

• $$S_{\triangle CLO}=\frac{60°}{360°}\pi(2)^2$$

$$\therefore \mathbf{S_{\triangle CLO}=\frac{2}{3}\pi}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 196**




Nos piden $S_x$

Dato: $R=2\sqrt{3}$

• Notemos primero que: $\Delta AO_1O_2$, $\Delta O_1O_2B$ y $\Delta O_1CB$ son equiláteros

• En $\Delta OO_1B$ : $O_1B=R\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ CB=6 $\Rightarrow$ a=6

- $S_x + S_1 = \dfrac{120°}{360°}\pi 6^2 = 12\pi$ ...(I)

- $S_1 = S_{\triangleleft O_1OB} - S_{\Delta OO_1B}$

$\Rightarrow S_1 = \dfrac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

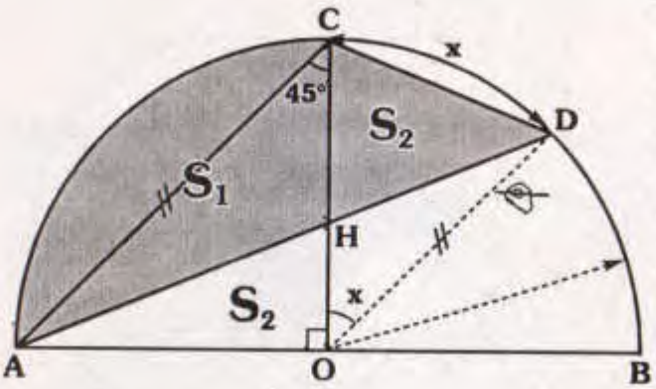
$\Rightarrow S_1 = 4\pi - 3\sqrt{3}$ ...(II)

- De (I) y (II):

$\therefore$ $\mathbf{S_x = 8\pi + 3\sqrt{3}}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 197**




Piden $m\widehat{CD}$

- Sea $m\widehat{CD} = x \Rightarrow m\measuredangle COD = x$
- Como el área de la región sombreada es igual a la no sombreada, entonces la parte sombreada es la mitad del área total.

- $S_1 + S_2 = \dfrac{1}{2}S_{\bigcirc}$

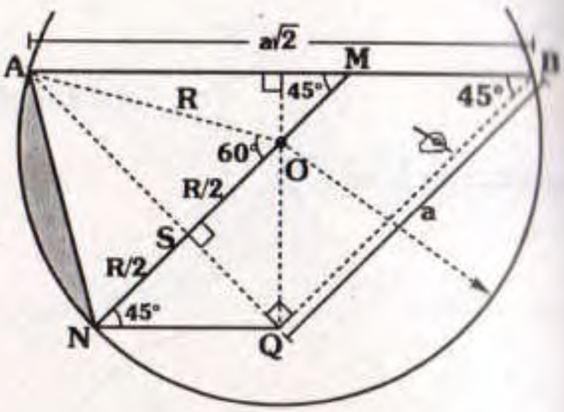
$\Rightarrow S_{\triangle AOH} = S_{\Delta CHD} = S_2$

$\Rightarrow \overline{AC} // \overline{OD}$

$\therefore$ **x = 45°**

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 198**




Nos piden $S_{\frown}$

Dato: $AB = \sqrt{2}(BQ)$

- Se traza $\overline{BQ} // \overline{MN}$ tal que BQ=MN $\Rightarrow$ NMBQ es paralelogramo.
- Como $AB = \sqrt{2}(BQ)$ y

$m\measuredangle ABQ = 45° \Rightarrow m\measuredangle AQB = 90°$

$\Rightarrow \overline{AQ} \perp \overline{NM}$

- Debido a que AQ=QB

$\Rightarrow \overline{QO} \perp \overline{AB}$

- En ⊿NQO: NS=SO $\Rightarrow$ En el ⊿ASO:

AO=2(OS) $\Rightarrow m\measuredangle AOS=60°$

- Finalmente:

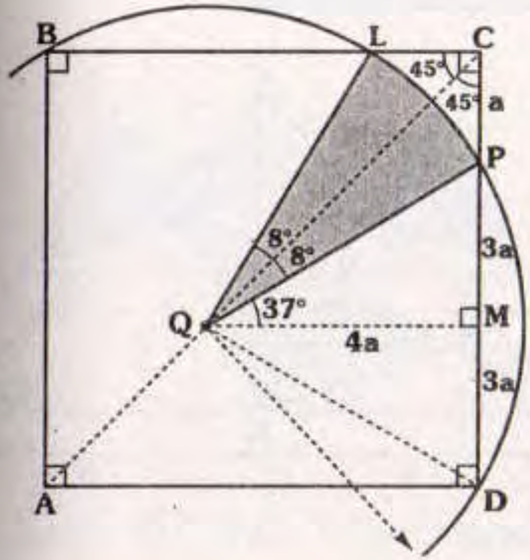
$S_{\frown} = S_{\triangle AON} - S_{\Delta AON}$

$S_{\frown} = \dfrac{1}{6}\pi R^2 - R^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$$\therefore \quad S = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 199**




Nos piden $\dfrac{S_{\triangleleft LQP}}{S_{(ABCD)}}$

Dato: $PD=6(CP)$

- Por teorema de la secante:

$(CL)(CB)=(CP)(CD) \Rightarrow CP=CL$, luego

QLCP: Trapezoide simétrico

- Sea $CP=a \rightarrow PD=6a$, se traza $\overline{QM} \perp \overline{PD}$ (M en $\overline{PD}$)

$\rightarrow PM=MD=a$ y $QM=MC=4a$

- ⊿QMP es notable de 37°

$\rightarrow m\measuredangle LQP=16°$

- Luego tenemos:

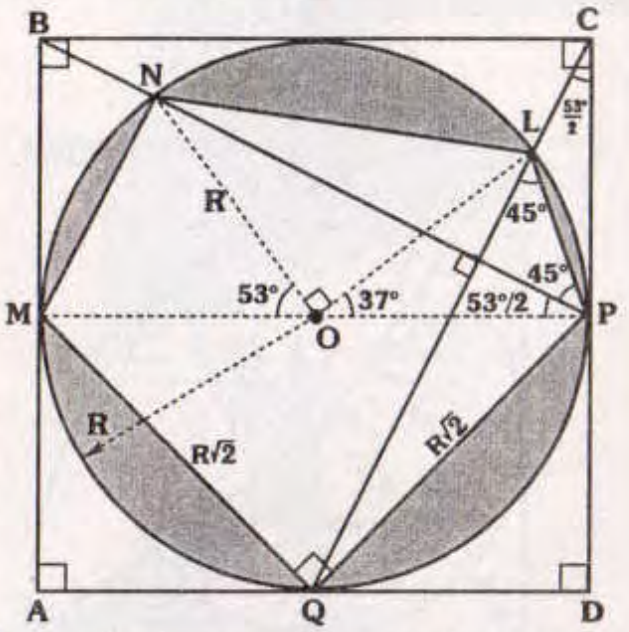
$$S_{\triangleleft LQP}=\frac{16°}{360°}\pi(5a)^2$$

$$S_{(ABCD)}=(7a)^2$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangleleft LQP}}{S_{(ABCD)}}=\frac{10\pi}{441}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 200**




Nos piden la suma de áreas de las regiones sombreadas, sea S dicha suma.

- $S=\pi R^2 - S_{(MNLPQ)}$ ....(I)

- Hallemos el área de MNLPQ

$$S_{(MNLPQ)}=S_{(MQP)}+S_{\Delta MON}+S_{⊿NOL}+S_{\Delta LOP}$$

$$\Rightarrow S_{(MNLPQ)}=R^2+\frac{R^2}{2}\text{sen}53°+\frac{R^2}{2}+\frac{R^2}{2}\text{sen}37°$$

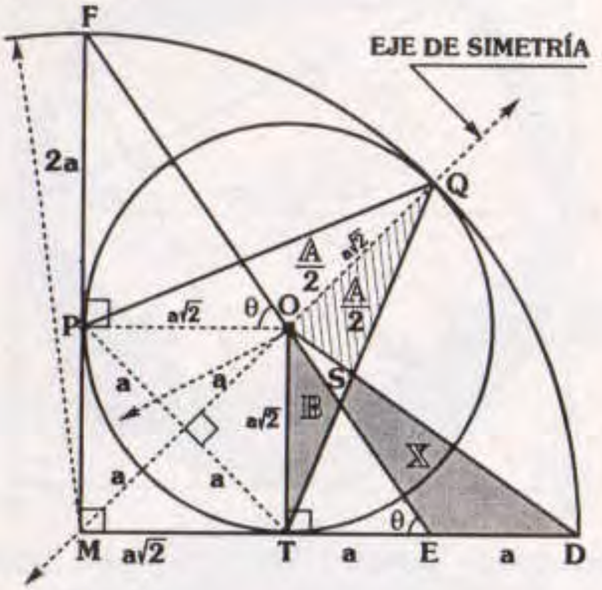
$$S_{(MNLPQ)}=\frac{11}{10}R^2$$

- En (I): $S=\pi R^2-\dfrac{11}{10}R^2$

$$\therefore \quad S=\frac{R^2}{10}(10\pi-11)$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 201**




Nos piden $\mathbb{X}$ en función de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$

- ⊿OPF ~ ⊿ETO

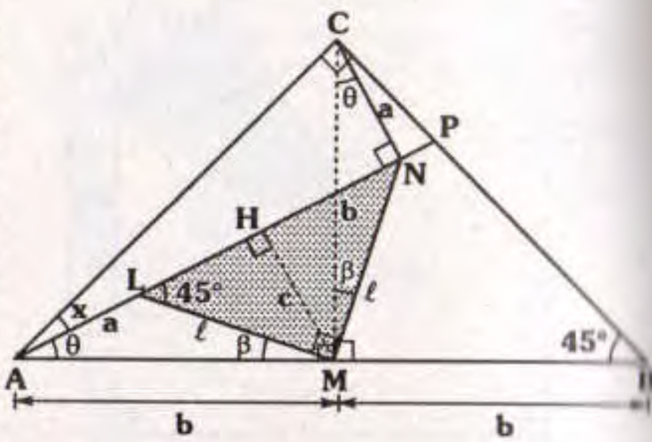
$$\Rightarrow \quad ET=a \quad \Rightarrow \quad ED=a$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbb{X}+S=\dfrac{a(a\sqrt{2})}{2} \\ \dfrac{\mathbb{A}}{2}+\mathbb{B}+S=\dfrac{a\sqrt{2}(a)}{2} \end{array}\right\} \mathbb{X}+S=\frac{\mathbb{A}}{2}+\mathbb{B}+S$$

$$\therefore \quad \mathbb{X}=\frac{\mathbb{A}+2\mathbb{B}}{2}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 202**




Piden x.

Dato $S_{(ACB)}=4(S_{(LMN)})$ y AL=CN

- Primero notemos que

$$m\measuredangle AMC=m\measuredangle ANC=90°$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle MAN=m\measuredangle MCN=\theta$$

- ΔLAM ≅ ΔNCM (LAL) ⇒ LM=MN y $m\measuredangle AML=m\measuredangle CMN=\beta \Rightarrow m\measuredangle LMN=90°$
- Como LM=MN ⇒ $m\measuredangle MLN=45°$
- ⊿AOB ~ ⊿LMN

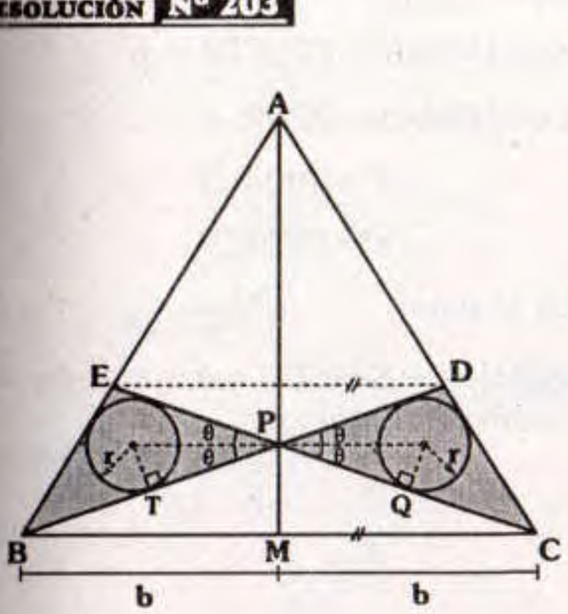
$$\Rightarrow \quad \frac{S_{(ACB)}}{S_{(LMN)}}=\left(\frac{b}{c}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad b=2c$$

- ⊿AHM: notable ⇒ $\theta=30°$

$$\therefore \quad \mathbf{x=15°}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 203**




Piden: $\dfrac{AB}{AC}$

- Como AM=MC y notamos las cevianas concurrentes $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ y $\overline{AM}$ $\Rightarrow$ por teorema de Ceva: $\overline{ED} /\!/ \overline{BC}$
- Como $\overline{ED} /\!/ \overline{BC} \Rightarrow S_{\Delta BEP} = S_{\Delta PDC}$
- Debido a que los triángulos BEP y PDC tienen igual inradio, entonces tienen igual semiperímetro (sea "$\ell$" el semi-perímetro)
- Notemos que PT=PQ

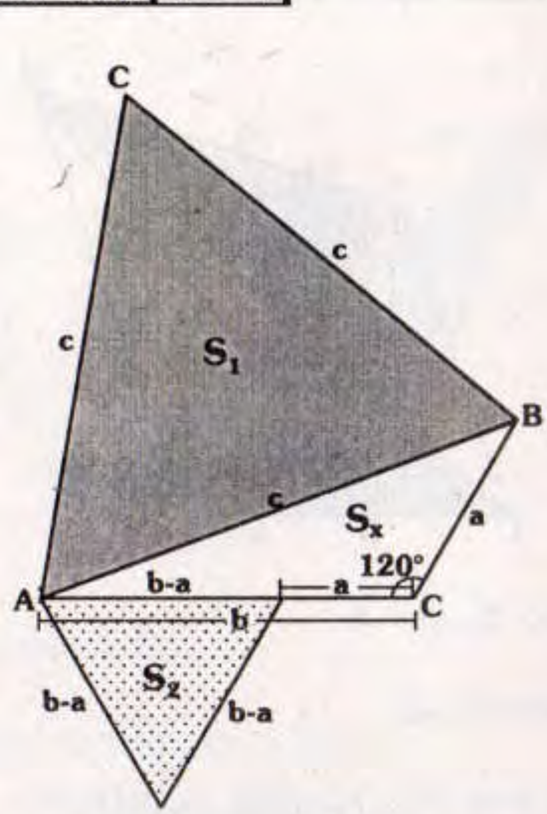
$\Rightarrow \ell - BE = \ell - CD \Rightarrow BE = CD$

- Luego BEDC es trapecio isósceles $\Rightarrow$ AB=AC

$$\therefore \quad \frac{AB}{AC} = 1$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 204**




Datos: $S_1=31$ y $S_2=19$

Piden: $S_x$

- $$S_x = \frac{ab}{2}\text{sen}120° = ab\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_1 = c^2\frac{\sqrt{3}}{4} \quad y \quad S_2 = (b-a)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- En $\Delta ABC$, por teorema de cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + ab$$

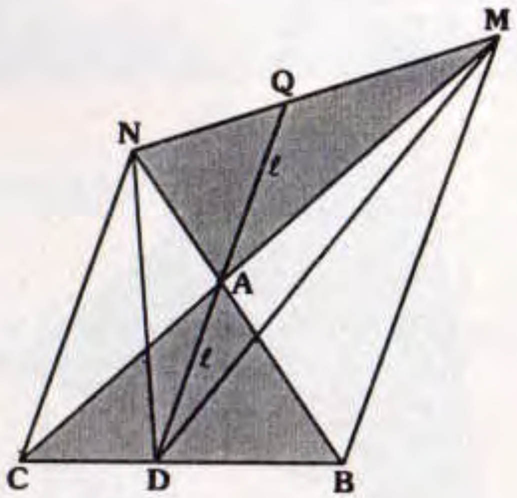
- Luego: $S_1 - S_2 = 3(ab)\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow S_1 - S_2 = 3S_x$$

$$\therefore \quad S_x = 4$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 205**




Dato $S_{(\Delta ABC)} = \mathbb{A}$

Piden: $S_{(\Delta MDN)}$

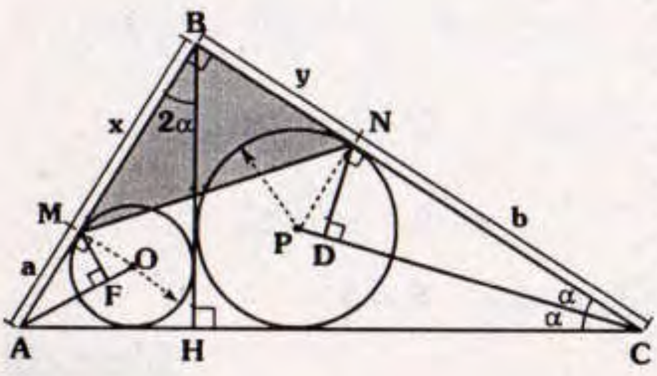
- Como $\overline{NC} // \overline{AD} // \overline{MB} \Rightarrow AD = AQ$
- Como $DQ = 2(AQ) \Rightarrow S_{(\Delta MDN)} = 2S_{\Delta AMN}$
- Debido a que $\overline{NC} // \overline{BM}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMN}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{(\Delta MDN)} = 2\mathbb{A}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 206**




Piden: $S_{\triangle MBN}$

Dato: $(AO)(AF)(PC)(CD) = k$

- En $\triangle OMA$ y $\triangle CNP$:

$$a^2 = (AF)(AO) \quad y$$
$$b^2 = (PC)(CD)$$

- En el dato: $a^2b^2 = k$ ...(I)
- $\triangle AHB \sim \triangle BHC$, comparando elementos homólogos:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{y} \Rightarrow ab = xy \quad ...(II)$$

- $S_{\triangle MBN} = \dfrac{xy}{2}$
- Usando (I) y (II):

$$\mathbf{S_{\triangle MBN} = \frac{\sqrt{k}}{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 207**

Para el $\Delta ABC$ :

$r_a$, $r_b$ y $r_c$ son exradios

r es inradio

p: semiperímetro

Dato: $r_ar_b + r_ar_c + r_br_c = 100$

Nos piden: 2p

- Usemos los siguientes teoremas:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$S_{\Delta ABC} = pr = \sqrt{rr_ar_br_c} \Rightarrow p^2r = r_ar_br_c$$

- En el dato dividiendo entre $r_ar_br_c$, se tie-

ne:

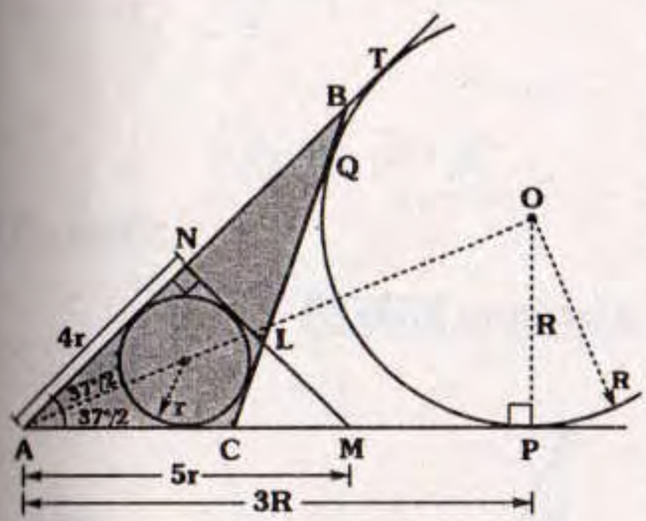
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{100}{r_ar_br_c} \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{100}{r_ar_br_c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{100}{p^2r} \Rightarrow p=10$$

$\therefore$ **$2p=20$**

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 208**




Piden: $S_{\Delta ABC}$; dato: $R(AM)=25$

- En el ⊿ANM que es notable de 37°, sea el inradio r, entonces:

$$AM=5r$$

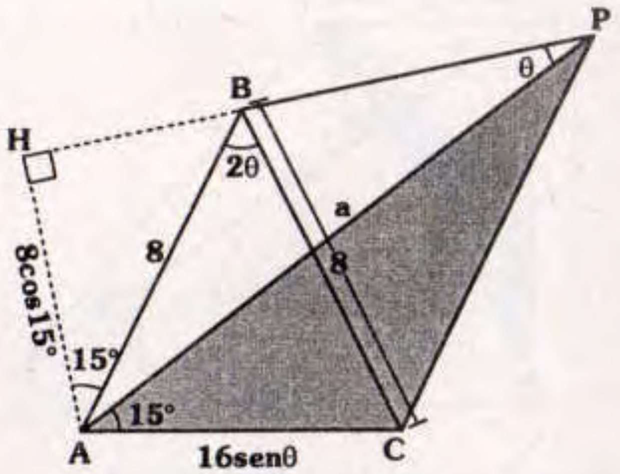
- En ⊿APO: $AP=3R$
- Por teorema AP es semiperímetro del $\Delta ABC \Rightarrow S_{\Delta ABC}=(3R)r$
- Del dato: $R(5r)=25$

$$\Rightarrow Rr=5$$

$\therefore$ **$S_{\Delta ABC}=15$**

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 209**




Nos piden $S_{\Delta APC}$

- Por teorema, en el $\Delta ABC$:

$$AC=2(8)\text{sen}\theta=16\text{sen}\theta$$

- $$S_{\Delta APC}=\frac{1}{2}(a16\text{sen}\theta)\text{sen}15° \qquad ...(I)$$

- En ⊿AHP:

$$\text{sen}\theta=\frac{8\cos 15°}{a}$$

- En (I):

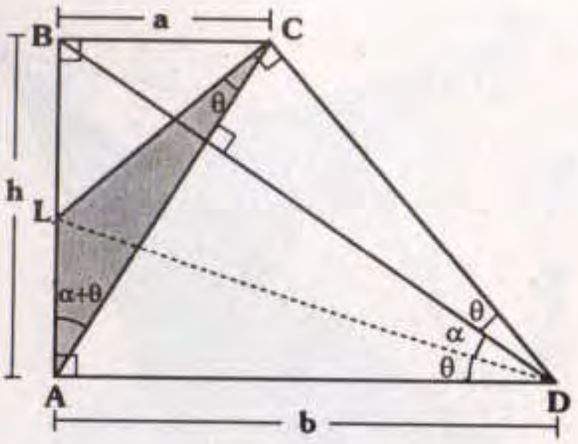
$$S_{\Delta ABC}=8\cancel{a}.\left(\frac{8\cos 15°}{\cancel{a}}\right)\cdot\text{sen}15°$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=32\underbrace{(2\text{sen}15°\cos 15°)}_{\text{sen}30°}$$

$\therefore$ **$S_{\Delta ABC}=16$**

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 210**



Piden $S_{\Delta ALC}$ en función de h y $\theta$.

- ⌂ALCD: inscriptible $\Rightarrow$ $m\measuredangle LDA=\theta$
- En ⊿LAD: $AL=b\,tg\theta$
- ⊿ABC ~ ⊿DAB:

$$\Rightarrow \frac{a}{h}=\frac{h}{b} \Rightarrow h^2=ab \qquad ...(I)$$

- $$S_{\Delta ALC}=\frac{(AL)(BC)}{2}$$

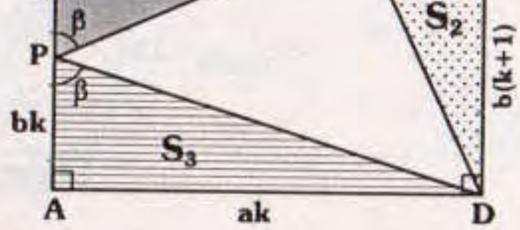
$$S_{\Delta ALC}=\frac{1}{2}(btg\theta).a=\frac{1}{2}abtg\theta$$

- De (I):

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta ALC}=\frac{h^2tg\theta}{2}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 211**



Nos piden la relación entre $S_1$, $S_2$ y $S_3$

- Notemos que ⊿PAD ~ ⊿PBQ

Sea PB=b y BC=a

$\Rightarrow$ AP=bk y AD=ak

- Luego QC=a(k−1) y CD=b(k+1)

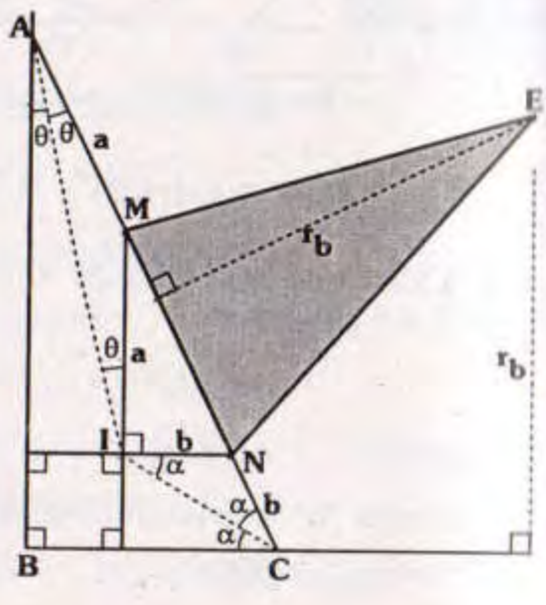
- $$S_1=\frac{ab}{2};\quad S_3=\frac{ab}{2}k^2 \text{ y}$$

$$S_2=\frac{ab}{2}(k^2-1)=\underbrace{\frac{ab}{2}k^2}_{S_3}-\underbrace{\frac{ab}{2}}_{S_1}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=S_3}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 212**



Piden $S_{(\Delta MNE)}$

Dato: AC=k

- Como I es incentro, entonces el ΔAIM y ΔCIN son isósceles.

$AM=MI=a$ y $NC=NI=b$

$\Rightarrow MN=k-a-b$

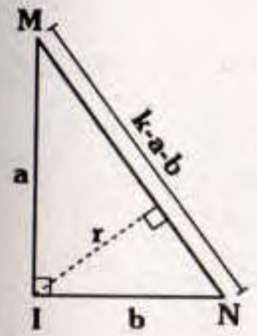
$S_{\Delta MNE}=(k-a-b)r_b$

- Por teorema $r_b-r=AC=k$
- ⊿MIN: $(k-a-b)^2=a^2+b^2$

$\Rightarrow k^2-2ka-2kb+2ab=0$

$\Rightarrow 2k(k-a-b)=k^2-2ab \quad ...(I)$

- ⊿MIN:




Por relaciones métricas:
$ab=r(k-a-b)$

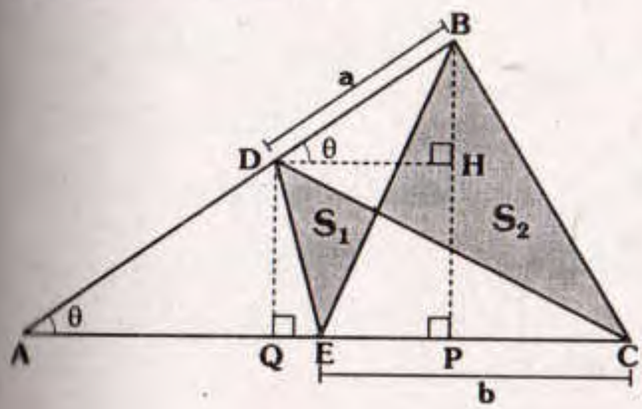
- En (I): $2(k-a-b)\underbrace{(k+r)}_{r_b}=k^2$

$\Rightarrow 2S_{\Delta MNE}=k^2$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta MNE}=\frac{k^2}{2}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 213**




Nos piden $S_2-S_1$

- Notemos que:

$$S_2-S_1=\underbrace{S_{\Delta EBC}}_{\frac{b(BP)}{2}}-\underbrace{S_{\Delta EDC}}_{\frac{b(DQ)}{2}}$$

$$\Rightarrow S_2-S_1=\frac{b}{2}\underbrace{(BP-DQ)}_{BH}$$

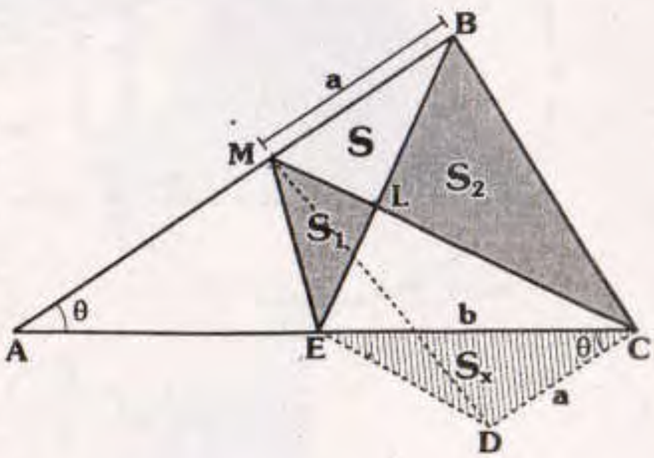
- Pero BH en ⊿DHB:

$$BH=a\text{sen}\theta$$

$$\therefore\ \mathbf{S_2-S_1=\frac{ab}{2}sen\theta}$$

**Clave D**

*Otra forma de Resolver*




- Sea el área de la región MLB : S
- Se traza $\overline{CD}//\overline{BM}$, tal que $CD=BM$
$\Rightarrow$ MBCD es paralelogramo.

- $S_x=S_{\Delta ECD}=\dfrac{absen\theta}{2}$

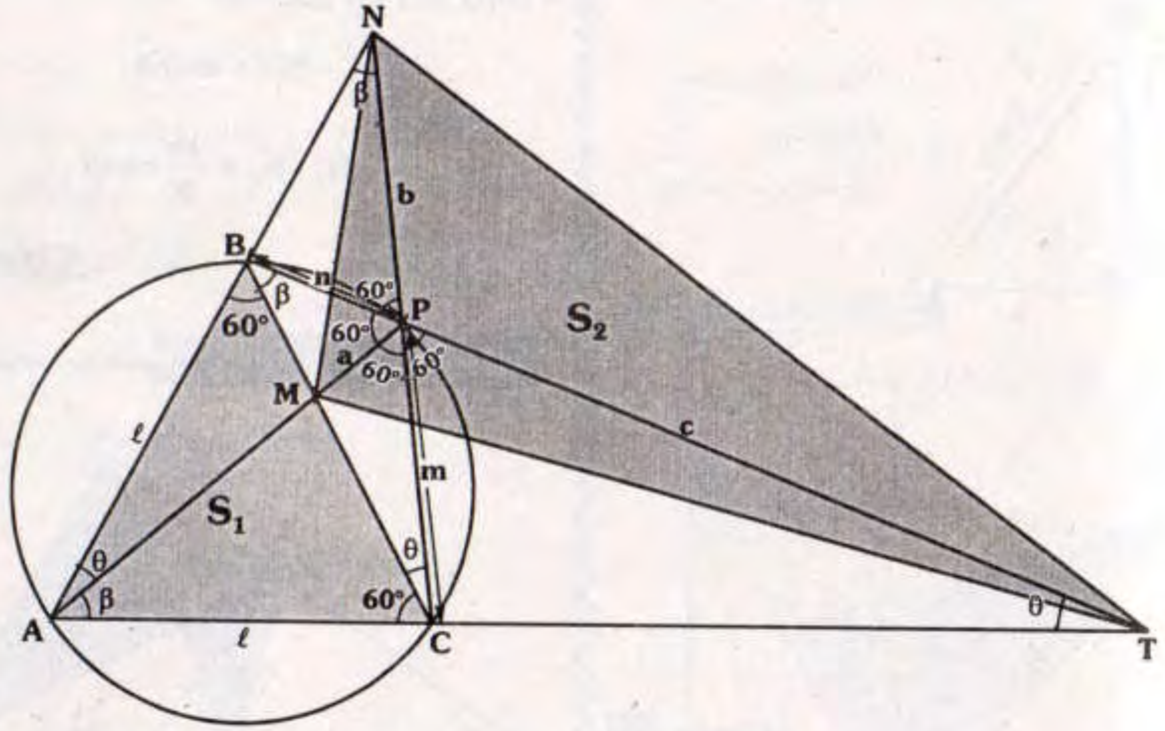
- Por propiedad:

$$S_x + S_1 + S = \frac{S_{\square MBCD}}{2}$$

$$S_2 + S = \frac{S_{\square MBCD}}{2} \quad \Rightarrow \quad S_2 + S = S_x + S_1 + S \quad \Rightarrow \quad S_2 - S_1 = S_x$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_2 - S_1 = \frac{absen\theta}{2}}$$

**RESOLUCIÓN Nº 214**




- $$S_1 = S_{\Delta ABC} = \ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \ldots(I)$$

- $$S_2 = S_{\Delta MNT} = S_{\Delta NMP} + S_{\Delta NPT} + S_{\Delta MPT}$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(ab + bc + ac) \qquad \ldots(II)$$

- En $\Delta BPC$ : Por teorema de cosenos:

$$\ell^2 = m^2 + n^2 + mn \qquad \ldots(III)$$

- Luego de completar ángulos, tenemos

En $\Delta BPC$, $\overline{PM}$ es bisectriz interior, entonces: $a=\dfrac{mn}{m+n}$

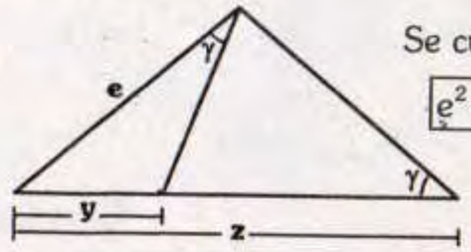
- Usando la propiedad de la semejanza:

En los triángulos TCB y NBC:

$$\ell^2=n(n+c) \Rightarrow \frac{\ell^2-n^2}{n}=c$$

$$\ell^2=m(m+b) \Rightarrow \frac{\ell^2-m^2}{m}=b$$

**PROPIEDAD**




Se cumple: $e^2=yz$

- Usando (III): $c=\dfrac{m}{n}(m+n)$ y $b=\dfrac{n}{m}(m+n)$

- En (II): $S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left[\dfrac{mn}{(m+n)}\cdot\dfrac{n}{m}(m+n)+\dfrac{n}{m}(m+n)\cdot\dfrac{m}{n}(m+n)+\dfrac{mn}{(m+n)}\cdot\dfrac{m}{n}(m+n)\right]$

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}(n^2+(m+n)^2+m^2)=2\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}\underbrace{(m^2+n^2+mn)}_{\ell^2}}_{S_1} \Rightarrow S_2=2S_1$$

$$\therefore\ \frac{\mathbf{S_2}}{\mathbf{S_1}}=\mathbf{2}$$

**RESOLUCIÓN Nº 215**

Nos piden $S_{\Delta BCD}$

- Como $m\widehat{BE}=m\widehat{EF}$

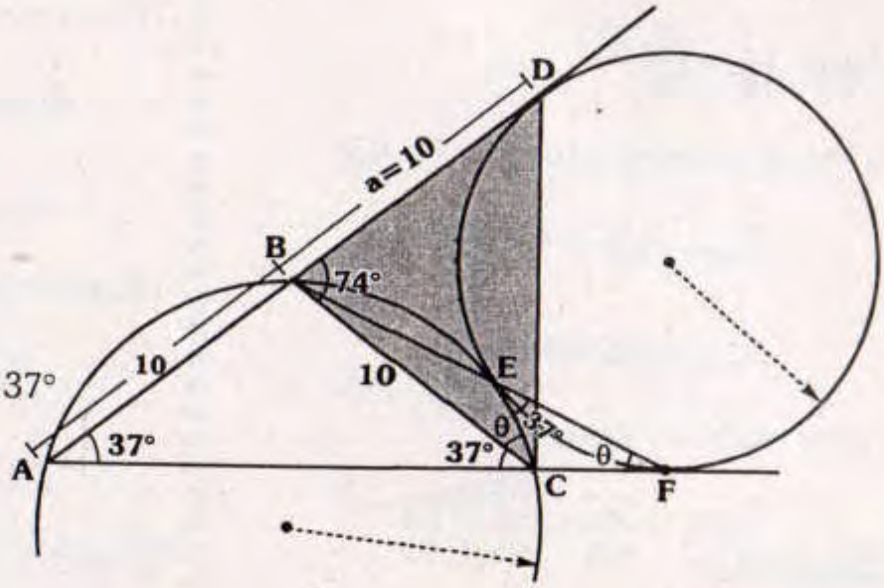
$\Rightarrow m\measuredangle BCE=m\measuredangle CFE$

- ⌂ABEC: inscrito

$\Rightarrow m\measuredangle BAC=m\measuredangle CEF=37°$

$\Rightarrow m\measuredangle ACB=37°$

$\Rightarrow AB=BC=10$



- Por teorema de la tangente:

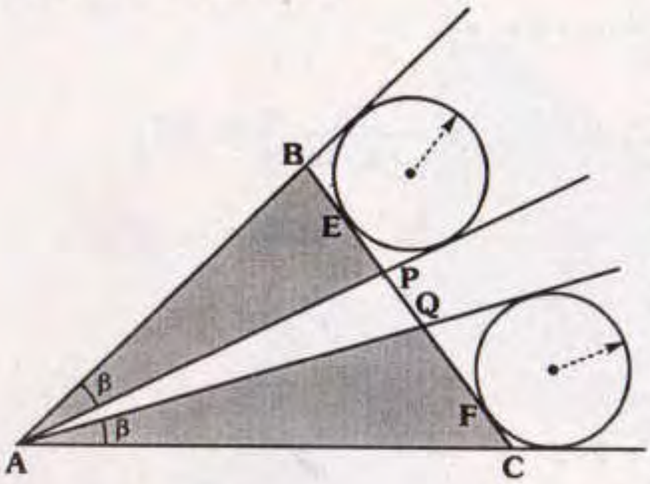
- En $\Delta CBF$: $\left.\begin{array}{l}(BO)^2=(BE)(BF)\\(BC)^2=(BE)(BF)\end{array}\right\} BC=BD$

- En $\Delta CBD$: $S_{\Delta BCD}=\dfrac{(10)(10)}{2}\text{sen}74°$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta BCD}=48}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 216**




Piden $\dfrac{1}{QF}+\dfrac{1}{FC}$

Dato: $\dfrac{1}{BE}+\dfrac{1}{EP}=k$

- Por el teorema ...(página Nº 43)

$$S_{\Delta AQC}=(QF)(FC)\text{ctg}\frac{\beta}{2}$$

$$S_{\Delta ABP}=(BE)(EP)\text{ctg}\frac{\beta}{2}$$

- Por razón de áreas:

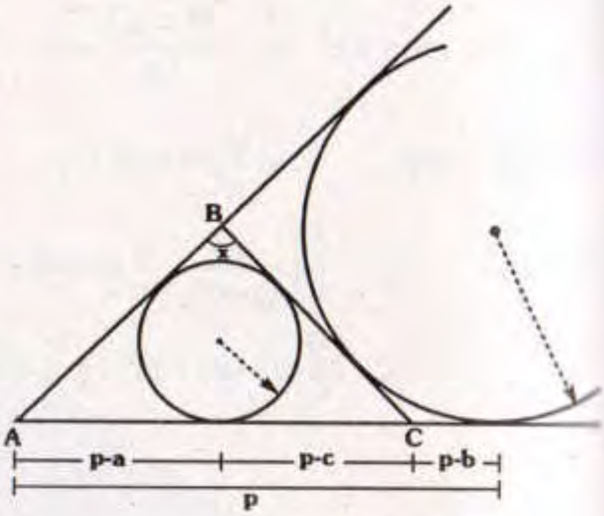
$$\frac{S_{\Delta AQC}}{S_{\Delta ABP}}=\frac{QC}{BP}=\frac{(QF)(FC)}{(BE)(EP)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{QF}+\frac{1}{FC}=\frac{1}{BE}+\frac{1}{EP}$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{1}{QF}+\frac{1}{FC}=k}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 217**




Piden x

Por dato:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}[(p-a)(p-c)+p(p-a)]$$

- Por teorema:

$$S_{\Delta ABC}=(p-a)(p-c)\text{ctg}\frac{x}{2}$$

$$S_{\Delta ABC}=p(p-b)\text{tg}\frac{x}{2}$$

- Reemplazando en el dato:

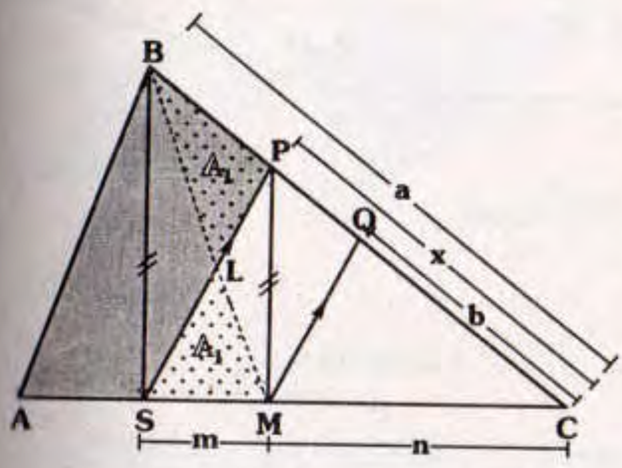
$$1=\frac{1}{4}\underbrace{\left[\text{tg}\frac{x}{2}+\text{ctg}\frac{x}{2}\right]}_{\frac{1}{\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}$$

$$1=\frac{1}{2\text{senx}} \Rightarrow \text{senx}=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ **x = 30°**

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 218**




Piden x en función de "a" y "b"

Dato: $S_{\triangle ABPS}=S_{\triangle SPC}=\frac{S_{\triangle ABC}}{2}$

• Como AM=MC, entonces:

$$S_{\triangle ABM}=\frac{S_{\triangle ABC}}{2}$$

• Luego: $S_{\triangle SLM}=S_{\triangle BLP} \Rightarrow \overline{SB}//\overline{MP}$

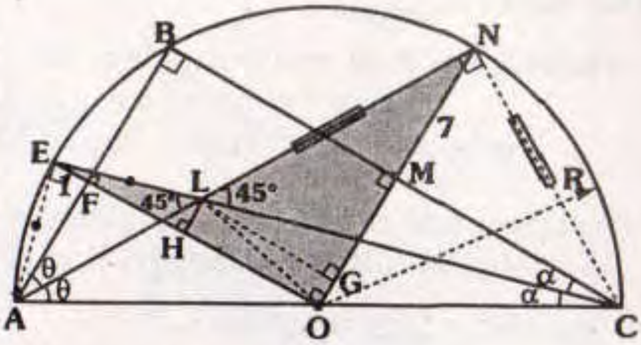
• Por teorema de Tales:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{b}=\frac{m+n}{n}\\ \frac{a}{x}=\frac{m+n}{n}\end{array}\right\}\ \frac{x}{b}=\frac{a}{x}$$

$\therefore$ $\mathbf{x=\sqrt{ab}}$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 219**




Nos piden $S_{\measuredangle EONL}$

• Hallemos el área pedida así:

$$S_{\measuredangle EONL}=S_{\triangle OLN}+S_{\triangle EOL} \qquad ...(I)$$

• Notemos BM=MC=OF=R–1 y OM=R–7

• En $\triangle$OMC: $R^2=(R-1)^2+(R-7)^2$

$$\Rightarrow R=13$$

• En $\triangle LGN \cong \triangle NMC \Rightarrow LG=7$

• En $\triangle AFE \cong \triangle EHL \Rightarrow LH=1$

• Finalmente:

$$S_{\triangle OLN}=\frac{(R)(LG)}{2}$$

$$S_{\triangle EOL}=\frac{(R)(LH)}{2}$$

• En (I):

$$S_{\measuredangle EONL}=\frac{13(7)}{2}+\frac{13(1)}{2}$$

$$\mathbf{S_{\measuredangle EONL}=52}$$

**Clave B**

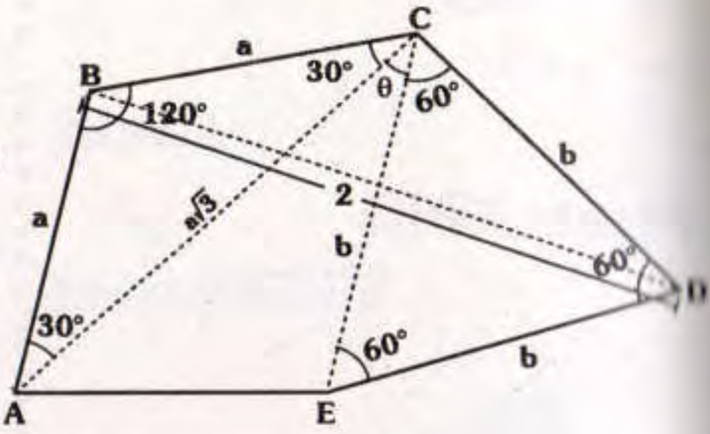
**RESOLUCIÓN Nº 220**

Nos piden $S_{\text{ABCDE}}$

- Hallemos el área que nos piden, así:

$$S_{\text{ABCDE}} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACE} + S_{\Delta ECD} \;...(I)$$

- Notemos que el $\Delta ECD$ es equilátero y el triángulo ABC es isósceles, donde $m\measuredangle ABC = 120° \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$




- $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{\Delta ECD} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$ y $S_{\Delta ACE} = \dfrac{ab\sqrt{3}}{2}\text{sen}\theta$
- En $\Delta BCD$, por teorema de cosenos:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(90° + \theta) = 4 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 + 2ab\,\text{sen}\theta = 4 \qquad ...(II)$$

- En (I):

$$S_{\text{ABCDE}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{2}\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}\underbrace{(a^2 + b^2 + 2ab\,\text{sen}\theta)}_{4}$$

$$\therefore \mathbf{S_{\text{ABCDE}} = \sqrt{3}}$$

**Clave** E

**RESOLUCIÓN Nº 221**

Nos piden $S_{\text{EACF}}$

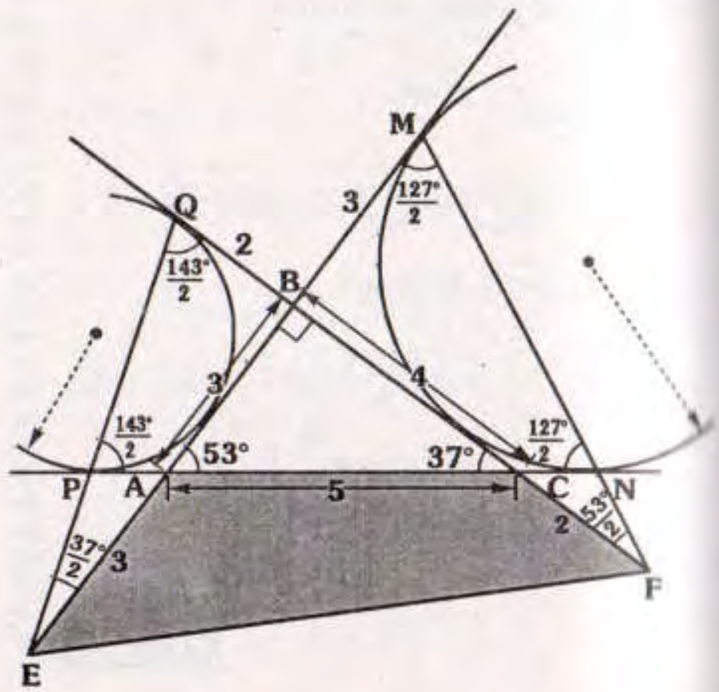
- Por teorema:

$$CQ = AM = \frac{3+4+5}{2} = 6$$

$$\Rightarrow BQ = 2 \text{ y } BM = 3$$

- $\measuredangle$EBQ: notable de 37°/2 $\Rightarrow$ EA = 3
- $\measuredangle$FBM: notable de 53°/2 $\Rightarrow$ FC = 2
- Finalmente:

$$S_{\text{EACF}} = S_{\measuredangle EBF} - S_{\measuredangle ABC}$$

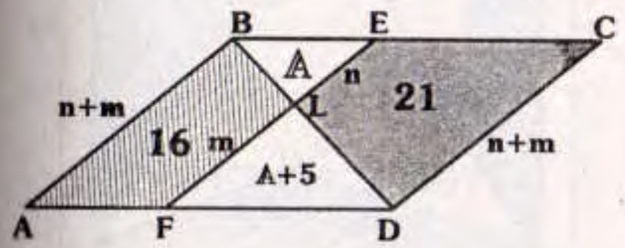


$$S_{\triangle EACF} = \frac{(6)(6)}{2} - \frac{(3)(4)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle EACF} = 12}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 222**




Piden $S_{\square ABCD}$

• Como $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BDC}$

$$\Rightarrow\ S_{\square ABCD} = 2(21 + \mathbb{A})$$

• $\Delta BLE \sim \Delta BDE$

$$\Rightarrow\ \frac{\mathbb{A}}{21+\mathbb{A}} = \frac{n^2}{(m+n)^2} \qquad \ldots(I)$$

• $\Delta FLD \sim \Delta ABD$

$$\Rightarrow\ \frac{\mathbb{A}+5}{21+\mathbb{A}} = \frac{n^2}{(m+n)^2} \qquad \ldots(II)$$

• De (I) y (II):

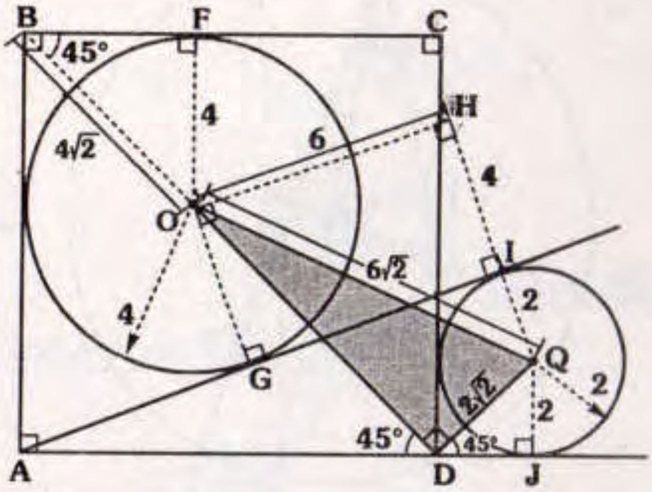
$$\sqrt{\frac{\mathbb{A}}{21+\mathbb{A}}} + \sqrt{\frac{\mathbb{A}+5}{21+\mathbb{A}}} = 1$$

$$\Rightarrow\ \mathbb{A} = 4$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square ABCD} = 50}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 223**




Piden $S_{(ABCD)}$

• En $\measuredangle BFO$: $OB = 4\sqrt{2}$

• En $\measuredangle DJQ$: $DQ = 2\sqrt{2}$

• Notemos que OGIH es rectángulo

• En $\measuredangle OHQ$: $OQ = 6\sqrt{2}$

• En $\measuredangle ODQ$: $OD = 8$

$$\Rightarrow\ BD = 8 + 4\sqrt{2}$$

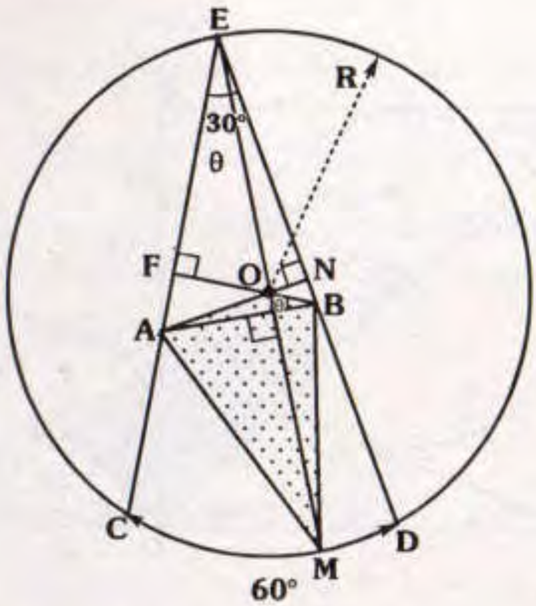
• Finalmente:

$$S_{(ABCD)} = \frac{(BD)^2}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{(ABCD)} = 16(3 + 2\sqrt{2})}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 224




Nos piden: $S_{\square AOBM}$

- Como O es ortocentro del $\Delta AEB$

$$\Rightarrow \overline{EO} \perp \overline{AB}$$

- $S_{\square AOBM} = \dfrac{(3)(R)}{2}\text{sen}90° = \dfrac{3}{2}R \qquad \ldots(I)$

- $\measuredangle OFE \sim \measuredangle AFB$:

$$\frac{R}{3} = \frac{EF}{FB} \qquad \ldots(II)$$

- En $\measuredangle ANE$: $\dfrac{EF}{FB} = \sqrt{3}$

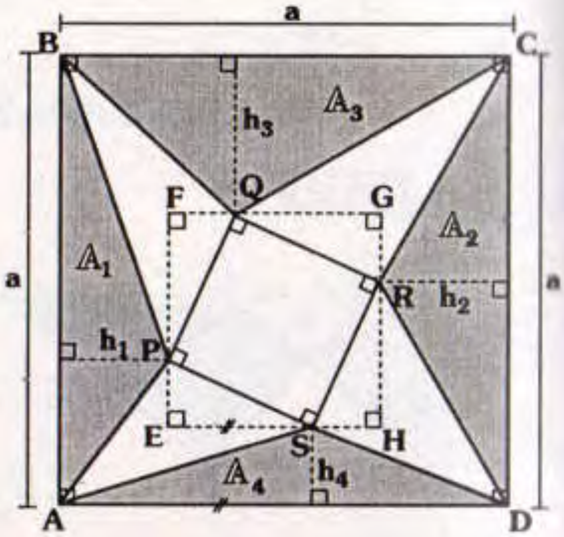
- En (II): $R = 3\sqrt{3}$

- En (I):

$$\therefore \; S_{\square AOBM} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 225




Analizando por partes:

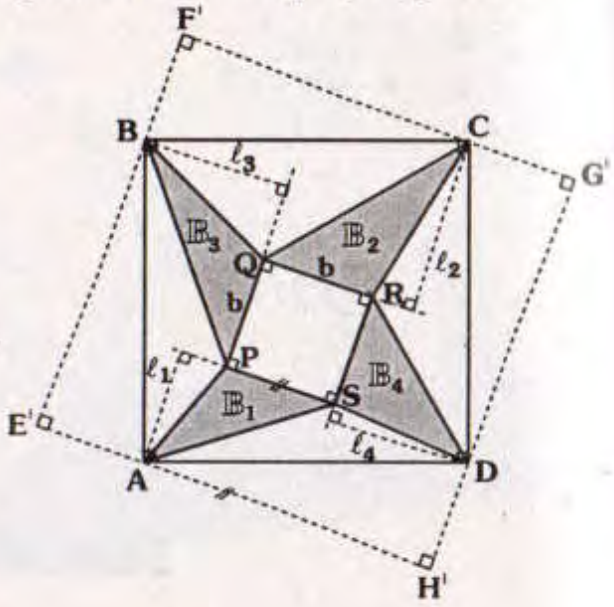
- Se traza EFGH tal que $\overline{EH} // \overline{AD}$
- Notemos que EFGH es un cuadrado

$$\Rightarrow h_1 + h_2 = h_3 + h_4$$

$$\Rightarrow \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{ah_3}{2} + \frac{ah_4}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4$$

- Ahora analicemos las áreas de las regiones APS, PBQ, QCR y DRS.



• Se traza E'F'G'H' tal que $\overline{E'F'} // \overline{PQ} \Rightarrow$ E'F'G'H' es cuadrado

$$\Rightarrow \ \ell_1 + \ell_2 = \ell_3 + \ell_4$$

$$\frac{b\ell_1}{2} + \frac{b\ell_2}{2} = \frac{b\ell_3}{2} + \frac{b\ell_4}{2}$$

$$\Rightarrow \ \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_3 + \mathbb{B}_4$$

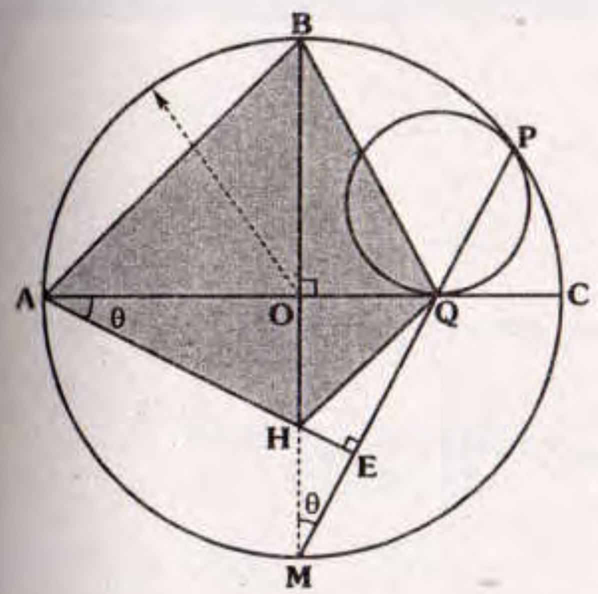
• Finalmente:

como $S_1 = \mathbb{A}_1 + \mathbb{B}_1$ ; $S_2 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{B}_2$;

$$S_3 = \mathbb{A}_3 + \mathbb{B}_3 \ \text{ y } \ S_4 = \mathbb{A}_4 + \mathbb{B}_4$$

$$\therefore \ \mathbf{S_1 + S_2 = S_3 + S_4}$$

**RESOLUCIÓN Nº 226**




Nos piden $S_{\triangle ABQH}$

Dato AQ=a

• Por teorema de circunferencia la prolongación de $\overline{PQ}$ corta a la circunferencia en M tal que $m\widehat{AM} = m\widehat{MC} \Rightarrow$ la prolongación de $\overline{OH}$ llega a M.

• $\triangle AOH \cong \triangle MOQ \ \Rightarrow \ OH = OQ$

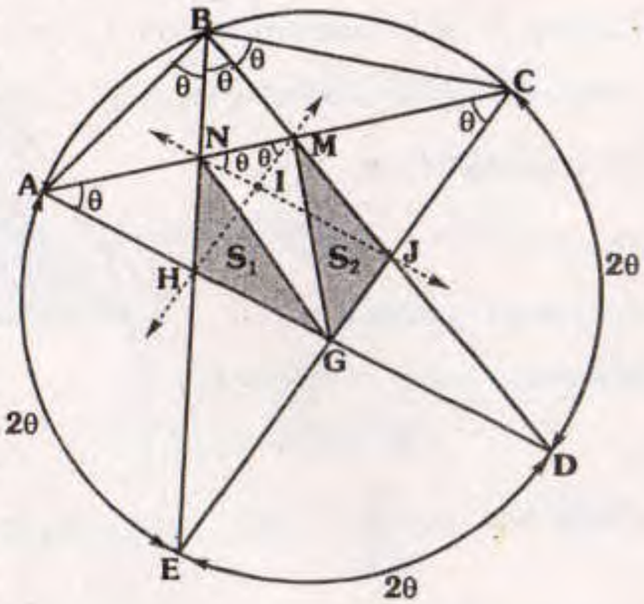
• Luego $\quad AQ = BH = a$

• $$S_{\triangle ABQH} = \frac{(AQ)(BH)}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{S_{\triangle ABQH} = \frac{a^2}{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 227**




Piden: $\dfrac{S_1}{S_2}$

• Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle GAC = m\measuredangle ACE = \theta$$

• Notemos también:

$\triangle$ABMH y $\triangle$NBCJ: inscriptibles

$$\Rightarrow \ m\measuredangle AMH = \theta = m\measuredangle CNJ$$

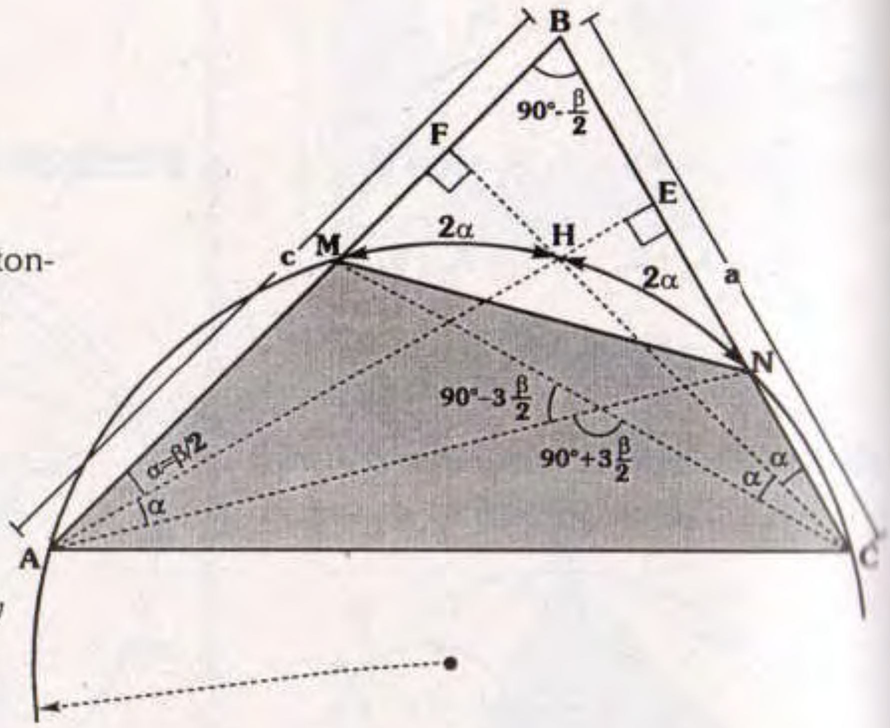
• Notemos ahora: $\overline{HM} // \overline{EC}$ y $\overline{NJ} // \overline{AD}$

$\Rightarrow$ HIJG es paralelogramo

• Finalmente: $\left.\begin{array}{l} S_1 = \dfrac{S_{\square HIJG}}{2} \\ S_2 = \dfrac{S_{\square HIJG}}{2} \end{array}\right\} S_1 = S_2$ $\therefore\ \mathbf{\dfrac{S_1}{S_2} = 1}$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 228**




Nos piden $\dfrac{S_{\triangle AMNC}}{S_{\Delta ABC}}$

• Dato $m\widehat{MN} = 2\beta$

• Como H es ortocentro, entonces: $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ son alturas

• Sea $m\measuredangle MAH = \alpha$

$\Rightarrow\ m\measuredangle MCH = m\measuredangle FCB = \alpha$

$\Rightarrow\ \Delta BAN$ y $\Delta MCB$: isósceles $\Rightarrow AB = AN = c$ y $CB = CM = a$

• Notemos: $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$

• Por fórmula general: $S_{\triangle AMNC} = \dfrac{ac}{2}\text{sen}\left(90° - \dfrac{3\beta}{2}\right) = \dfrac{ac}{2}\cos\dfrac{3\beta}{2}$

• Por fórmula trigonométrica: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{ac}{2}\text{sen}\left(90° - \dfrac{\beta}{2}\right) = \dfrac{ac}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}$

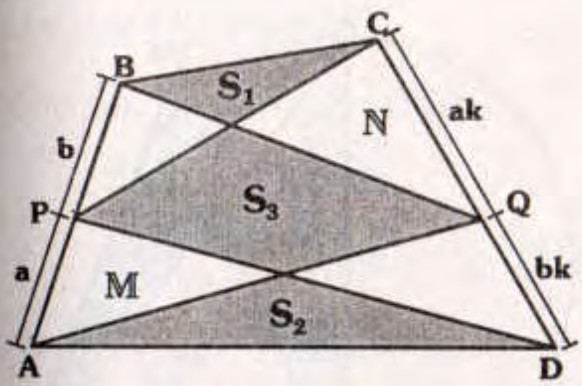
$$\Rightarrow\ \frac{S_{\triangle AMNC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\cos\dfrac{3\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}$$

• Usando: $\cos 3x = \cos x(2\cos 2x - 1)$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{S_{\triangle AMNC}}{S_{\Delta ABC}} = 2\cos\beta - 1}$$

**Clave D**

**Resolución Nº 229**




Por demostrar: $S_1+S_2=S_3$

- El dato se puede escribir así:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{CQ}{QD}=\frac{a}{b}$$

- Si analizamos APCQ con respecto al total:

$$S_{\triangle APCQ}=\frac{a}{a+b}.S_{\triangle ABCD} \quad ...(I)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta PBC}+S_{\Delta AQD}=\frac{b}{a+b}.S_{\triangle ABCD}$$

- También:

$$S_{\triangle BQDP}=\frac{b}{a+b}S_{\triangle ABCD}$$

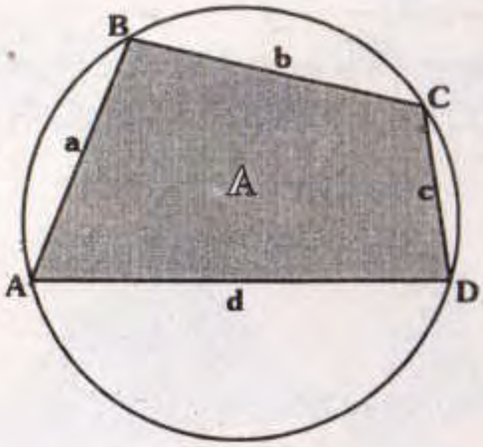
$$\Rightarrow \ S_{\Delta BCQ}+S_{\Delta APD}=\frac{a}{a+b} \quad ...(II)$$

- De (I) y (II):

$$M+S_3+N=S_1+N+M+S_2$$

$$\therefore \ \mathbf{S_3=S_1+S_2}$$

**Resolución Nº 230**




En el gráfico, $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

Por demostrar: $4\mathbb{A}\leq p^2$

- Como:

$$\mathbb{A}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Usemos: $MG\leq MA$

para:

$$(p-a)\ ;\ (p-b)\ ;\ (p-c)\ \text{y}\ (p-d)$$

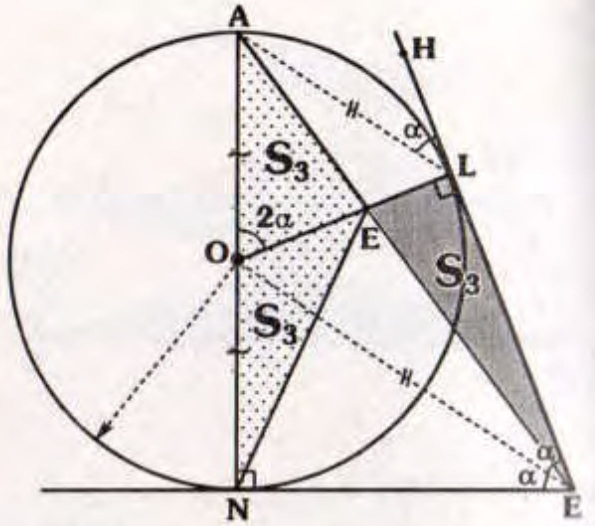
$$\Rightarrow \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\leq\frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{4}$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{\mathbb{A}}\leq\frac{2p}{4}$$

$$\therefore \ \mathbf{4\mathbb{A}\leq p^2}$$

**RESOLUCIÓN Nº 231**

Analizando por partes:




- Como $\overline{EO}$ es bisectriz del ∢LEN y ⏢LENO inscriptible ⇒ $m\measuredangle LOA = 2\alpha$
- Por ∢ semi-inscrito:

$$m\measuredangle HLA = \alpha \Rightarrow \overline{LA} \parallel \overline{EO}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta EOA} = S_3$$

- Como AO=ON ⇒ $S_{\Delta EOA} = S_{\Delta EON} = S_3$

$$\Rightarrow S_{\Delta AEN} = 2S_3$$

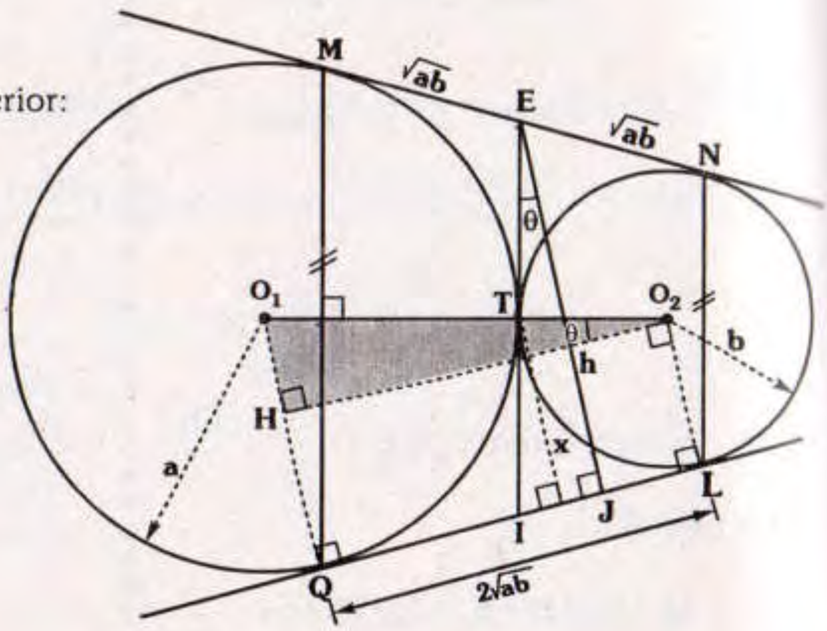
- Análogamente para la otra parte:

$$\therefore \mathbf{S_1 = 2(S_2 + S_3)}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 232**

Nos piden $S_{⏢QMNL}$.




- Por teorema MN=QL= $2\sqrt{ab}$
- Se traza la tangente común interior:

$$\Rightarrow ME=EN=ET=TI=\sqrt{ab}$$

- Usando: $S_{⏢QMNL}=(QL)(EJ)$

$$S_{⏢QMNL}=(2\sqrt{ab})h$$

- Por propiedad en ⏢$QO_1O_2L$:

$$x=\frac{2ab}{a+b} \Rightarrow h=\frac{4ab}{a+b}$$

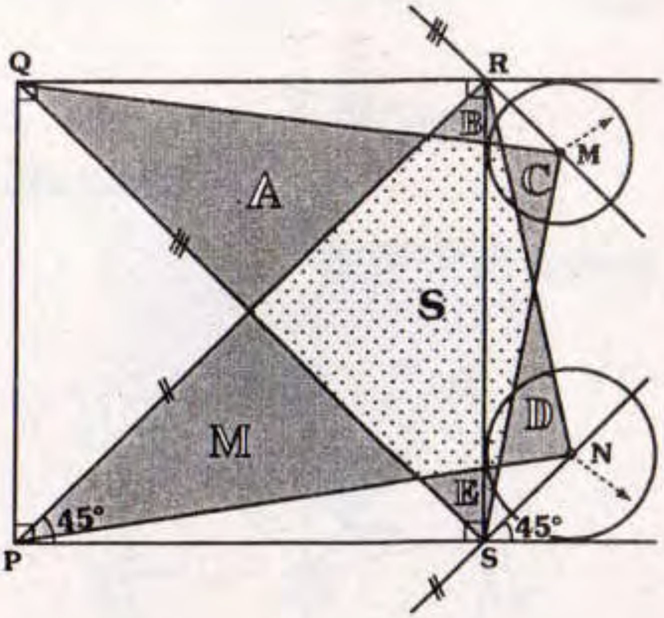
- Finalmente

$$\mathbf{S_{⏢QMNL}=\frac{8ab\sqrt{ab}}{a+b}}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 233**

Nos piden la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.




- Notemos: $\overline{PR} // \overline{SN}$ y $\overline{QS} // \overline{RM}$

$$\Rightarrow \ S_{\Delta PRN} = S_{\Delta PSR} = \frac{1}{2} S_{(ABCD)}$$

También: $S_{\Delta QMS} = S_{\Delta QRS} = \frac{1}{2} S_{(ABCD)}$

- Luego: $S_{\Delta PRN} = S_{\Delta QMS}$

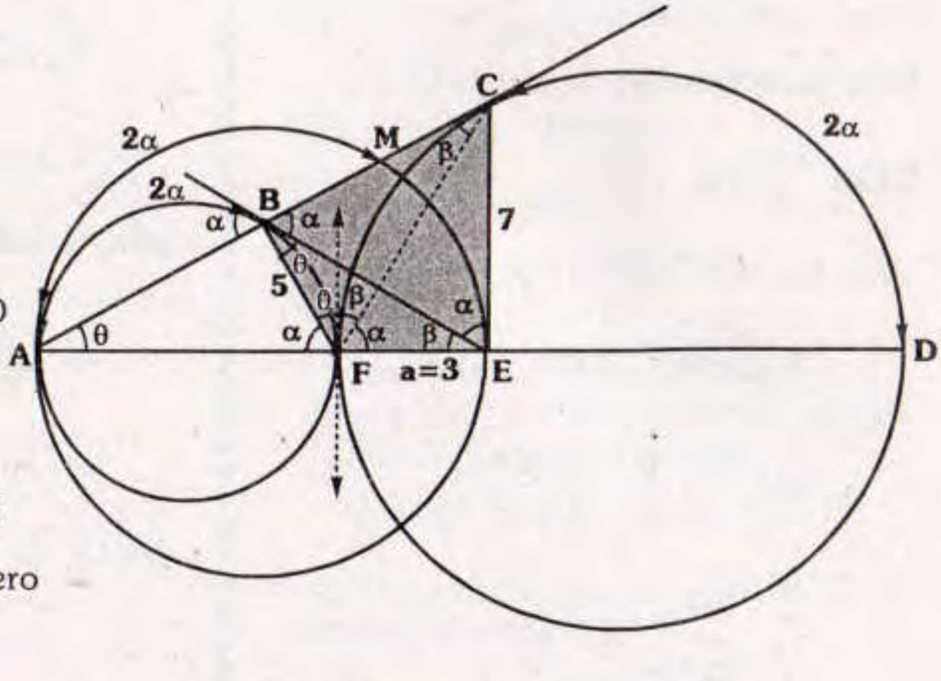
$$\Rightarrow \mathbb{M} + S + \mathbb{B} + \mathbb{D} = \mathbb{A} + \mathbb{C} + \mathbb{E} + S$$

$$\therefore \ \mathbb{A} + \mathbb{C} + \mathbb{E} = \mathbb{M} + \mathbb{B} + \mathbb{D}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 234**

Nos piden $S_{\triangle EFBC}$




- Como $m\widehat{AM} = m\widehat{CD}$

$$\Rightarrow \ m\widehat{AB} = m\widehat{AM}$$

Luego:

$m\sphericalangle BFA = m\sphericalangle EBC = m\sphericalangle CFD$

$\Rightarrow \triangle EFBC$: inscriptible

- Notemos:

$m\sphericalangle BFA = m\sphericalangle BFC = m\sphericalangle CFE$

$\Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow \Delta EBC$ equilátero

- En $\Delta BFE$: $a = 3$

- Para el área, podria ser por partes, pero optemos por:

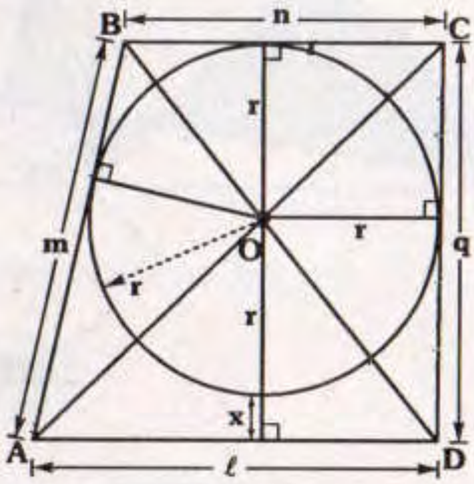
$$S_{\triangle EFBC} = \sqrt{(p-3)(p-5)(p-7)(p-7)}$$

Como $p=\frac{3+5+7+7}{2}=11$

$$\therefore S_{\triangle EFBC}=16\sqrt{3}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 235**




Piden x en función de a y r.

Dato: $\frac{mq}{n\ell}=a$

• Por teorema:

$$(S_{\Delta AOB})(S_{\Delta COD})=(S_{\Delta BOC})(S_{\Delta AOD})$$

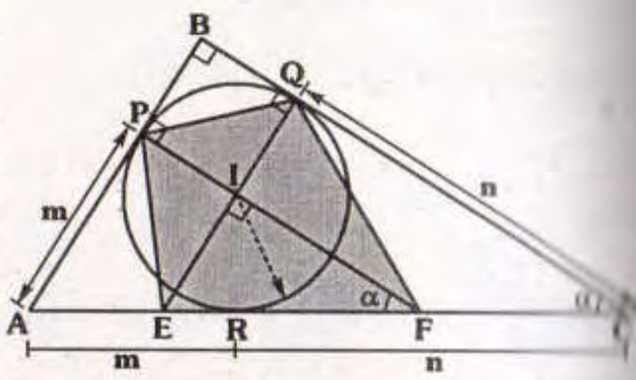
$$\Rightarrow \frac{mr}{2}\cdot\frac{qr}{2}=\frac{nr}{2}\frac{\ell(r+x)}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{mq}{n\ell}}_{a}=\frac{r+x}{r}$$

$$\therefore \mathbf{x=r(a-1)}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 236**




Nos piden $\frac{S_{\triangle EPQF}}{S_{\Delta ABC}}$

• Notemos que $\overline{EQ}\perp\overline{PF}$

• $S_{\triangle EPQF}=\frac{(EQ)(PF)}{2}$ ...(I)

• $S_{\triangle ABC}=mn$ ...(II)

• $\triangle EQC\sim\triangle APF$

$$\Rightarrow \frac{m}{PF}=\frac{EQ}{n}$$

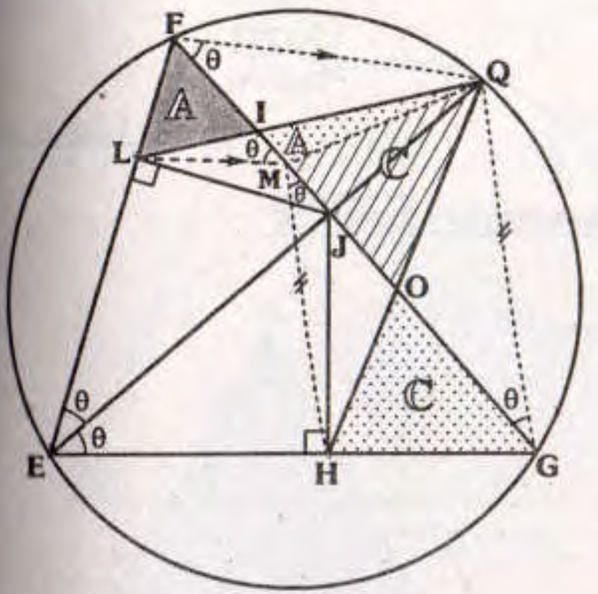
$$\Rightarrow mn=(PF)(EQ) \quad ...(III)$$

• De (I), (II) y (III):

$$\frac{S_{\triangle EPQF}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{2}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 237**




Nos piden demostrar $S_{\Delta IOQ} = \mathbb{A} + \mathbb{C}$

- Se traza $\overline{LM} // \overline{FQ}$, con M en $\overline{FG}$

$$\Rightarrow S_{\Delta IMQ} = \mathbb{A}$$

- Como $m\measuredangle LMF = m\measuredangle MFQ = \theta \Rightarrow$ ⏢ELMJ es inscriptible y también el ⏢ELJH lo es $\Rightarrow$ los puntos E, L, M, J y H son concíclicos $\Rightarrow m\measuredangle HMJ = \theta$

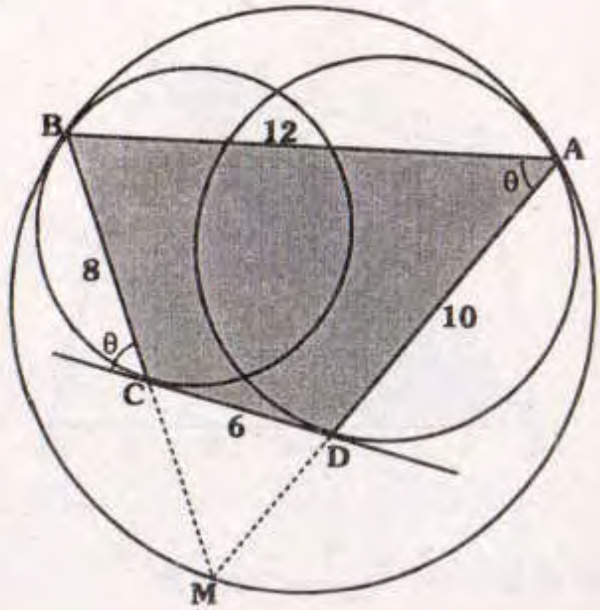
$$\Rightarrow \overline{MH} // \overline{QG}$$

- Como $\overline{MH} // \overline{QG}$

$$\Rightarrow S_{\Delta OMQ} = \mathbb{C}$$

$$\therefore \; \mathbf{S_{\Delta IOQ} = \mathbb{A} + \mathbb{C}}$$

**RESOLUCIÓN Nº 238**




Nos piden $S_{⏢ABCD}$

- Por teorema de circunferencia, al prolongar $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, intersecará al arco EF en su punto medio.

- Como $m\widehat{BC} = m\widehat{BM}$

$$\Rightarrow m\measuredangle ECB = m\measuredangle BAD$$

$$\Rightarrow ⏢ABCD \text{ es inscriptible}$$

- Como el ⏢ABCD también es circunscritible, por teorema de Pilot:

$$AD + BC = AB + CD \Rightarrow AD = 10$$

- Concluímos que el ⏢ABCD es bicéntrico, entonces:

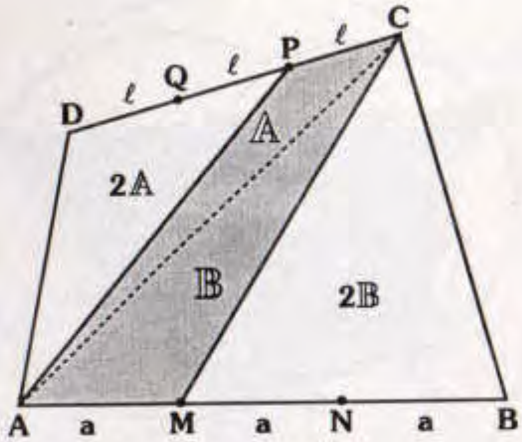
$$S_{⏢ABCD} = \sqrt{(6)(8)(10)(12)}$$

$$\therefore \; \mathbf{S_{⏢ABCD} = 24\sqrt{10}}$$

**Clave A**

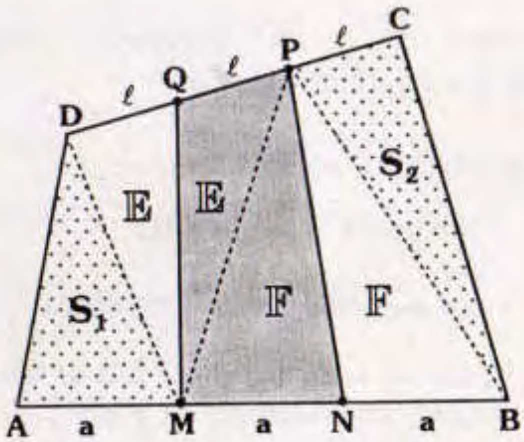
**RESOLUCIÓN Nº 239**

Analicemos el problema por partes:




En el gráfico: $S_{\triangle AMCP} = \mathbb{A} + \mathbb{B}$

$$\Rightarrow \quad S_{\triangle AMCP} = \frac{S_{\triangle ABCD}}{3}$$




• Notemos que:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{3} S_{\triangle ABCD}$$

$$\Rightarrow \quad 2\mathbb{E} + 2\mathbb{F} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABCD}$$

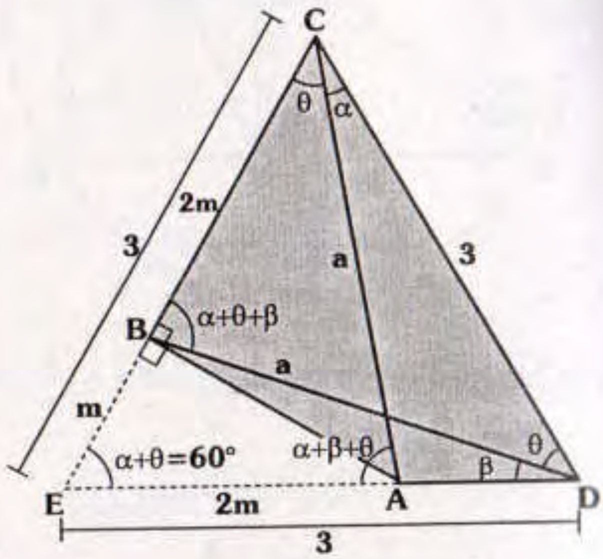
$$\Rightarrow \quad \mathbb{E} + \mathbb{F} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABCD}$$

$$S_{\triangle MNPQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABCD}$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle AMCP}}{S_{\triangle MNPQ}} = 1$$

**Clave** D

**RESOLUCIÓN Nº 240**




Piden $S_{\triangle ABCD}$

• Al completar ángulos, notamos

$$m\sphericalangle DEB = m\sphericalangle BCD \Rightarrow ED = CD = 3$$

• $\Delta ECA \cong \Delta DCB \Rightarrow EC = 3$ y $EA = BC$

• $\Delta ABC$ : equilátero

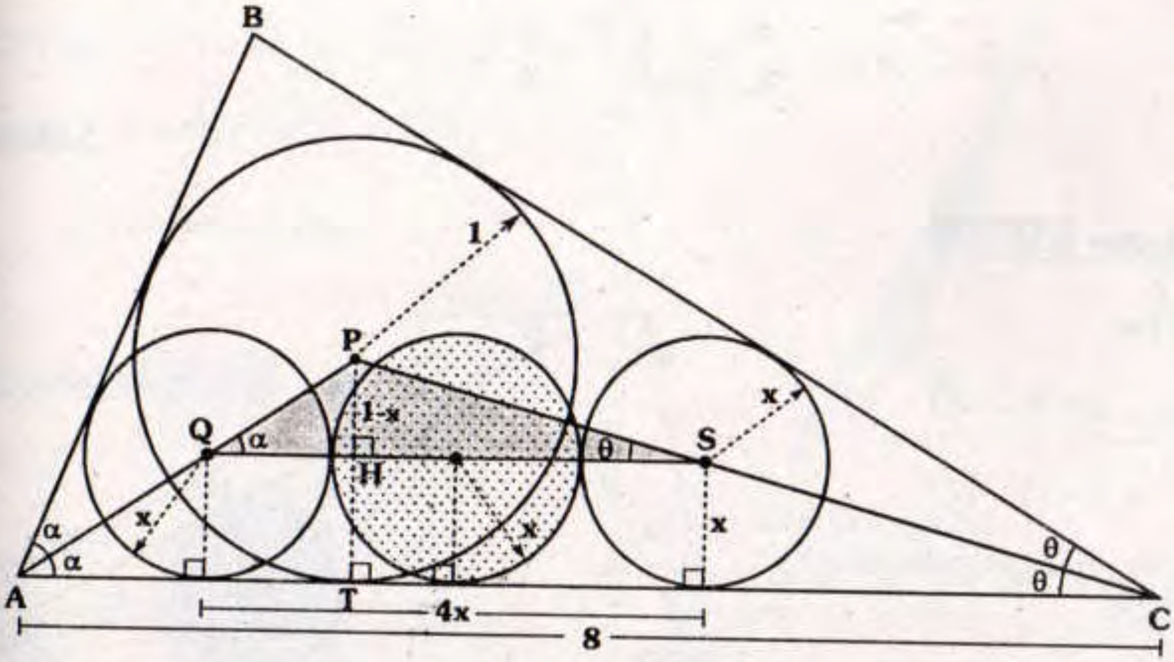
• $\measuredangle EBA$: notable de 30° $\Rightarrow m = 1$

• $$S_{\triangle ABCD} = \underbrace{S_{\Delta ECD}}_{3^2 \frac{\sqrt{3}}{4}} - \underbrace{S_{\Delta EBA}}_{\frac{(1)(\sqrt{3})}{2}}$$

$$\mathbf{S_{\triangle ABCD} = \frac{7}{4}\sqrt{3}}$$

**Clave** E

**Resolución N° 241**




Nos piden $A_\bullet = \pi x^2$

• Notemos $\Delta APC \sim \Delta QPS$, comparando elementos homólogos:

$$\frac{QS}{AC}=\frac{PH}{PT} \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{8}=\frac{1-x}{1} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{A_\bullet = \frac{4}{9}\pi}$$

**Clave E**

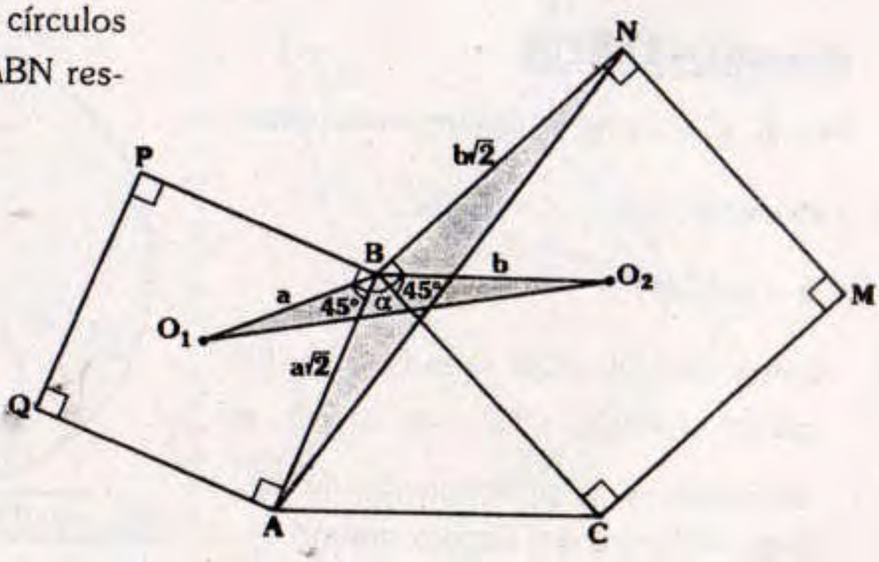
**Resolución N° 242**

• Sean $A_1$ y $A_2$ las áreas de los círculos inscritos en los $\Delta s\ O_1BO_2$ y ABN respectivamente.

• Nos piden: $\dfrac{A_1}{A_2}$

• Notemos: $\Delta O_1BO_2 \sim \Delta ABN$,

con razón de semejanza $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



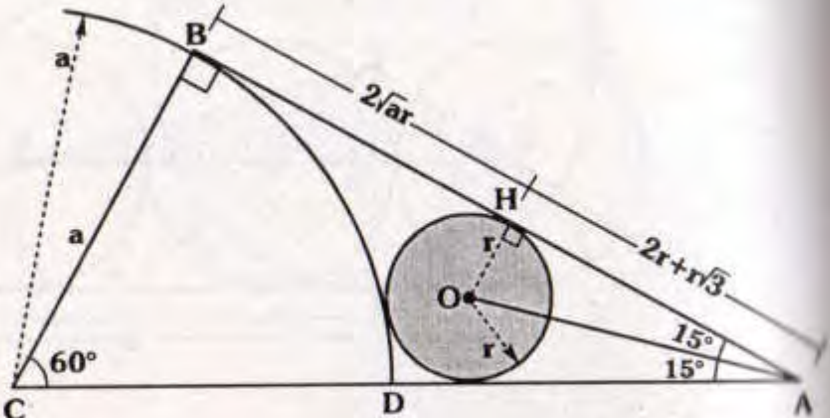
- Por teorema:

$$\therefore \quad \frac{A_1}{A_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Clave B

**RESOLUCIÓN Nº 243**

Piden $A_\bullet$




- Dato: $a=7+4\sqrt{3}$

$$\Rightarrow a=(2+\sqrt{3})^2$$

- Por teorema de relaciones métricas:

$$BH=2\sqrt{ar}$$

- En ⊿OHA: $HA=2r+r\sqrt{3}$
- Como $AB=a\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{ar}=a\sqrt{3}-r(2+\sqrt{3})$

$$2(2+\sqrt{3})\sqrt{r}=(2+\sqrt{3})^2\sqrt{3}-r(2+\sqrt{3})$$

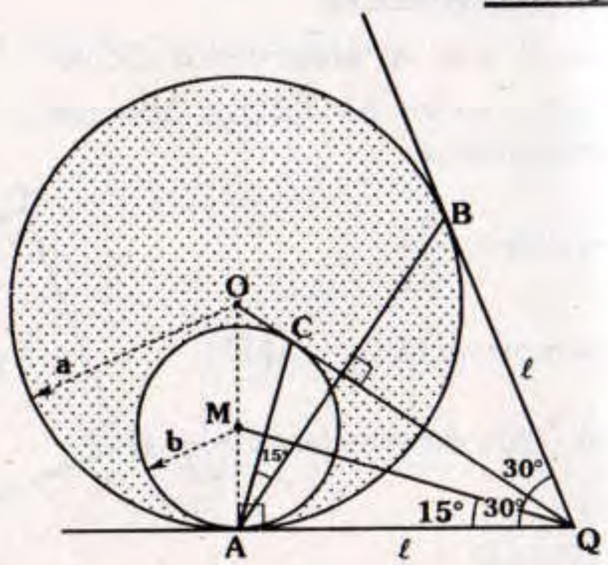
$$\Rightarrow \quad r+2\sqrt{r}=3+2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad r=3$$

$$\therefore \quad A_\bullet=9\pi$$

Clave A

**RESOLUCIÓN Nº 244**

Sea $\mathbb{A}$ el área de la región sombreada.




- Piden $\mathbb{A}$; Dato: $\ell=3+2\sqrt{3}$
- $\mathbb{A}=\pi(a^2-b^2)$
- Como $QA=QC=QB \Rightarrow m\sphericalangle CQB=30°$ luego $m\sphericalangle AQC=30°$, el $\Delta ABQ$ es equilátero $\Rightarrow$ la prolongación de $\overline{QC}$ llega al centro del círculo mayor.

• ⊿OAQ: notable de 30° $\Rightarrow a = 2+\sqrt{3}$

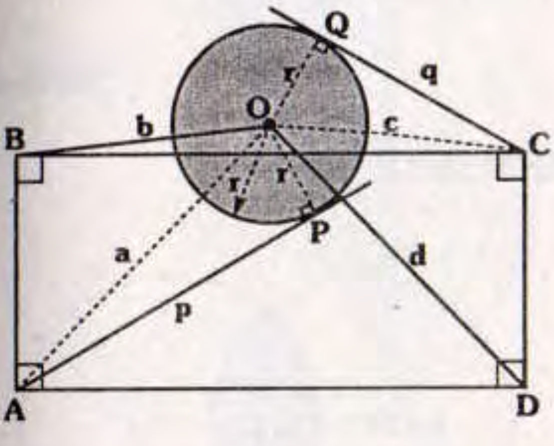
• ⊿MAQ: notable de 15° $\Rightarrow b = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \mathbb{A} = \pi\left[(2+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2\right]$$

$$\therefore \mathbb{A} = 4\pi(1+\sqrt{3})$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 245**




Piden $A_\bullet$

Dato:

$$b^2 + d^2 - p^2 - q^2 = 8$$

• Por teorema de Marlen:

$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2$$

• En el dato:

$$\underbrace{a^2 - p^2}_{r^2} + \underbrace{c^2 - q^2}_{r^2} = 8$$

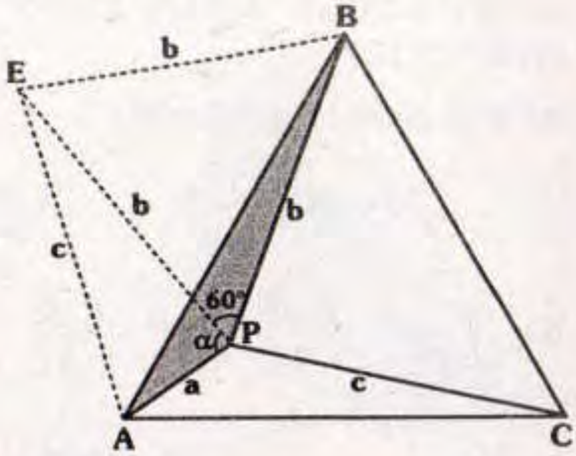
$$\Rightarrow r^2 = 4$$

• Finalmente:

$$\therefore A_\bullet = 4\pi$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 246**




Analicemos por partes:

• Nos indican que con "a","b" y "c" debe formarse un triángulo no acutángulo, es decir:

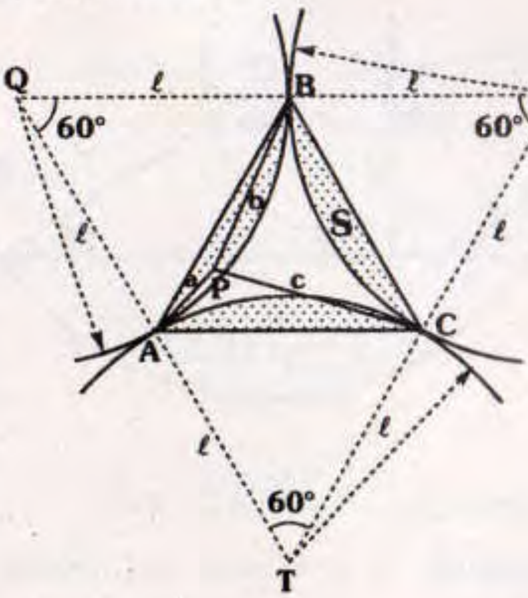
$$a^2 \geq b^2 + c^2,\ b^2 \geq a^2 + c^2 \ \text{ó}\ c^2 \geq b^2 + a^2$$

• Se traza el $\Delta PEB$ equilátero, entonces:

$$\Delta EBA \cong \Delta PBC \Rightarrow EA = c$$

• En $\Delta AEP$ : si $c^2 \geq b^2 + a^2 \Rightarrow \alpha \geq 90°$

• Es decir $m\measuredangle APB \geq 150°$, análogamente para cada lado, los puntos "P" se encontrarán en las regiones sombreadas a continuación.



- Las regiones favorables, serán donde: $m\measuredangle APB \geq 150°$ ; $m\measuredangle APC \geq 150°$ ó $m\measuredangle BPC \geq 150°$
- Sea p la probabilidad pedida:

$$\Rightarrow \ p = \frac{3S}{S_{\Delta ABC}} \qquad ...(I)$$

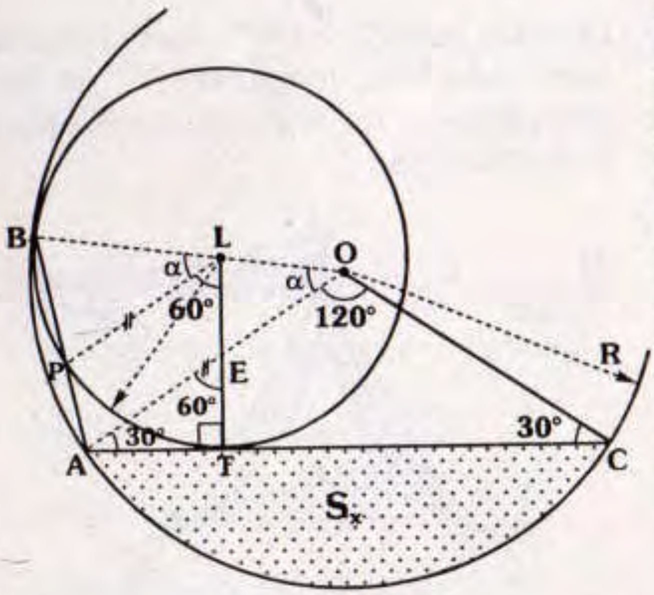
- $S = \frac{60°}{360°}\pi\ell^2 - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{6}\pi\ell^2 - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$
- En (I):

$$p = \frac{1}{\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)} \cdot 3\left(\frac{1}{6}\pi\ell^2 - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\therefore \ \mathbf{p = \frac{\sqrt{3}}{3}(2\pi - 3\sqrt{3})}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 247**




Nos piden $S_x$. Dato $AC = 2\sqrt{3}$

- Como O, L y B son colineales y $m\widehat{BP} = m\widehat{BA} \Rightarrow \overline{PL} // \overline{AO}$, luego $m\measuredangle AET = 60°$
- $S_x = S_{\text{◿}AOC} - S_{\Delta AOC}$

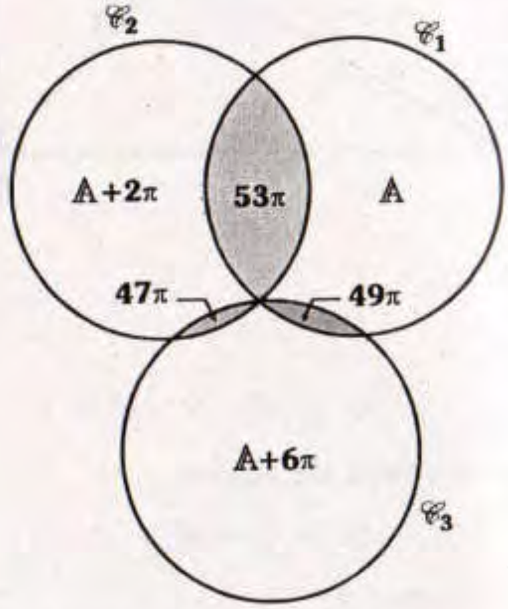
$$S_x = \frac{1}{3}\pi R^2 - R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- Como $AC = 2\sqrt{3} \ \Rightarrow \ R = 2$

$$\therefore \ \mathbf{S_x = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 248**




Sea r el radio de los círculos congruentes se ha graficado de acuerdo a las condiciones

- Como $\underbrace{\mathbb{A}_{(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3)}} = 823\pi$

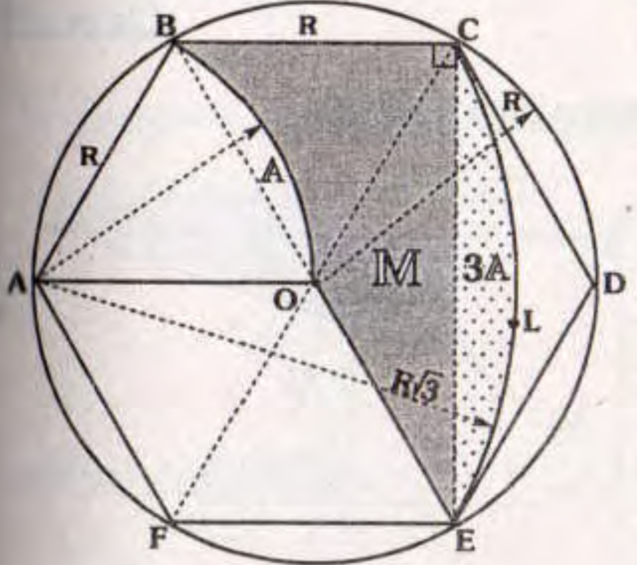
$$3\mathbb{A} + 157\pi = 823\pi$$
$$\Rightarrow \mathbb{A} = 222\pi$$

• Luego $\underbrace{\mathbb{A}_{(\circ)}}_{\pi r^2} = 324\pi$

$\therefore\ \mathbf{r = 18}$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 249**



Nos piden: $3\mathbb{A} + \mathbb{M}$

• Notemos que los arcos OB y CE son semejantes cuya razón de semejanza es de 1 a $\sqrt{3}$.

• La razón de áreas de los segmentos circulares es de 1 a 3.

• $S_{\triangle BCE} = \mathbb{A} + \mathbb{M} = R^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

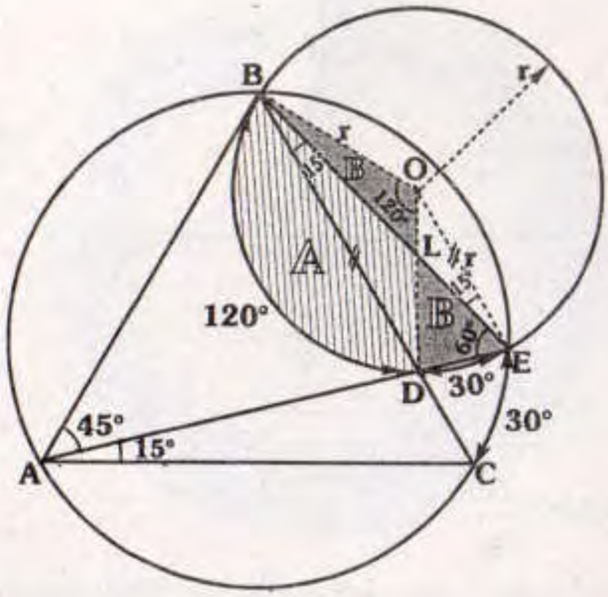
• $\mathbb{A} = S_{\triangle AOB} - S_{\Delta AOB}$

$\mathbb{A} = \dfrac{1}{6}\pi R^2 - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

• Finalmente: $\mathbf{3\mathbb{A} + \mathbb{M} = \dfrac{1}{3}\pi R^2}$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 250**



Nos piden $\mathbb{A} + \mathbb{B}$

• Notamos que $m\measuredangle CBE = 15°$ y

$m\measuredangle DEB = 60°$

$\Rightarrow\ m\widehat{BDE} = 150° \Rightarrow m\measuredangle BOE = 150°$

• También: $\overline{BD} \,//\, \overline{OE}$

$\Rightarrow\ S_{\Delta LDE} = S_{\Delta BOL} = \mathbb{B}$

• Como $m\widehat{DE} = 30° \Rightarrow \underbrace{DE}_{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

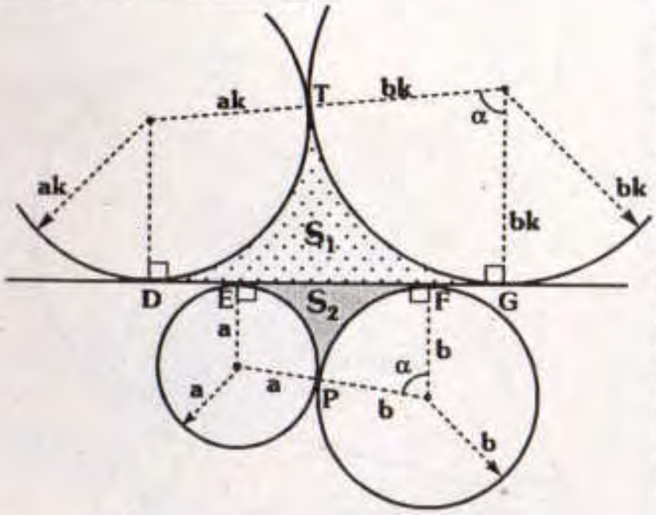
$\Rightarrow r = 2$

• $\mathbb{A} + \mathbb{B} = S_{\triangle BOD} = \dfrac{120°}{360°}\pi 2^2$

$\therefore\ \mathbb{A} + \mathbb{B} = \dfrac{4}{3}\pi$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 251**




Piden: $\dfrac{S_1}{S_2}$

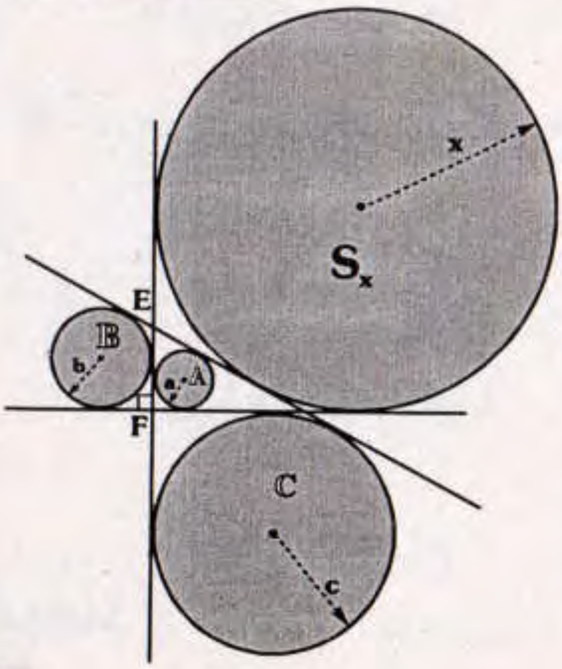
- Notemos que las regiones sombreadas son semejantes, luego:

$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{ak}{a}\right)^2$$

$$\therefore\quad \mathbf{\frac{S_1}{S_2}=k^2}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 252**



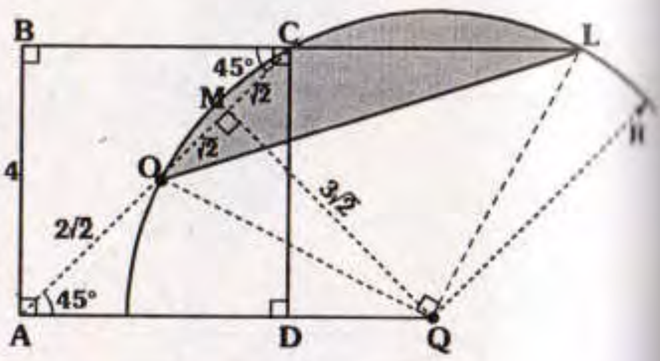

- Piden Sx
- Tenemos: $\pi a^2=\mathbb{A}$; $\pi b^2=\mathbb{B}$; $\pi c^2=\mathbb{C}$
- Como: $x=a+b+c$

$$S_x=\pi x^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_x}{\pi}}=\sqrt{\frac{\mathbb{A}}{\pi}}+\sqrt{\frac{\mathbb{B}}{\pi}}+\sqrt{\frac{\mathbb{C}}{\pi}}$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_x=(\sqrt{\mathbb{A}}+\sqrt{\mathbb{B}}+\sqrt{\mathbb{C}})^2}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 253**




Nos piden $S_{\triangleleft}$

- Como $m\measuredangle BCO=45° \Rightarrow m\measuredangle OQL=90°$
- Se traza $\overline{QM}\perp\overline{OC}$

$$\Rightarrow \quad OM=MC=\sqrt{2}$$

- En ⊿AMQ: $AM=MQ=3\sqrt{2}$
- En ⊿OMQ: $R=2\sqrt{5}$
- Finalmente:

$$S_{\triangleleft}=S_{\triangle OQL}-S_{\triangle OQL}$$

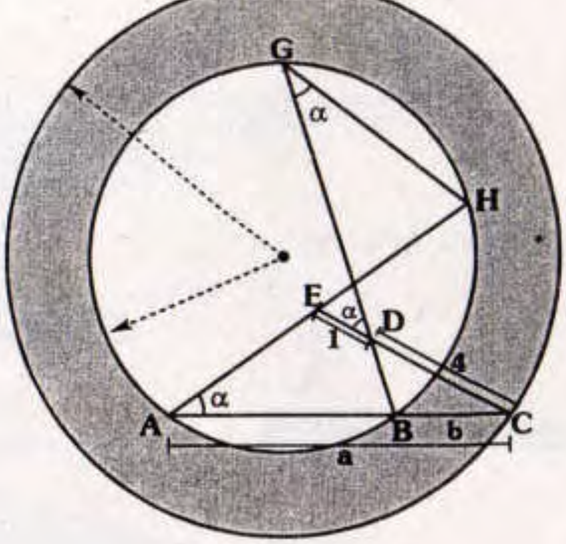
$$S_{\triangleleft}=\frac{1}{4}\pi R^2-\frac{R^2}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbf{S_{\triangleleft}=5(\pi-2)}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 254**

Sea $\mathbb{A}_{cc}$ el área de la corona circular.




- Usemos la siguiente expresión

$$\mathbb{A}_{cc} = \pi ab$$

- Como $\overline{ED} // \overline{GH}$

$$\Rightarrow m\sphericalangle EDG = m\sphericalangle DGH = \alpha \text{ y}$$

$$m\sphericalangle EAB = \alpha$$

$\Rightarrow$ ⏢AEDB es inscriptible

- Por t. de la secante en ⏢AEOB:

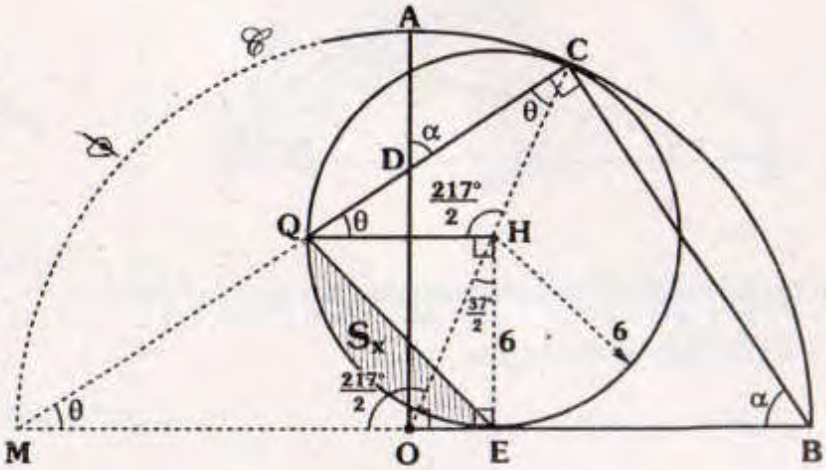
$$ab = (4)(5)$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{cc} = 20\pi$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 255**

Sea $S_x$ el área de la región sombreada.




- Como $m\sphericalangle ADC = m\sphericalangle OBC$

$\Rightarrow$ ⏢ODCB es inscriptible

$\Rightarrow \; m\sphericalangle DCB = 90°$

- La prolongación de $\overline{CQ}$ y la prolongación de $\overline{BO}$ se cortan en M, $(M \in \mathscr{C})$

- Notemos que:

$\overline{QH} // \overline{MO} \;\Rightarrow\; m\sphericalangle QHE = 90°$

- Como $\quad m\widehat{QC} = m\widehat{MC} \quad \Rightarrow \quad m\sphericalangle MOC = \dfrac{217°}{2}$

$$\Rightarrow m\sphericalangle OHE = \frac{37°}{2} \quad \Rightarrow \quad HE = 6$$

• Finalmente:

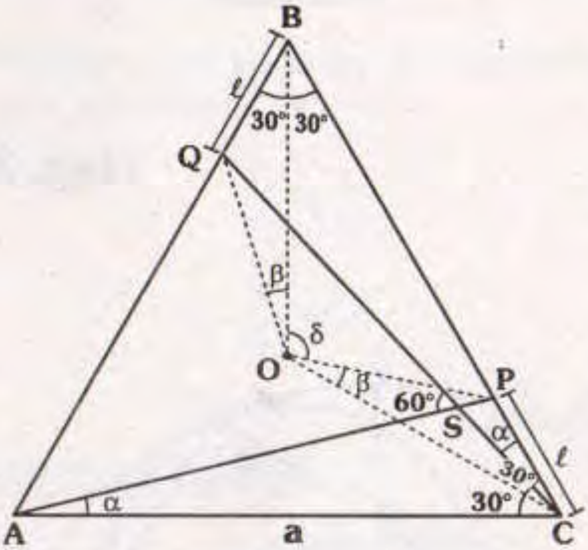
$$S_x = S_{\triangle QHE} - S_{\triangle QHE}$$

$$S_x = \frac{1}{4}\pi 6^2 - \frac{(6)(6)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = 9(\pi - 2)}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 256**




Analicemos el problema por partes:

• ⏢BQSP: inscriptible

• Como $m\measuredangle QSA = 60°$

$$\Rightarrow m\measuredangle CAP = m\measuredangle QCB$$

$\Delta CAP \cong \Delta BCQ(ALA)$

$$\Rightarrow PC = QB$$

• Sea O el centro del $\Delta ABC$ $\Rightarrow$

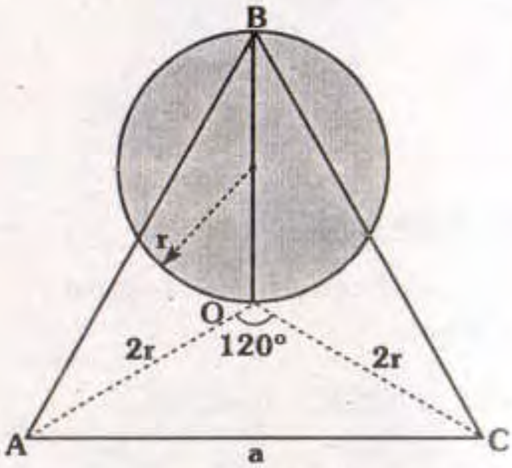
$\Delta QBO \cong \Delta PCO \Rightarrow m\measuredangle QOB = m\measuredangle POC$

$$\Rightarrow m\measuredangle QOP = 120°$$

$\Rightarrow$ ⏢BPOQ es inscriptible

• Es decir la circunferencia circunscrita al triángulo QSP, también pasa por B y O, para toda circunferencia $\overline{OP}$ será cuerda, entonces el radio mínimo será aquella que tenga a $\overline{OB}$ como diámetro.

• Tendremos lo siguiente:




• En $\Delta AOC$: $a = 2r\sqrt{3}$

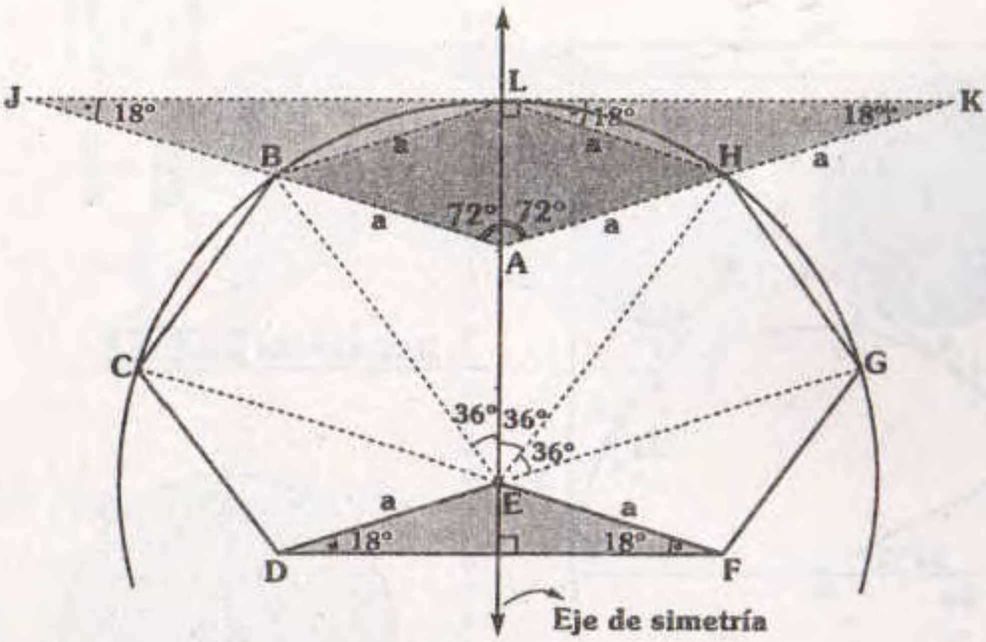
$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

• $$\mathbb{A}_{\bullet} = \pi r^2$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\bullet} = \frac{\pi a^2}{12}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 257**



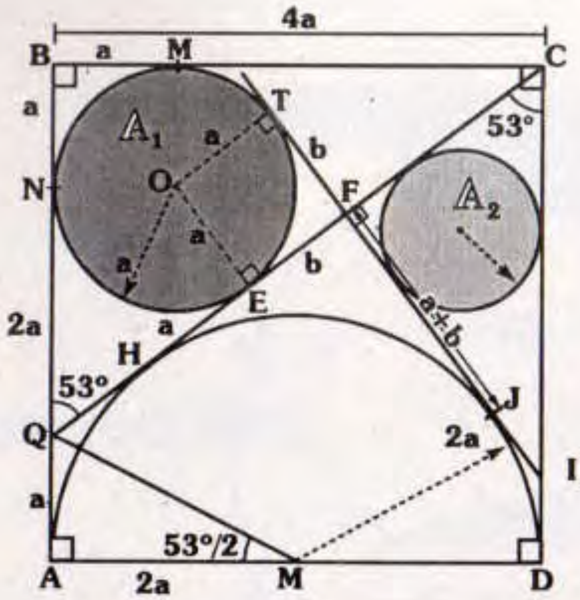

- Como los pentágonos son regulares y todas las diagonales son iguales, los puntos C, B, H y G equidistan de A ⇒ ⏢CBHG: insccriptible.
- Sea $\mathbb{A}_1$ el área del círculo inscrito en el ΔDEF y $\mathbb{A}_2$ el área del círculo inscrito en el triángulo mixtilineo BLH.
- Nos piden $\dfrac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}$
- La recta AE es el eje de simetría.
- Se traza la tangente en L, la cual corta a las prolongaciones de AH y AB en K y J, luego AH=HL=HK
- ΔJAK ~ ΔDEF cuya razón de semejanza es 2.

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_2}=\frac{1}{4}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 258**




Nos piden $\frac{A_1}{A_2}$

- Por teorema de circunferencia:

$$m\measuredangle QCD = 53°$$

- En ⊿QBC:

  Sea BC=4a; BQ=3a y QC=5a ⇒ el radio de "$A_1$" es: a.

- Notemos que ⊿QAM es notable de

  53°/2 ⇒ AQ=a, como

  NB=a ⇒ QN=QE=2a

- Sea FT=b ⇒ FH=FJ=a+b, como

  TJ=AN ⇒ 2b+a=3a

  ⇒ a=b,

- Luego: OTFE es cuadrado ⇒ FC=2a

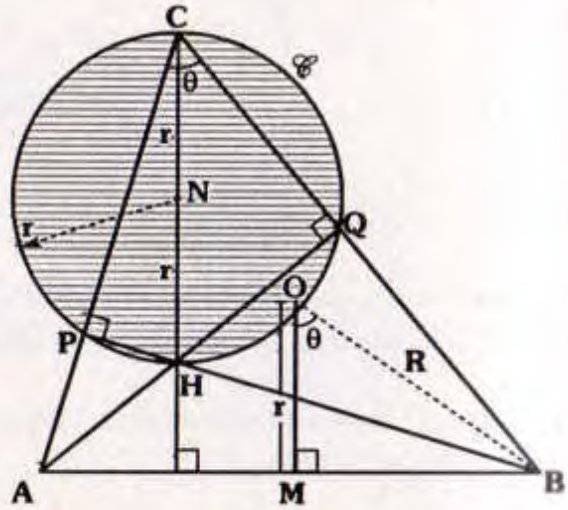
- Como ⊿QBC~⊿CFI y la razón de semejanza 3a2, entonces la razón de áreas de los círculos inscritos, es:

$$\frac{A_1}{A_2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{A_1}{A_2}=\frac{9}{4}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 259**




Nos piden $A_\bullet$

- Sea O el circuncentro del ΔABC
- Como el ⌂PHQC es inscriptible, la circunferencia a que pasa por P, H y Q, también pasa por C.
- $\overline{HC}$ diámetro de 𝒞
- Por teorema: HC = 2(OM) y

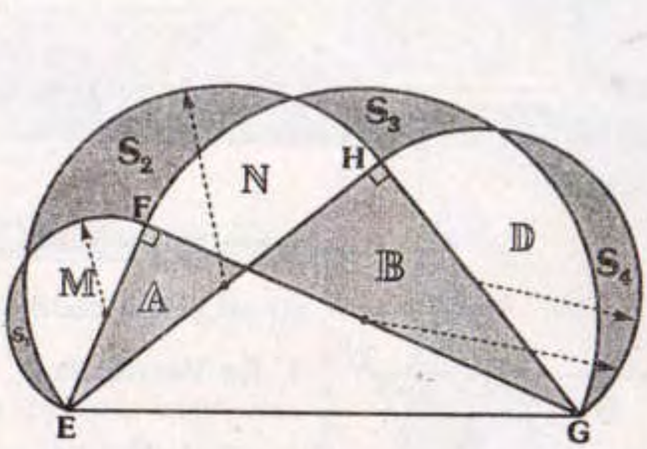
$$m\measuredangle MOB = \theta$$

$$\Rightarrow r = R\cos\theta$$

$$\therefore \; A_\bullet = \pi R^2\cos^2\theta$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 260**



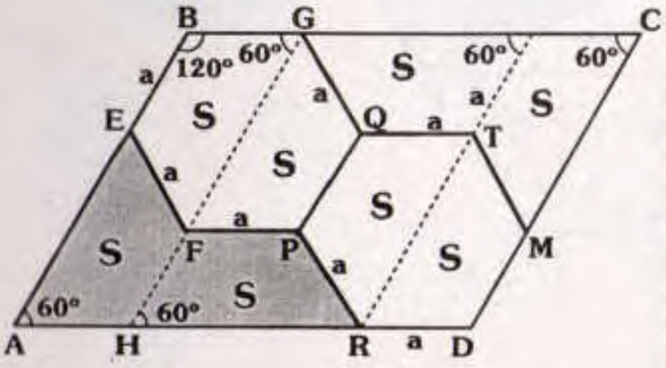

- Sea S el área del semicírculo de diámetro EG:
- Por teorema, en:
- $\measuredangle$EFG: $S = (S_1 + \mathbb{M}) + (\mathbb{N} + S_3 + \mathbb{B} + \mathbb{D})$
- $\measuredangle$EHG: $S = (\mathbb{A} + \mathbb{M} + S_2 + \mathbb{N}) + \mathbb{D} + S_4)$

$$\Rightarrow S_1 + \cancel{\mathbb{M}} + \cancel{\mathbb{N}} + S_3 + \mathbb{B} + \cancel{\mathbb{D}} = \mathbb{A} + \cancel{\mathbb{M}} + S_2 + \cancel{\mathbb{N}} + \cancel{\mathbb{D}} + S_4$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_1 + S_3 - S_2 - S_4 = \mathbb{A} - \mathbb{B}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 261**




Sea $\mathbb{A}_s$, el área de la región sombreada

Piden $\dfrac{\mathbb{A}_s}{\mathbb{A}_{(ABCD)}}$

- Notemos que $\overline{EB}//\overline{PQ}//\overline{DM} \Rightarrow \overline{AB}//\overline{CD}$,

  análogamente $\overline{AD}//\overline{BC} \Rightarrow$ ABCD es paralelogramo.

- Al trazar las diagonales $\overline{GF}$ y $\overline{RT}$ de los hexágonos regulares y prolongarlas, notamos:

  AEFH ≅ FGBE ≅ HFPR y así todas las regiones trapeciales son congruentes.

- Luego $\mathbb{A}_s = 2S$ y $\mathbb{A}_{(ABCD)} = 8S$

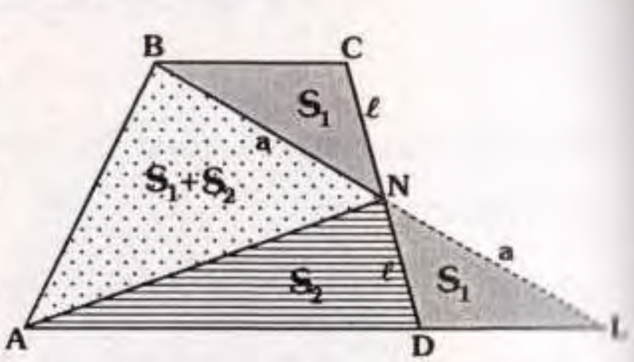
$$\therefore \ \frac{\mathbb{A}_s}{\mathbb{A}_{(ABCD)}} = \frac{1}{4}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 262**

Analicemos cada proposición:

**I. Es Verdadera**




- Como $S_{\Delta ABN} = S_{\Delta BNC} + S_{\Delta AND}$ se prolonga $\overline{BN}$ hasta L tal que BN=NL

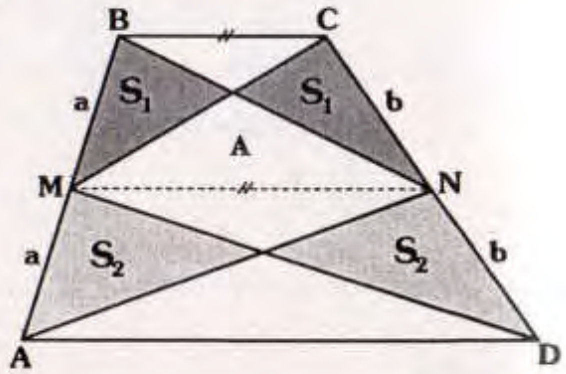
$$\Rightarrow \overline{BC}//\overline{DL} \ \text{ y } \ S_{\Delta NDL} = S_{\Delta BNC}$$

- Como $BN = NL \Rightarrow S_{\Delta ABN} = S_{\Delta ANL}$

  $\Rightarrow$ A, D y L: colineales

- Luego $\overline{AD}//\overline{BC}$ entonces ABCD es trapecio.

**II. Es Verdadera.**



- Como $S_{\Delta ABN} = S_{\Delta CMD} \Rightarrow S_{\Delta MBN} = S_{\Delta NMC}$

$$\Rightarrow \overline{MN} // \overline{BC}$$

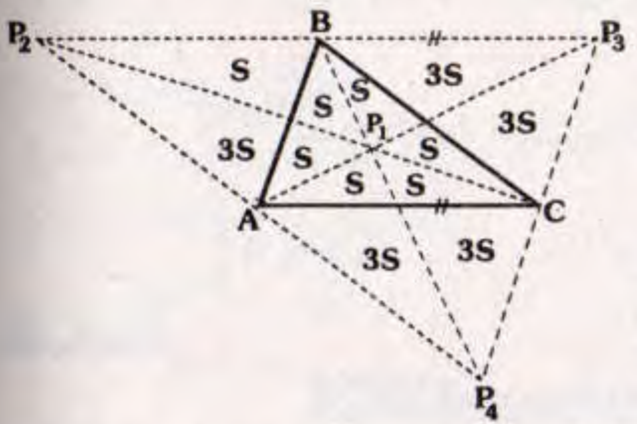
- Análogamente: $\overline{MN} // \overline{AD}$
- Finalmente $\overline{AD} // \overline{BC}$, luego ABCD es trapecio.

**III. Es Falsa.**

Como condición la cumple todo cuadrilátero convexo, entonces la proposición es falsa.

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 263**




- El primer punto que cumple condición es el baricentro ($P_1$) del $\Delta ABC$
- Los otros puntos los determinamos trazando paralelas de cada vértice al lado opuesto, entonces.

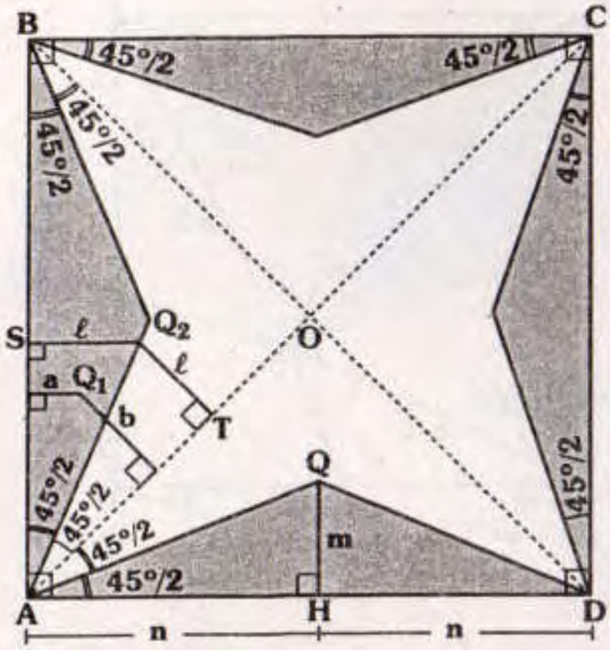
$$S_{\Delta AP_iB} = S_{\Delta P_iBC} = S_{\Delta P_iAC}$$

$$i=1, 2, 3, 4$$

$\therefore$ Existen cuatro puntos con tal condición

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 264**




- Sea p la probabilidad pedida.
- Hallemos la región favorable, para ello se trazan las bisectrices de los ángulos entre la diagonal y un lado.
- Las regiones sombreadas cumplen la condición, por ejemplo para $Q_1$: $a<b$, para $Q_2$: $Q_2S=Q_2T$
- Luego:

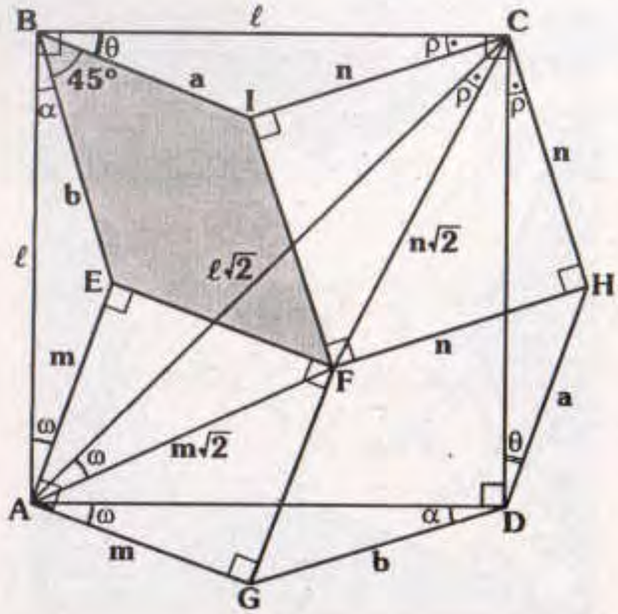
$$p = \frac{4(S_{\Delta AQD})}{S_{\square ABCD}} = \frac{4mn}{4n^2} = \frac{m}{n}$$

- $\measuredangle AHQ$: $n = m(\sqrt{2}+1)$

$$\therefore \ \mathbf{p = \sqrt{2} - 1}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 265**




Nos piden $S_{(EBIF)}$

Dato: $ab=10\sqrt{2}\ \wedge\ \alpha+\theta=45°$

- Rápidamente nos damos cuenta:

– $\Delta GAD \cong \Delta EAB \Rightarrow EB=b \wedge m\measuredangle ABE=\alpha$

– $\Delta BCI \cong \Delta DCH \Rightarrow IB=a \wedge m\measuredangle IBC=\theta$

$$\Rightarrow m\measuredangle EBI=45°$$

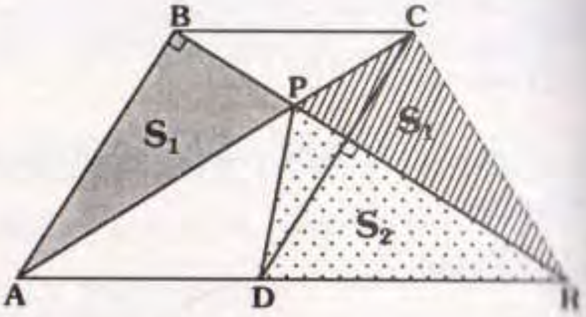
- $\Delta AFC \sim \Delta AEB \Rightarrow b=n$
- $\Delta AFC \sim \Delta DHC \Rightarrow a=m$
- Luego EBIF es paralelogramo

$$\Rightarrow S_{(EBIF)}=ab\text{sen}45°$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{(EBIF)}=10}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 266**




Nos piden $S_1+S_2$

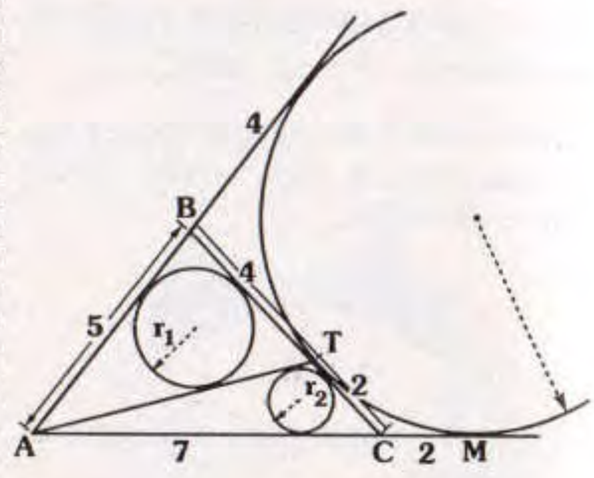
Dato: $(AB)(PR)=k$

- Como $\overline{AR}/\!/\overline{BC} \Rightarrow S_{\Delta CPR}=S_{\triangle ABP}=S_1$
- $\overline{AB}/\!/\overline{DC} \Rightarrow \overline{PR}\perp\overline{CD}$
- $S_{\triangle DPCR}=S_1+S_2=\dfrac{\overbrace{(CD)}^{AB}(PR)}{2}$

$$\therefore\ \mathbf{S_1+S_2=\frac{k}{2}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 267**




Nos piden $\dfrac{r_1}{r_2}$

- Como AB=5; BC=6 y AC=7 $\Rightarrow$ BT=4 y TC=2
- Notamos también: $\text{Perímetro}_{\Delta ABT} = \text{Perímetro}_{\Delta ATC}$
- Sea p en semiperímetro de los $\Delta$s ABT y ATC

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABT}}{S_{\Delta ATC}} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{pr_1}{pr_2} = \frac{4}{2}$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = 2$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 268**

Piden: $\frac{r_1}{r_2}$

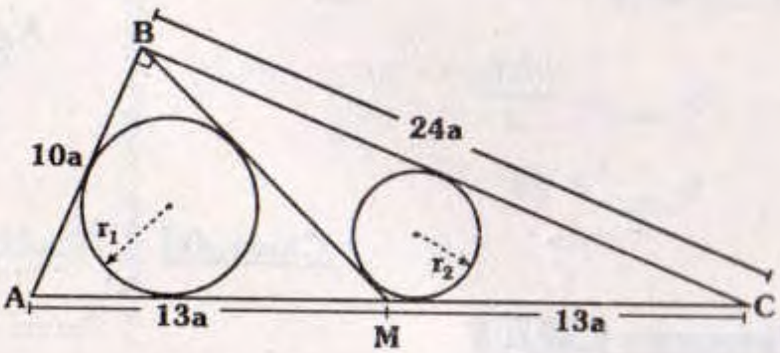
Dato: 12(AB) = 5(BC)

- Convenientemente AB=10a;

  BC=24a $\Rightarrow$ AC=26a

- Como $\overline{BM}$ es mediana

  $\Rightarrow$ AM=MC=BM=13a




- También:

$$\underbrace{S_{\Delta ABM}} = S_{\Delta MBC}$$

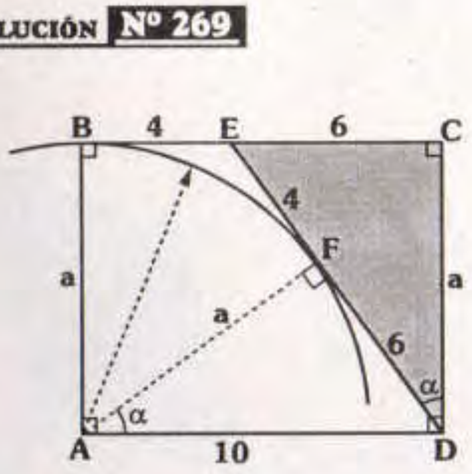
$$p_{\Delta ABM} \cdot r_1 = p_{\Delta MBC} \cdot r_2$$

$$\Rightarrow \frac{(10a+13a+13a)}{2} r_1 = \frac{(24a+13a+13a)}{2} r_2$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{25}{18}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 269**




Piden $S_{\triangle ECD}$

- $\triangle AFD \cong \triangle DCE$

$\Rightarrow$ AD=10 y EC=6

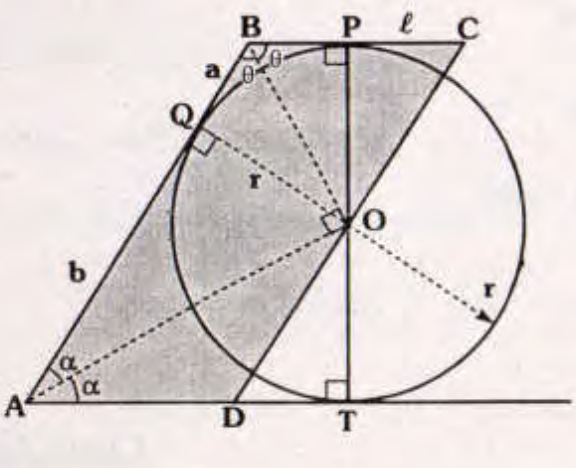
- Luego $\alpha = 37° \Rightarrow a = 8$
- Finalmente :

$$S_{\triangle ECD} = \frac{(6)(8)}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle ECD} = 24}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 270**




Nos piden $S_{\square ABCD}$

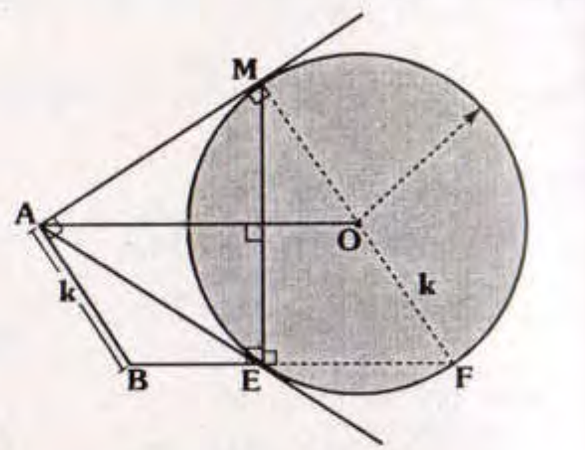
- Como $\overline{AT} // \overline{BC} \Rightarrow \overline{PT}$ es diámetro.
- Como DT=PC $\Rightarrow \triangle DTO \cong \triangle CPO$
$\Rightarrow OP = OT \Rightarrow$ O es centro.
- Notemos que $m\measuredangle AOB = 90°$

$$\Rightarrow r^2 = ab$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\square ABCD} = (a+b)\sqrt{ab}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 271**




Piden $\mathbb{A}_{\bullet}$

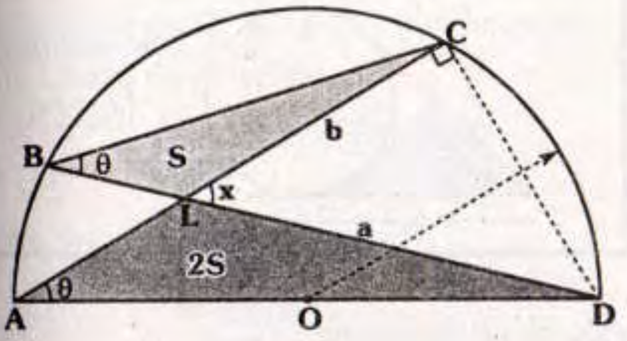
- Notemos que al prolongar $\overline{BE}$ hasta que corte a $\mathscr{C}$ en F, se tendrá $m\measuredangle MEF = 90° \Rightarrow \overline{MF}$ es diámetro.
- Como $\overline{AO} \perp \overline{ME} \Rightarrow \overline{AO} // \overline{BF}$ y

$\overline{AB} // \overline{MF} \Rightarrow$ ABFO es paralelogramo $\Rightarrow$ OF=k

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\bullet} = \pi k^2$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 272**




Piden x

- Como $\Delta ALD \sim \Delta BLC \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta ALD}}{S_{\Delta BLC}} = \left(\dfrac{LD}{LC}\right)^2$

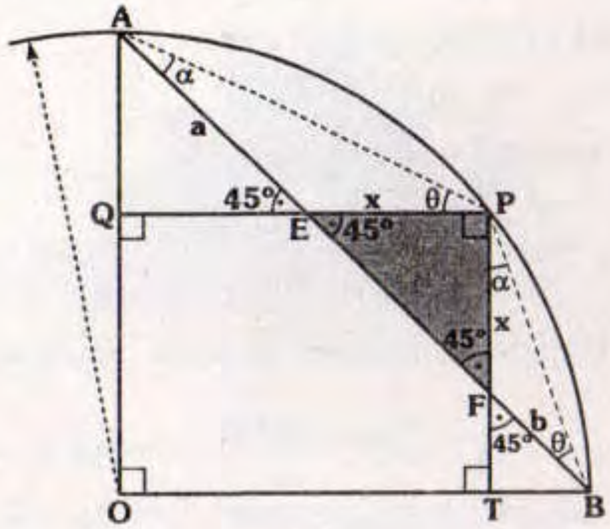
$$\Rightarrow \frac{2S}{S} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad a = b\sqrt{2}$$

- En ⊿LCD:

$$\therefore \quad \mathbf{x = 45°}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 273**




Piden $S_{\Delta EPF}$

- $S_{\Delta EPF} = \dfrac{x^2}{2}$

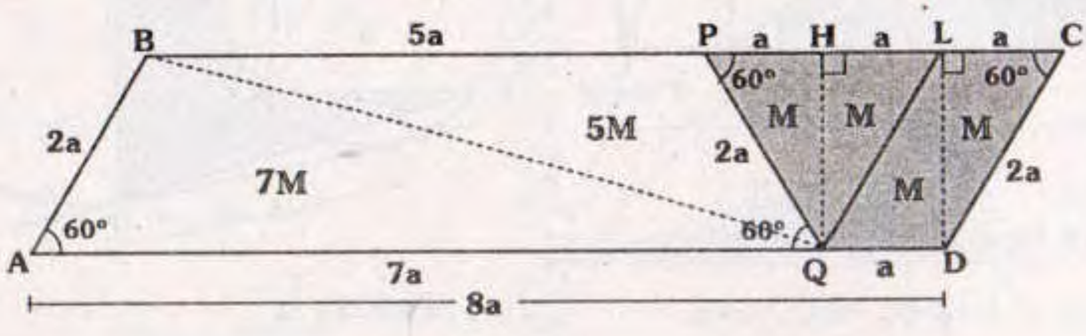
- $\Delta AEP \sim \Delta PFB \Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{x}$

$$\Rightarrow x^2 = ab$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\Delta EPF} = \frac{ab}{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 274**




Nos piden $\dfrac{S_{(ABCD)}}{S_{(PCDQ)}}$

- Como AD=4(AB) $\Rightarrow$ AB=2a y
AD=8a

- El $\triangle$PCDQ es inscriptible
$\Rightarrow$ $m\measuredangle AQP = 60°$ ,

también es circunscriptible

$\Rightarrow$ PC+QD=PQ+CD

$\Rightarrow$ QD=HL=a

- Usando las razones de áreas, tenemos:

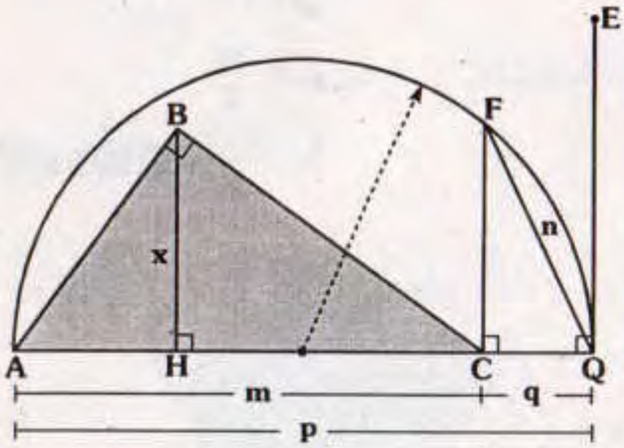
$$S_{(ABCD)} = 16\mathbb{M}$$

$$S_{(PCDQ)} = 4\mathbb{M}$$

$$\therefore \quad \frac{S_{(ABCD)}}{S_{(PCDQ)}} = 4$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 275



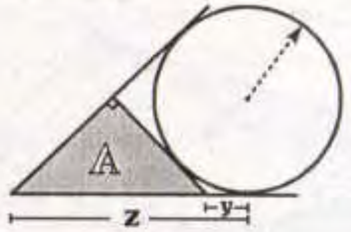

Piden x en función de "m" y "n"

- Hallemos el área de ABC, pues:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{mx}{2} \qquad ...(I)$$

**Observación**

Recordemos:




Se cumple: $\mathbb{A} = zy$

- De la observación:

$$S_{\triangle ABC} = pq \qquad ...(II)$$

- En ◺: $n^2 = pq$ ...(III)

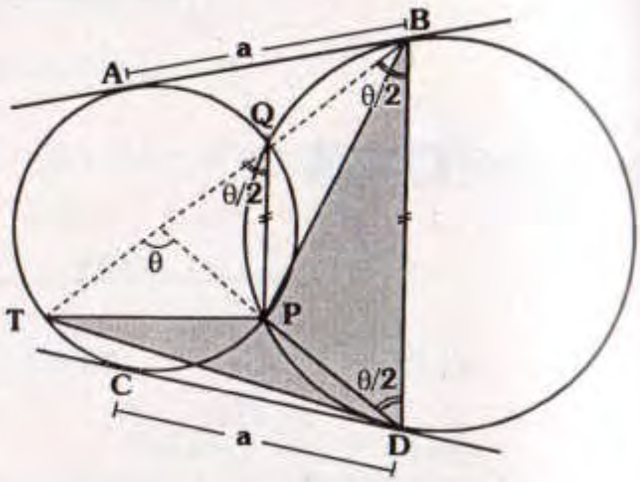
- De (I), (II) y (III):

$$\frac{mx}{2} = n^2$$

$$\therefore \; x = \frac{2n^2}{m}$$

**Clave [illegible]**

## RESOLUCIÓN Nº 276




Nos piden $S_{\triangle TDBP}$

- Por t. de circunferencia: CD=AB; $\overline{PQ}//\overline{DB}$, QB=PD, $m\measuredangle TQP = \frac{\theta}{2}$ y

$m\sphericalangle QBD = \frac{\theta}{2}$

- Concluímos: B, Q y T son colineales
- Por fórmula general:

$$S_{\measuredangle TDBP} = \frac{(PD)(TB)}{2}\text{sen}\theta$$

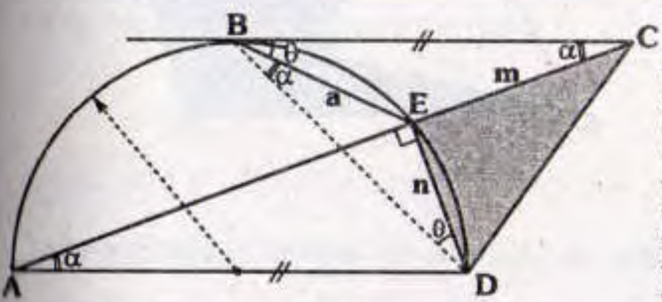
- Por teorema de la tangente:

$$a^2 = \underbrace{(BQ)}_{PD}(BT)$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\measuredangle TDBP} = \frac{a^2}{2}sen\theta}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 277**




Nos piden $S_{\triangle CED}$

- Como $m\sphericalangle AED = 90°$

$$\Rightarrow\ S_{\triangle CED} = \frac{mn}{2}$$

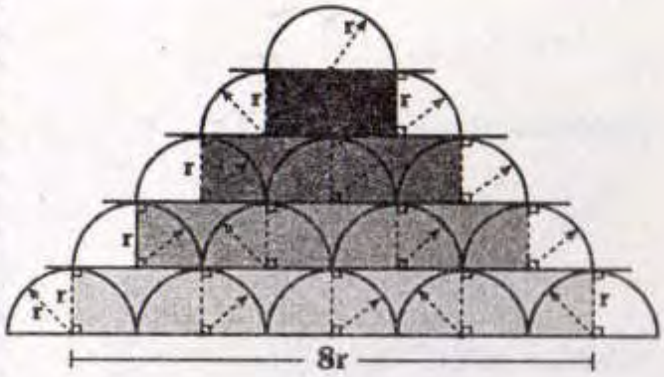
- Notemos $\Delta BEC \sim \Delta DEB$

$$\Rightarrow\ \frac{m}{a} = \frac{a}{n}\ \Rightarrow\ mn = a^2$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\triangle CED} = \frac{a^2}{2}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 278**




Nos piden el área total : $\mathbb{A}_T$

- La región total la podemos descomponer así:
  - cuatro regiones rectangulares; y
  - ocho regiones cuadrantales; y

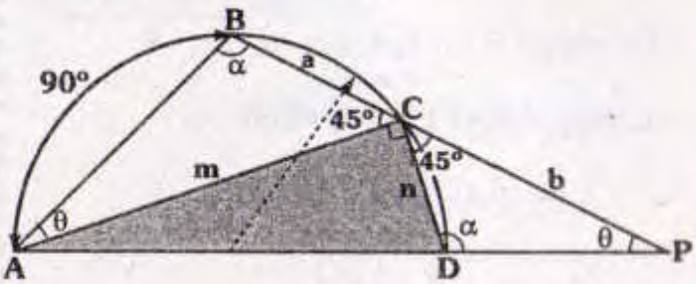
  El semicírculo en la parte superior
- Luego:

$$\mathbb{A}_T = r(8r) + r(6r) + r(4r) + r(2r) + 8\left(\frac{1}{4}\pi r^2\right) + \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{\mathbb{A}_T = \frac{5}{2}r^2(8+\pi)}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 279**




Nos piden $S_{\triangle ACD}$

Dato $ab = k$

• Como $m\sphericalangle ACD = 90°$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{mn}{2}$$

• Notemos $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle CDP$ y

$$m\sphericalangle ACB = 45°$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle DCP = 45°$$

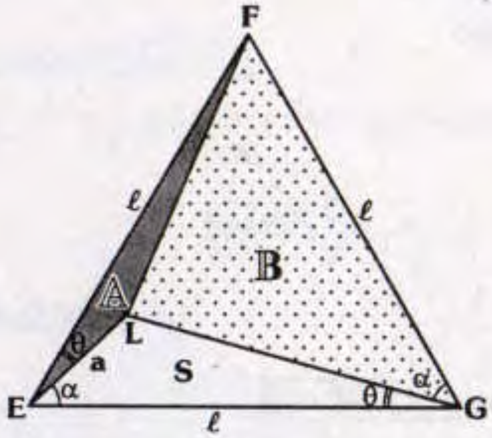
• $\Delta ABC \sim \Delta PDC \Rightarrow \frac{m}{b} = \frac{a}{n}$

$$\Rightarrow mn = ab$$

$$\therefore \mathbf{S_{\triangle ACD} = \frac{k}{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 280**




Nos piden S en función de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$

• Como $m\sphericalangle FEL = m\sphericalangle EGL$

$$\Rightarrow m\sphericalangle LEG = m\sphericalangle LGF$$

• Luego: $\mathbb{A} = \frac{a\ell}{2}\operatorname{sen}\theta$, $S = \frac{a\ell}{2}\operatorname{sen}\alpha$ $\Bigg\}$ $\frac{\mathbb{A}}{S} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha}$ ...(I)

• Análogamente:

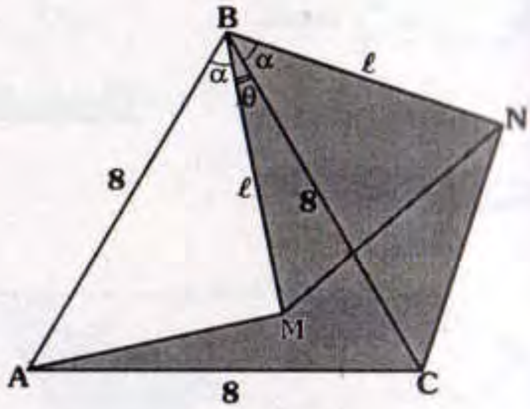
$$\frac{S}{\mathbb{B}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha} \quad ...(II)$$

• De (I) y (II): $\frac{\mathbb{A}}{S} = \frac{S}{\mathbb{B}}$

$$\therefore \mathbf{S = \sqrt{\mathbb{A}\mathbb{B}}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 281**




Sea $\mathbb{A}_x$ el área de la región sombreada.

• Como $\Delta ABC$ y $\Delta MBN$ son equiláteros, entonces:

$$m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle CBN$$

$$\Rightarrow \Delta ABM \cong \Delta CBN(LAL)$$

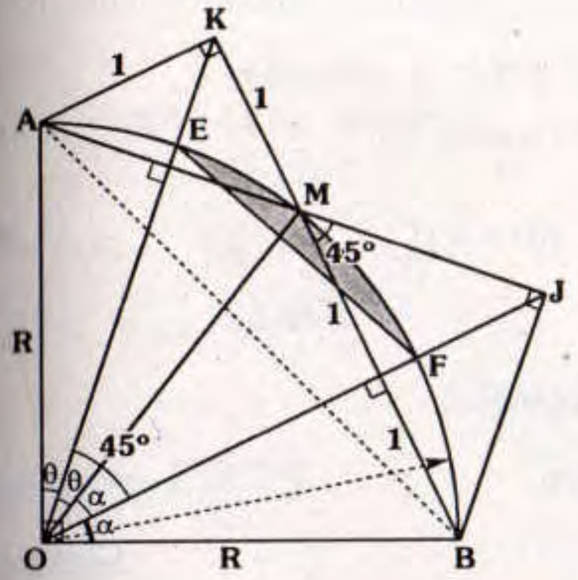
$$\Rightarrow S_{\Delta ABM} = S_{\Delta CBN}$$

• Luego: $\mathbb{A}_x = \underbrace{S_{\Delta ABC}}_{\frac{8^2\sqrt{3}}{4}}$

$$\therefore \mathbf{\mathbb{A}_x = 16\sqrt{3}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 282**




Nos piden $S_{\lozenge}$

- Por teorema de circunferencia:

$$m\measuredangle BMJ = 45°$$

$\Rightarrow$ ⊿AKM y ⊿MJB notable de 45°

- Los △s OAKM y OMJB son trapezoides simétricos $\Rightarrow$ $m\measuredangle EOF = 45°$

- En ⊿AKB: $AB = \sqrt{10}$
- En ⊿AOB: $AB = R\sqrt{2}$

$\Big\}\ R = \sqrt{5}$

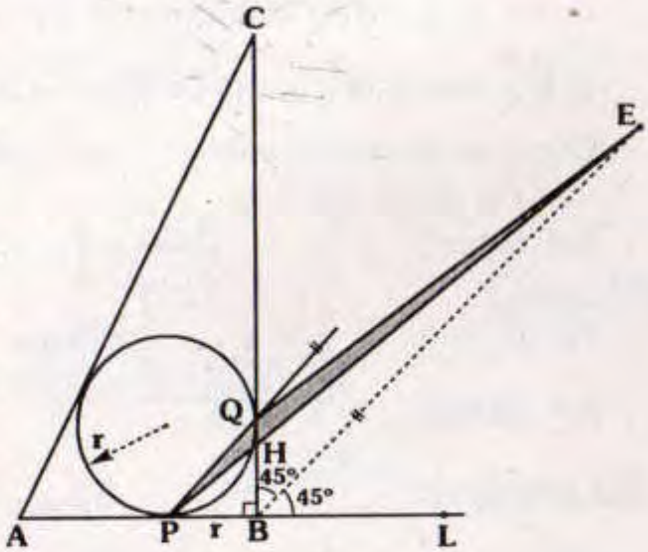
- Luego:

$$S_{\lozenge} = \frac{1}{8}\pi R^2 - \frac{R^2}{2}\text{sen}45°$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\lozenge} = \frac{5}{8}(\pi - 2\sqrt{2})}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 283**




Nos piden $S_{\Delta PQE}$

- Como E es excentro, entonces

$$m\measuredangle LBE = m\measuredangle EBC = 45°$$

$$\Rightarrow\ \overline{BE} \parallel \overline{PQ}$$

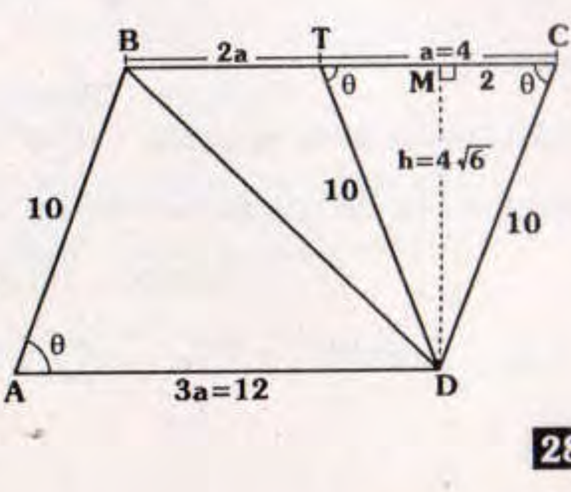
- Por propiedad:

$$S_{\Delta QHE} = S_{\Delta PBH} \Rightarrow S_{\Delta PQE} = S_{\Delta PBQ}$$

$$\therefore\ \mathbf{S_{\Delta PQE} = \frac{r^2}{2}}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 284**

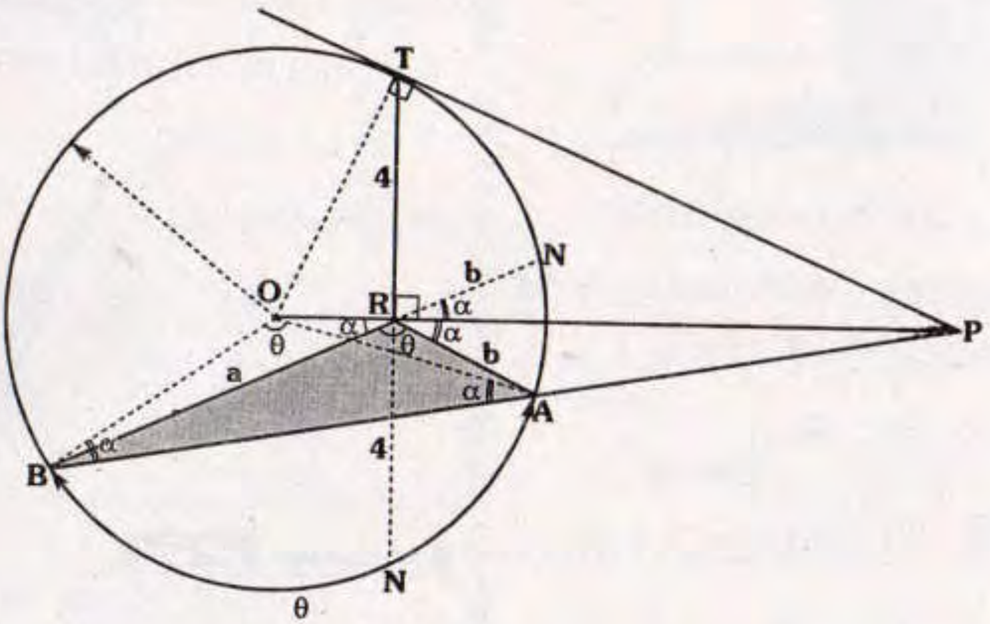


Nos piden $S_{\square ABCD}$

- Como el ⏢ABTD es bicéntrico, entonces es inscriptible y circunscriptible, luego al ser inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle BAD = m\measuredangle DTC \Rightarrow \Delta TDC$ es isósceles
- Como es circunscriptible $\Rightarrow \quad AD+BT=AB+TD \quad ...(I)$
- Del dato: $\dfrac{S_{\Delta TCD}}{S_{\Delta ABD}}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow AD=3\underbrace{(TC)}_{a}$ ($S_{\Delta ABD} \to S_{\Delta BCD}$)
- En (I): $a=4$
- En ⊿DMC: $h=4\sqrt{6}$
- Finalmente: $\mathbf{S_{\square ABCD}=48\sqrt{6}}$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 285**




Piden $S_{\Delta ARB}$

- Por teorema de la tangente: $(PT)^2 = (PA)(PB)$
- Por teorema de relaciones métricas, en el ⊿OTP: $(PT)^2 = (PR)(PO)$

$\Rightarrow (PA)(PB) = (PR)(PO) \Rightarrow$ ⏢BORA es inscriptible

- Luego: $m\measuredangle BRA = \theta \Rightarrow S_{\Delta ARB} = \dfrac{ab}{2}\operatorname{sen}\theta \quad ...(I)$

- Como ⊿BORA es inscriptible, entonces

$$m\measuredangle BRO = m\measuredangle ARP = \alpha$$

$$\Rightarrow \quad AR = RN$$

- Por teorema de las cuerdas:

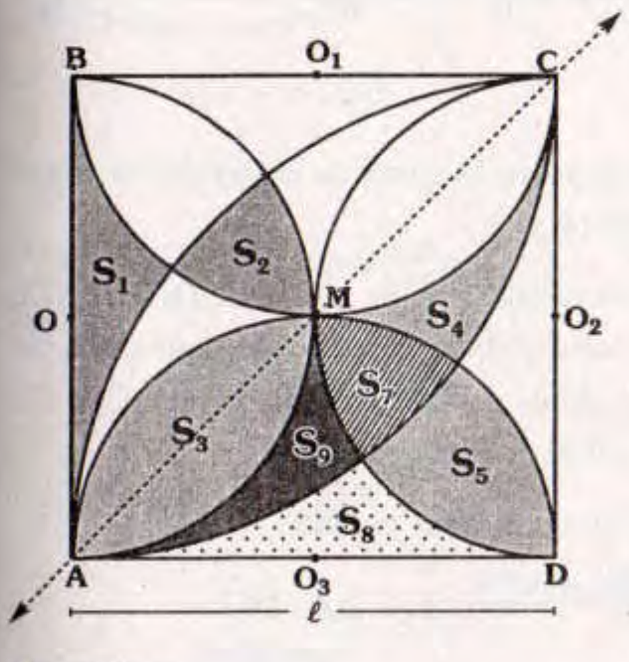
$$ab = (4)(4)$$

- En (I):

$$\mathbf{S_{\Delta ARB} = 8sen\theta}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 286**




Nos piden:

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$$

- Notemos que la recta AC es el eje de simetría y M es centro, entonces:

$$S_2=S_7 \ ; \quad S_8=S_1$$

- Es también claro que las regiones de áreas $S_9$ y $S_4$ son congruentes (simétricos respecto de $\overleftrightarrow{BD}$)

$$\Rightarrow \ S_9=S_4$$

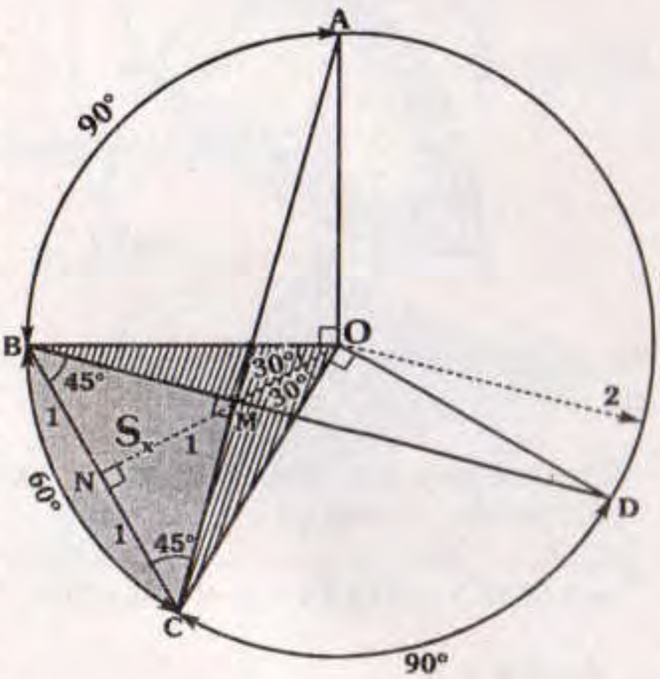
- Luego concluímos:

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=A_{\triangle}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=\frac{\pi\ell^2}{8}}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 287**




Nos piden $S_x$

- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle CBD = m\measuredangle BCA = 45°$$

$\Rightarrow \Delta BMC$ : isósceles

- ⊿ONC: notable de 30° $\Rightarrow ON=\sqrt{3}$
- ⊿BMC: notable de 45° $\Rightarrow MN=1$

$\Big\}\ OM=\sqrt{3}-1$

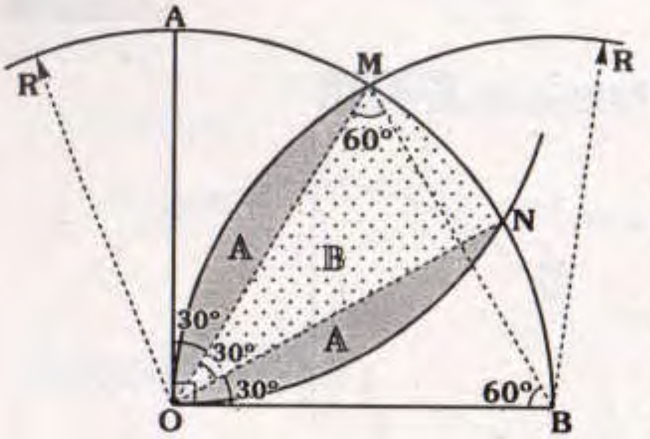
- $$S_x = S_{\triangle BOC} - S_{\measuredangle BOCM}$$

$$S_x = \frac{1}{6}\pi(2)^2 - \frac{(2)(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = \frac{1}{3}(2\pi + 3 - 3\sqrt{3})}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 288**




Nos piden el área de la región sombreada $(S_x)$

- Notemos que los $\Delta$s OMB y AON son equiláteros, entonces:

$$m\measuredangle AOM = m\measuredangle MON = m\measuredangle NOB = 30°$$

- $S_x = 2\mathbb{A} + \mathbb{B}$
- Hallemos por partes:

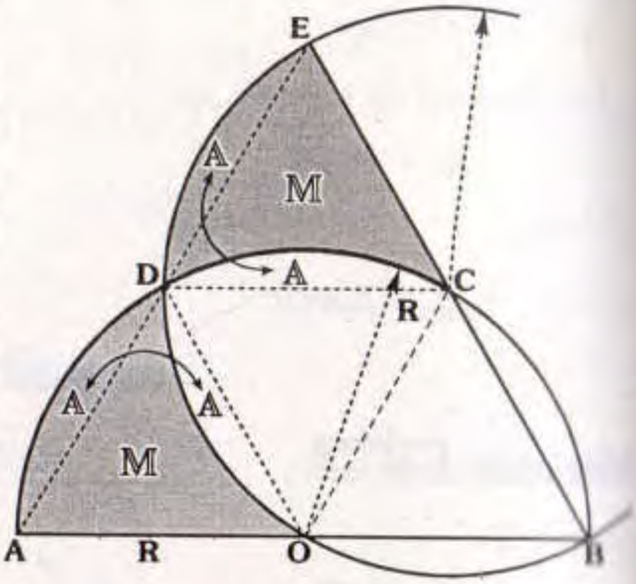
$$\mathbb{B} = \frac{1}{12}\pi R^2$$

$$\mathbb{A} = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = \frac{R^2}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 289**




Nos piden la suma de áreas de las regiones $(\mathbb{A}_p)$.

- Notemos que los $\Delta$s AOD, DOC y ECD son equiláteros, luego los segmentos circulares cuyas cuerdas son AD, CD, OD y ED son congruentes.
- Luego el área pedida:

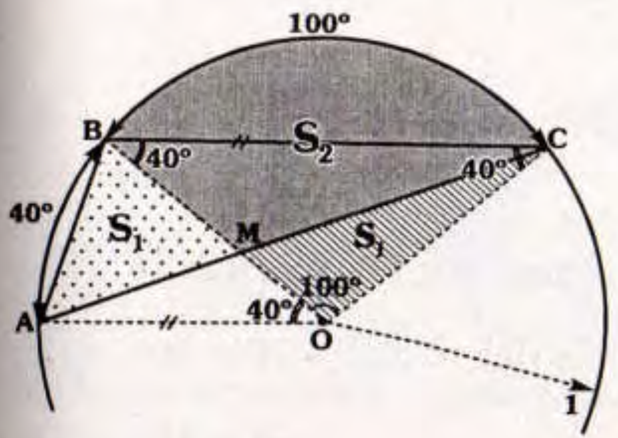
$$\mathbb{A}_p = 2(\mathbb{A} + \mathbb{M})$$

$$\mathbb{A}_p = 2.\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\mathbb{A}_p = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 290**




Nos piden $S_1 + S_2$

- Notemos :

$$m\sphericalangle AOB = m\sphericalangle OBC = 40°$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AO} // \overline{BC}$$

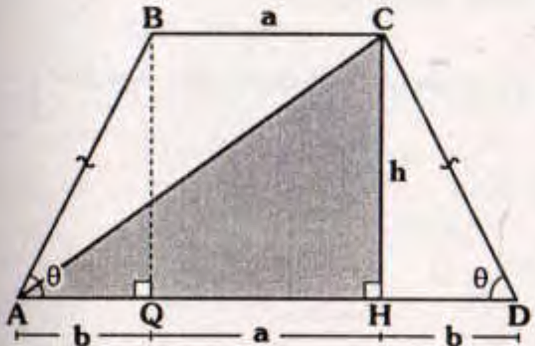
- Luego notemos $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta OMC} = S_1$

$$\Rightarrow \quad S_1 + S_2 = \frac{100°}{360°}\pi(1)^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_1 + S_2 = \frac{5}{18}\pi}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 291**




Nos piden $S_{\square ABCD}$

Dato $S_{\triangle ACH} = 12$

- Como ABCD es un trapecio isósceles ⇒ AQ=HD

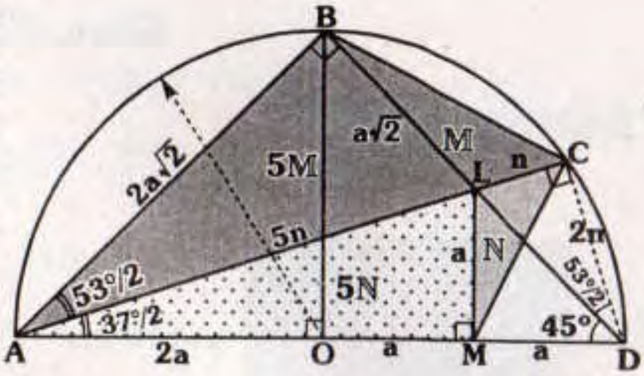
- $$S_{\square ABCD} = \frac{(2b+a+a)}{2}h = (a+b)h$$

- $$S_{\triangle ACH} = \frac{(a+b)h}{2} = 12$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_{\square ABCD} = 24}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 292**




Nos piden: $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MLC}}$

- Notemos: $m\sphericalangle LAM = \dfrac{37°}{2}$ y

$$m\sphericalangle BAL = \frac{53°}{2}$$

- $\triangle$LCD: notable de $\dfrac{53°}{2}$

$$\Rightarrow CD = 2n \quad y \quad LC = n$$

• ⊿ACD: notable de $\frac{37°}{2}$

$$\Rightarrow AC=6n \Rightarrow AL=5n$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MLC}}=\frac{6M}{N}$$

• En el cuadrilátero ABLM:

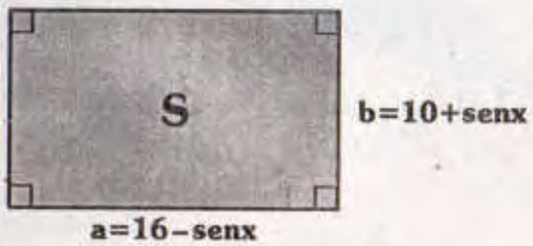
$$\frac{5M}{5N}=\frac{2a\sqrt{2}\,a\sqrt{2}}{3aa}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{N}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MLC}}=8$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 293**




Sea "S" el área de la región rectangular.

Nos piden "S" máximo

• Se sabe que S=ab

**1er método:**

• Usando: $\underbrace{(a+b)^2}_{26}-(a-b)^2=4ab \quad ...(I)$

• Si queremos ab → máximo, entonces $(a-b)^2$ debe ser mínimo

• Como a–b=6–2senx

debido a que: $-1\leq \text{senx}\leq 1$

$$\Rightarrow 4\leq 6-2\text{senx}\leq 8$$

$$\Rightarrow 16\leq (6-2\text{senx})^2\leq 64$$

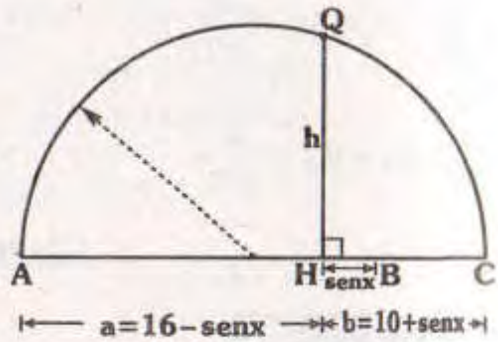
• Luego: $(a-b)^2$ mínimo es 16

• En (I): $(26)^2-16=4ab$

$$\therefore \mathbf{ab=165}$$

**2do método:**

Como se quiere que "ab" sea máximo, usemos relaciones métricas, no perdiendo de vista que $-1\leq \text{senx}\leq 1$ ,analicemos desde el siguiente gráfico, sea AB=16 y BC=10




Se sabe que $h^2=ab$

el "h" máximo es cuando: senx=1

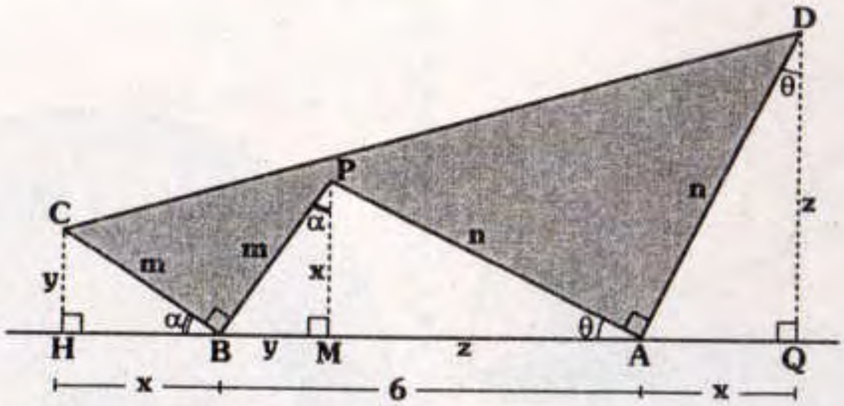
$$\Rightarrow a=15 \quad y \quad b=11$$

$$\Rightarrow ab=(15)(11)$$

$$\therefore S_{máximo}=165$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN Nº 294**




Sea $S_x$ el área de la región sombreada.

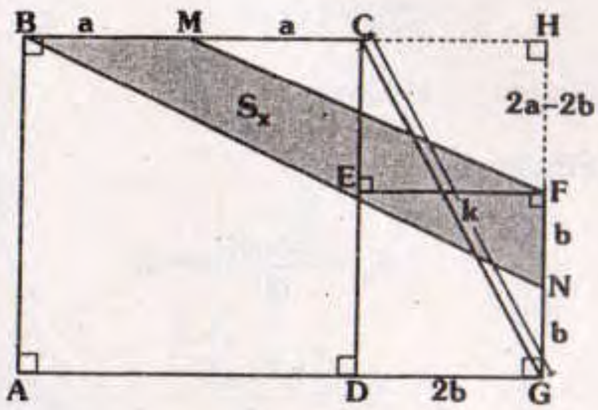
- Notemos:
- $\triangle CHB \cong \triangle BMP \Rightarrow CH=BM=y \quad ; \quad HB=MP=x$
- $\triangle AMP \cong \triangle DQA \Rightarrow MP=AQ=x \quad ; \quad MA=DQ=z$
- Del gráfico: $y + z = 6$
- Luego: $S_x = S_{(CHQD)} - S_{\triangle BHC} - S_{\triangle AQD} - S_{\triangle BPA}$

$$\Rightarrow S_x = \frac{(y+z)}{2}(6+2x) - \frac{xy}{2} - \frac{6x}{2} - \frac{xz}{2}$$

$$\therefore \mathbf{S_x = 18}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN Nº 295**




Nos piden $S_x$

Dato: $CG=k$

- $\triangle CDG$: $4(a^2+b^2)=k^2 \quad \ldots(I)$
- $S_x = S_{\triangle BHN} - S_{\triangle MHF}$

$$\Rightarrow S_x = \frac{(2a+2b)(2a-b)}{2} - \frac{(a+2b)(2a-2b)}{2}$$

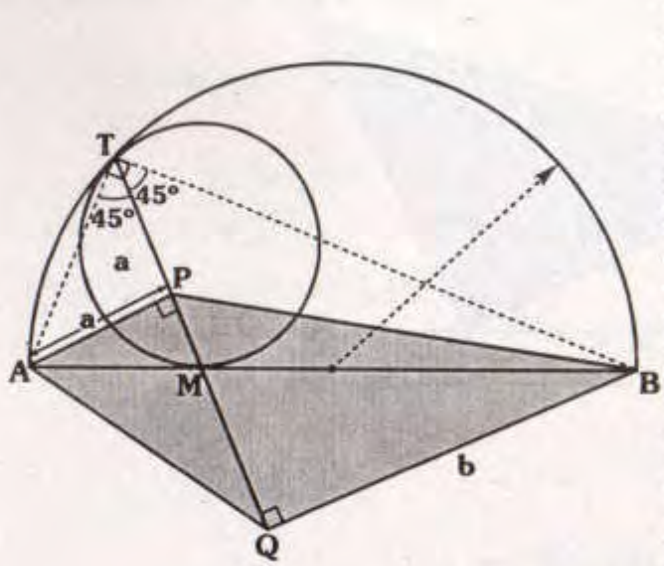
$$\Rightarrow S_x = (a+b)(2a-b) - (a-b)(a+2b)$$

$$S_x = a^2 + b^2$$

$$\therefore \mathbf{S_x = \frac{k^2}{4}}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 296




Nos piden el área de la región sombreada ($S_x$)

- Notemos que APBQ es un trapecio.
- Por propiedad de circunferencia:

$$m\sphericalangle ATM = m\sphericalangle MTB = 45°$$

- ⊿APT y ⊿TQB: notable de 45°

$$\Rightarrow \quad AP=PT=a \quad y$$

$$QB=TQ=b$$

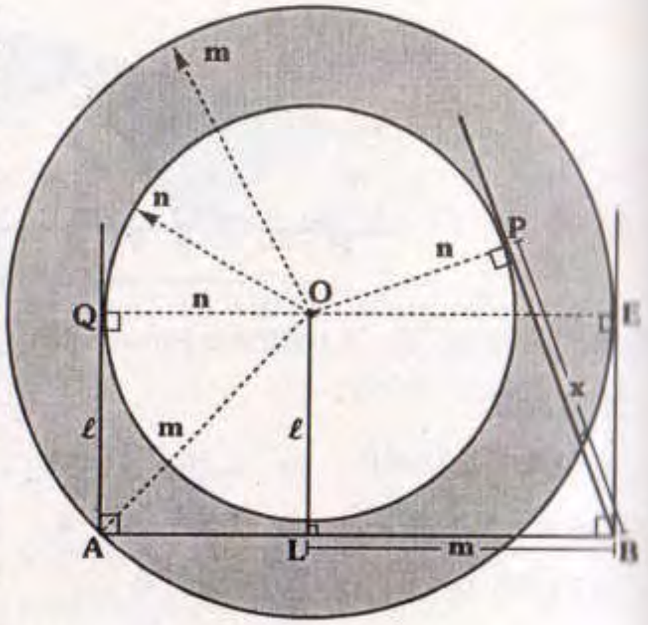
- Luego $\quad PQ=b-a$
- Finalmente:

$$S_x = \frac{(b+a)}{2}(b-a)$$

$$\therefore \quad \mathbf{S_x = \frac{b^2 - a^2}{2}}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 297




Nos piden x

Dato: $\mathbb{A}_{\text{(corona circular)}} = \pi a^2$

$$\Rightarrow \pi(m^2 - n^2) = \pi\ell^2 = \pi a^2$$

$$\Rightarrow \; m^2 - n^2 = \ell^2 = a^2$$

- En ⏢OLBP:

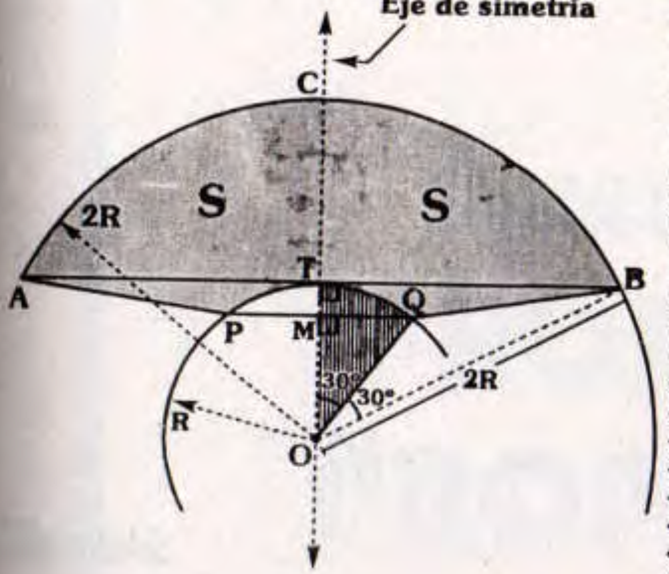
$$x^2 + n^2 = \ell^2 + m^2$$

$$\Rightarrow \; x^2 = \ell^2 + \underbrace{m^2 - n^2}_{a^2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = a\sqrt{2}}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN Nº 298**




Nos piden el área de la región sombreada ($\mathbb{A}_T$)

- Del gráfico: $\mathbb{A}_T = 2S$

- $S = \mathbb{A}_{\triangle BOC} - \mathbb{A}_{\triangle TOQ} - \mathbb{A}_{\Delta QOB}$

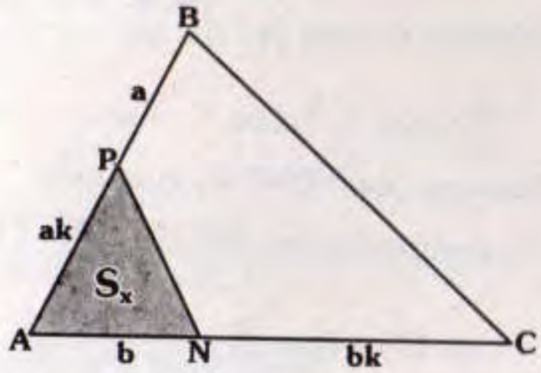
$\Rightarrow S = \frac{1}{6}\pi(2R)^2 - \frac{1}{12}\pi R^2 - \frac{R2R}{2}\text{sen}30°$

$\Rightarrow S = \frac{7}{12}\pi R^2 - \frac{R^2}{2}$

$$\therefore \; \mathbb{A}_T = \frac{R^2}{6}(7\pi - 6)$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN Nº 299**




Nos piden $S_x$

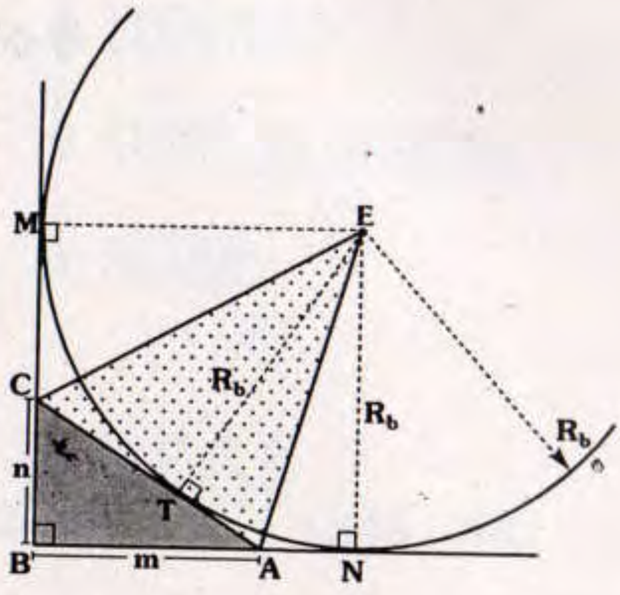
- Por teorema de razón de áreas:

$$\frac{S_x}{\underbrace{S_{\Delta ABC}}_{S}} = \frac{bak}{a(k+1)b(k+1)}$$

$$\therefore \; S_x = \frac{k}{(k+1)^2}S$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN Nº 300**



Nos piden $S_{\triangle ABCE}$;

Dato $m+n=a$ y $AC=b$

- Hallemos el área pedida por partes:

$$S_{\triangle ABCE} = S_{\triangle ABC} + S_{\Delta EAC} \quad ...(I)$$

- Notemos que NBME es cuadrado.
- BN: semiperímetro de ABC (p).

$$\Rightarrow BN = R_b = \frac{m+n+b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

- $$S_{\Delta EAC} = \frac{bR_b}{2} = \frac{b(a+b)}{4} \quad ...(II)$$

- $$S_{\triangle ABC} = R_b(p-b)$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{(a+b)}{2}\left(\frac{a+b}{2} - b\right)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2+b^2}{2} \quad ...(III)$$

- De (II) y (III):

$$S_{\triangle ABCE} = \frac{b(a+b)}{4} + \frac{a^2-b^2}{4}$$

$$\therefore \; \mathbf{S_{\triangle ABCE} = \frac{a(a+b)}{4}}$$

**Clave A**

❖❖❖❖❖

# Geometría

## ENUNCIADO DE LOS

# PROBLEMAS PROPUESTOS

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

# ÁREAS

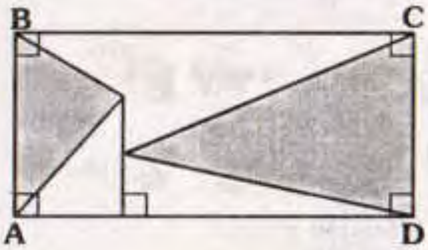
## DE REGIONES PLANAS

# Problemas Propuestos
## Ciclo Anual

### ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

**PROBLEMA Nº1**

En el gráfico, AB=4 y BC=6. Calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.




A) 8 B) 10 C) 12

D) 14 E) 16

**PROBLEMA Nº2**

En el gráfico, T es punto de tangencia y OT=6. Calcule el área de la región sombreada.

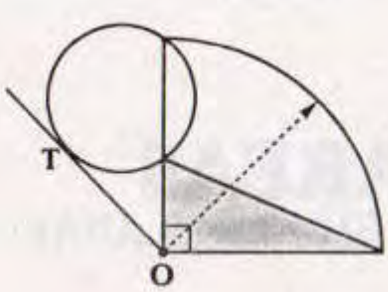
A) 18

B) 9

C) 36

D) 20

E) 48




**PROBLEMA Nº3**

Los lados de un triángulo miden 1, 2 y $\sqrt{7}$. Calcule el área de la región triangular.

A) $1.5\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{7}$

D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{6}$

**PROBLEMA Nº4**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, BH = 4, BC = 3 y CM = MD. Calcule el área de la región sombreada.

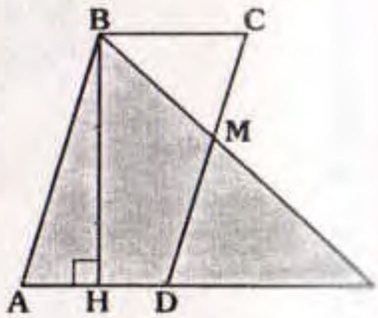
A) 12

B) 14

C) 15

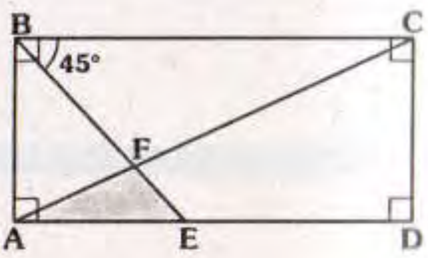
D) 16

E) 18




**PROBLEMA Nº5**

En el gráfico, AB = 3 y BC = 9. Calcule el área de la región AFE.



A) 1.25 B) 0.75 C) 1.325

D) 1.125 E) 1.75

**PROBLEMA Nº6**

Calcule el área de la región triangular ABC, si la mediatriz de AC interseca a BC en Q, además AB=QC=5 y BQ=2.

A) $2\sqrt{6}$ B) $5\sqrt{6}$ C) $8\sqrt{6}$

D) $7\sqrt{6}$ E) $9\sqrt{6}$

**PROBLEMA Nº7**

En el gráfico, el arco AB mide 90° y EF=2(ED), calcule el área de la región ABC.

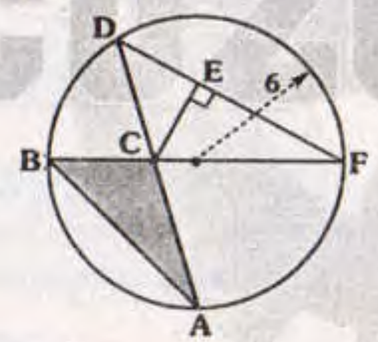
A) 10

B) 12

C) 14

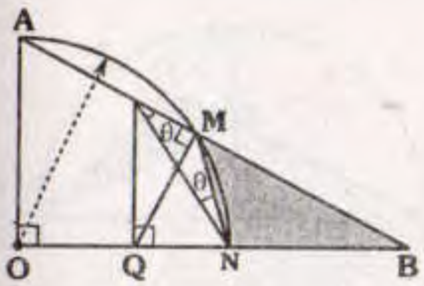
D) 16

E) 18




**PROBLEMA Nº8**

En el gráfico, QM = 6. Calcule el área de la región MNB.




A) $8\sqrt{2}$ B) $9\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{2}$

D) $16\sqrt{2}$ E) $18\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº9**

En el triángulo ABC, se cumple que m∢ABC=120°. En $\overline{AC}$ se ubica P y Q tal que el triángulo PBQ es equilátero (P en $\overline{AQ}$). Si (AP)(QC) = 8, calcule el área de la región triangular PBQ.

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

**PROBLEMA Nº10**

En el triángulo ABC: AB=9, BC=11 y AC=10. Calcule el área de la región triangular AIC, si "I" es el incentro del triángulo ABC.

A) 15 B) $6\sqrt{2}$ C) 12

D) $10\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº11**

En un triángulo PQR, la mediana $\overline{QM}$ interseca a la ceviana $\overline{PE}$ en "A". Si ER=2EQ y el área de la región triangular QAE es 2, calcule el área de la región triangular PQR.

A) 24 B) 22 C) 20 D) 18 E) 16

**PROBLEMA Nº12**

La base de un triángulo isósceles mide $\sqrt{2}$. Si las medianas relativas a los lados congruentes son perpendiculares, calcule el área de la región triangular.

A) 3 B) 3/2 C) 1/2

D) 2 E) 1

**PROBLEMA N°13**

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH, la bisectriz $\overline{BE}$ del ángulo ABH y la bisectriz del ángulo ACB se cortan en F, M es punto medio de BC, si las áreas de las regiones ABE y FHM son $6m^2$ y $11m^2$ respectivamente. Halle el área de la región ABC.

A) 50 B) 44 C) 40

D) 60 E) 55

**PROBLEMA N°14**

Si en la figura $\overline{MN}//\overline{AC}$, calcule $\frac{S_1}{S}-\frac{S}{S_2}$.

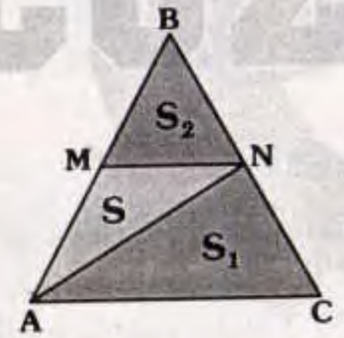
A) 0

B) 1/2

C) 1/3

D) 1

E) 2




**PROBLEMA N°15**

El área de la región limitada por un triángulo rectángulo es numéricamente igual a su perímetro. Además el doble de la longitud de un cateto es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. El valor del perímetro de dicho triángulo es:

A) 20 B) 24 C) 26

D) 30 E) 36

**PROBLEMA N°16**

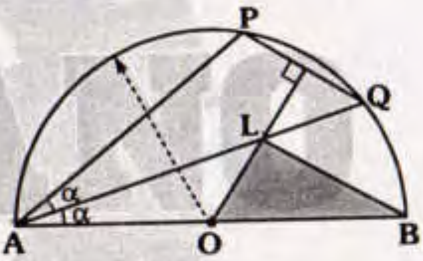
En un cuadrante AOC de centro O y radio $2\sqrt{5}$, se ubican los puntos M y P en $\overline{OC}$ y $\overset{\frown}{AC}$ respectivamente, de manera que OM=MC y m∢APM=90°. Calcule el área de la región triangular APM.

A) 3 B) 4 C) 6

D) 9 E) 12

**PROBLEMA N°17**

En el gráfico, AL=5 y LQ=4, calcule el área de la región sombreada.

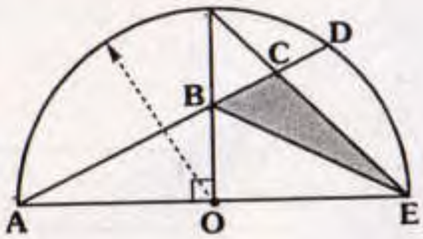



A) $15\sqrt{3}/2$ B) $15\sqrt{5}/2$ C) $15\sqrt{7}/4$

D) $15\sqrt{5}/4$ E) $15\sqrt{3}/4$

**PROBLEMA N°18**

En la figura, (AB)(CD)=16, calcule el área de la región sombreada.




A) 4 B) 6 C) 8

D) 12 E) 16

**PROBLEMA N°19**

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que la m∢ABD=90° y la m∢A=53°. Si AC=20, calcule el mayor valor posible del área de la región triangular DBC.

A) 10 B) 12 C) 20 D) 24 E) 36

**PROBLEMA N°20**

Se tiene un triángulo de áreas "S", al unir los puntos medios de sus lados se forma un triángulo de área "$S_1$". En este nuevo triángulo se unen los puntos medios de sus lados y se forma un triángulo de área "$S_2$". Si se repite este proceso indefinidamente, calcular: $S+S_1+S_2+...$

A) 2S B) $\frac{4}{3}S$ C) $\frac{2}{3}S$ D) 3S E) $\frac{8}{3}S$

## ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

**PROBLEMA N°21**

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ respectivamente. Si (AB)(EF)=20, calcule el área de la región sombreada.

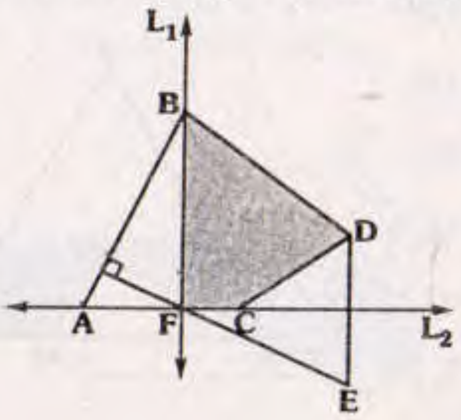
A) 20

B) 10

C) 15

D) 12

E) 18




**PROBLEMA N°22**

En el gráfico, PQSC es un cuadrado de centro O. Si AO= $2\sqrt{10}$. Calcule el área de la región sombreada.

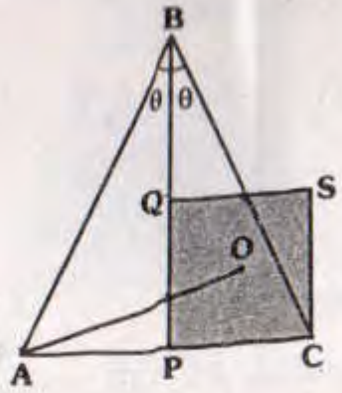
A) 4

B) 8

C) 12

D) 16

E) 20



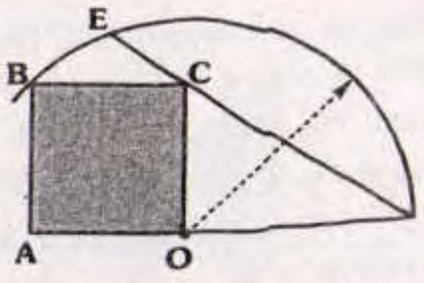

**PROBLEMA N°23**

En un cuadrado ABCD con centro en A y D se trazan los cuadrantes de radios AD, los cuales son secantes en M, si AB=2, calcule el área de la región ABMC

A) 3 B) 1 C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

**PROBLEMA N°24**

En el gráfico, ABCD y CE = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, calcule el área de la región sombreada.




A) 1 B) $\sqrt{3}/3$ C) 2

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{5}$

**PROBLEMA N°25**

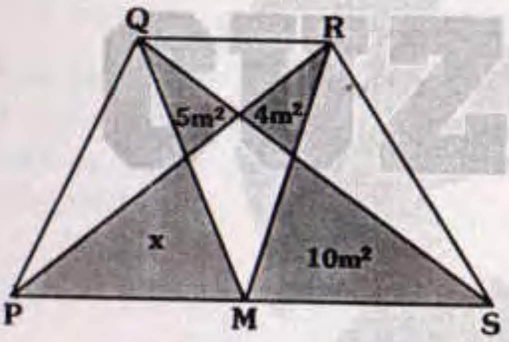
En un paralelogramo ABCD, se ubica Q y P en AD y BC respectivamente, si el triángulo APQ es equilátero, AQ=6 y QD=2. Calcule el área de la región paralelogramica.

A) $24\sqrt{3}$  B) $16\sqrt{3}$  C) $26\sqrt{3}$

D) $18\sqrt{3}$  E) $20\sqrt{3}$

**PROBLEMA N°26**

En el gráfico, $\overline{PS}//\overline{QR}$, calcule X, si M es punto medio de $\overline{PS}$.




A) 11m²  B) 9m²  C) 16m²

D) 1m²  E) 25/3m²

**PROBLEMA N°27**

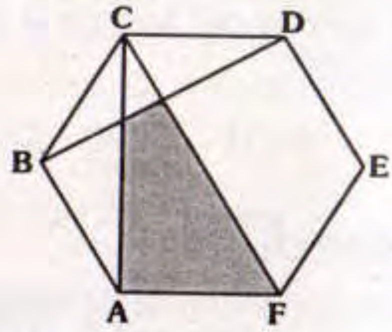
En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura BR, se ubica P en AB y Q en $\overline{BC}$ tal que APQR es un paralelogramo y $\overline{BR}$ corta a $\overline{PQ}$ en H. Si PH = 2 y HQ = 8. Calcule el área de la región APHR.

A) 98  B) 96  C) 92

D) 102  E) 104

**PROBLEMA N°28**

El área de la región hexagonal regular ABCDEF es 72m². Calcule el área de la región sombreada.




A) 20m²

B) 22m²

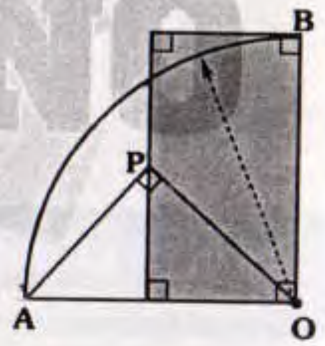
C) 24m²

D) 18m²

E) 16m²

**PROBLEMA N°29**

Si OP=6, halle el área de la región sombreada.




A) 18

B) 12

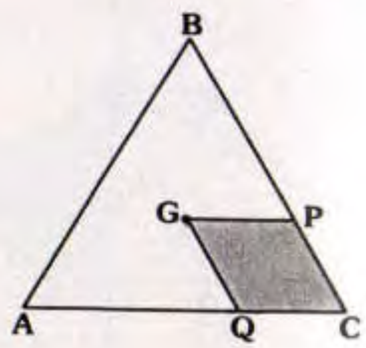
C) 36

D) 72

E) 64

**PROBLEMA N°30**

En el gráfico, G es baricentro del triángulo ABC y CQGP es un romboide, calcule la razón de áreas de las regiones ABC y CQGP.




A) 3/8

B) 9/2

C) 10/3

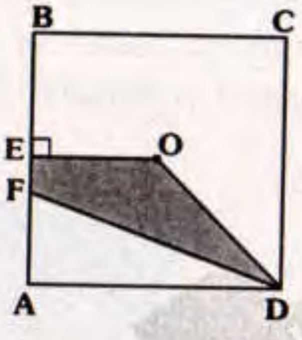
D) 4

E) 5

**PROBLEMA N°31**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O y el área de la región sombreada es 7.5 y EF=1. Calcule el área de la región ABCD.

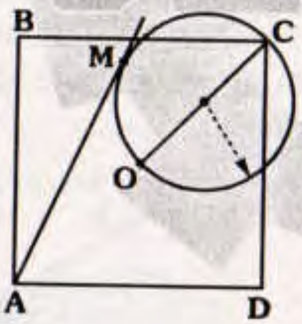
A) 25
B) 49
C) 64
D) 36
E) 81




**PROBLEMA N°32**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado de centro O, M es punto de tangencia y AM=4, calcule el área de la región cuadrada.

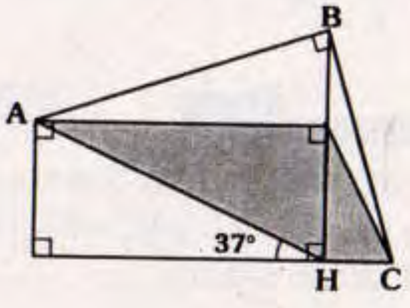
A) 8
B) 12
C) 16
D) 20
E) 18




**PROBLEMA N°33**

En el gráfico, AB= BC y CH=2. Calcule el área de la región sombreada.

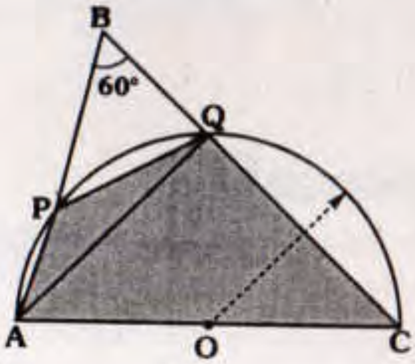
A) 25
B) 15
C) 35
D) 30
E) 20




**PROBLEMA N°34**

En el gráfico (PB)(AQ)=8, calcule el área de la región sombreada.

A) 4
B) 6
C) 8
D) $4\sqrt{3}$
E) $6\sqrt{3}$



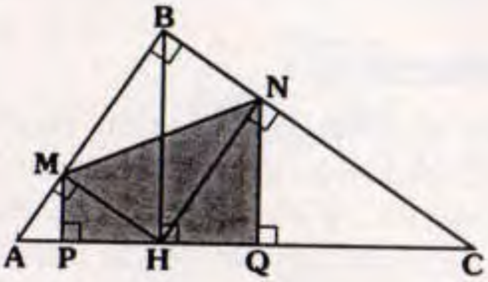

**PROBLEMA N°35**

Se tiene un rectángulo ABCD de centro O, se traza el cuadrante de centro A y radio AB, tal que contiene a O. Si AB=2, calcule el área de la región rectangular ABCD.

A) 4 B) 6 C) $2\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

**PROBLEMA N°36**

En el gráfico, (BH)(PQ)=18, calcule el área de la región PMNQ.




A) 9 B) 18 C) 12
D) 16 E) 10

**PROBLEMA N°37**

Halle la relación entre el área del cuadrado inscrito en un semicírculo y el área del cuadrado inscrito en el círculo entero.

A) 2/3 B) 2/5 C) 5/2
D) 3/2 E) 3/5

**PROBLEMA N°38**

Se da un triángulo rectángulo BAC cuyos catetos AB y AC miden 3m y 4m respectivamente. Se traza la altura $\overline{AH}$ y la circunferencia de diámetro AH que corta a AB en $B_1$ y AC en $C_1$. Por $B_1$ y $C_1$ se trazan las tangentes a la circunferencia que cortan a la hipotenusa BC en M y N. Determinar el área del cuadrilátero $B_1MNC_1$.

A) $1m^2$ B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**PROBLEMA N°39**

En un trapecio ABCD la base mayor AB=20m, la base menor DC=10m y su altura es igual a 12m. Se traza la mediana EF(E en AD y F en BC), que corta a las diagonales AC y BD en P y N respectivamente. Calcule el área del triángulo DPB.

A) $10m^2$ B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

**PROBLEMA N°40**

Halle el área de la región romboidal ABCD sabiendo que las áreas de las regiones BMC y PMD miden 9 y $4u^2$ respectivamente siendo "M" la intersección de la diagonal BD y el segmento CP("P" en $\overline{AD}$)

A) $18u^2$ B) 20 C) 30 D) 36 E) 28

## ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

**PROBLEMA N°41**

En el gráfico, calcule el área de la región sombreada y $AB=3\sqrt{3}$.

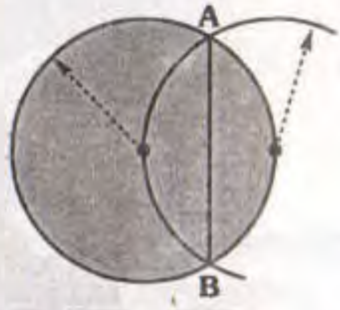
A) $15\pi$

B) $8\pi$

C) $6\pi$

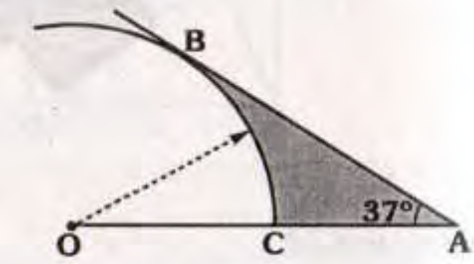
D) $12\pi$

E) $9\pi$




**PROBLEMA N°42**

En el gráfico, B es un punto de tangencia y AB+AC=6, calcule el área de la región sombreada.




A) $\pi$ B) $3+\pi$ C) $13.5-3.7\pi$

D) $\frac{27}{8}-3\pi$ E) $6-1,325\pi$

**PROBLEMA N°43**

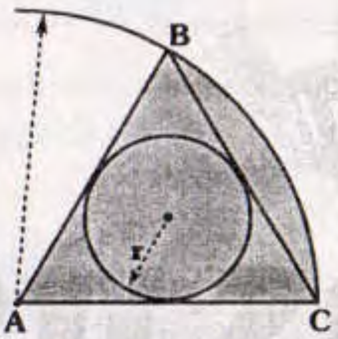
En el triángulo ABC (recto en B), se cumple que AB=16 y BC=63, calcule el área del círculo inscrito.

A) $49\pi$ B) $36\pi$ C) $50\pi$

D) $40\pi$ E) $25\pi$

**PROBLEMA N°44**

En el gráfico, la circunferencia de radio r, está inscrita en el triángulo ABC, si AB=BC y $r=\sqrt{3}$. Calcule el área de la región sombreada.




A) $2\pi$

B) $6\pi$

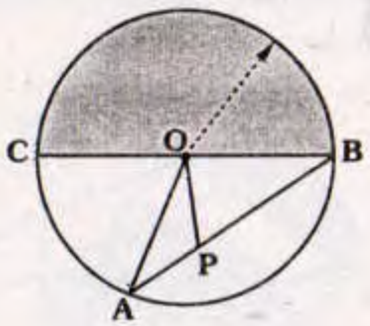
C) $5\pi$

D) $4\pi$

E) $2.5\pi$

**PROBLEMA N°45**

En el gráfico, se cumple que $m\widehat{AC}=2(m\measuredangle AOP)$ y (AP)(AB)=36. Calcule el área de la región sombreada.




A) $36\pi$

B) $18\pi$

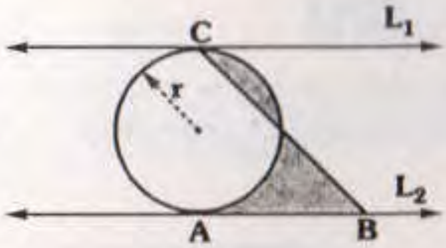
C) $50\pi$

D) $40\pi$

E) $25\pi$

**PROBLEMA N°46**

En el gráfico, A y C son puntos de tangencia, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y las regiones sombreadas son equivalentes, calcule AB/r

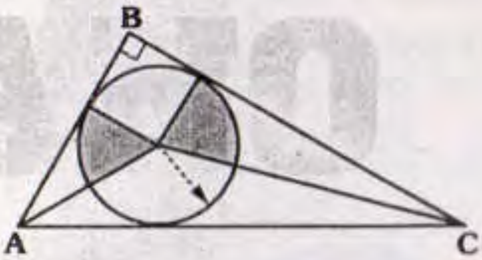



A) $\pi$ B) $\pi/2$ C) $1/\pi$

D) $27\pi/8$ E) $\pi/3$

**PROBLEMA N°47**

En el gráfico, la circunferencia está inscrita en el triángulo ABC, si los catetos miden 5 y 12. Calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.

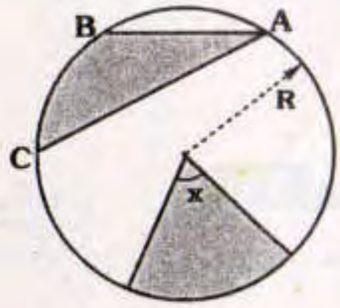



A) $\pi$ B) $\pi/2$ C) $1.5\pi$

D) $2\pi$ E) $\pi/3$

**PROBLEMA N°48**

En el gráfico, AB=R, $AC=R\sqrt{3}$ y las regiones sombreadas son equivalentes. Calcule x.




A) 60°

B) 90°

C) 120°

D) 75°

E) 53°

**PROBLEMA Nº49**

Si el lado del cuadrado mide 4cm, halle el área de la región sombreada.

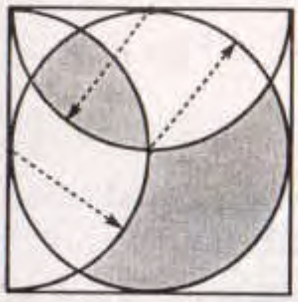
A) $\pi$

B) $2\pi$

C) $3\pi$

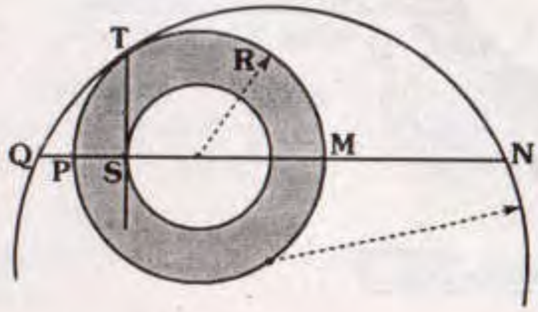
D) $\pi/2$

E) $3\pi/2$



**PROBLEMA Nº50**

En el gráfico, el área de la corona circular sombreada es de $12\pi m^2$, S y T son puntos de tangencia y R=4m. Calcule MN-QP.



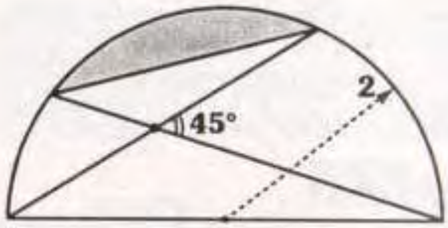

A) 2m B) 4m

C) $4(\sqrt{13}-1)$m D) $2(\sqrt{13}-1)$m

E) $4\sqrt{13}$

**PROBLEMA Nº51**

Calcule el área de la región sombreada.




A) $(\pi-1)/2$ B) $(\pi-2)/2$ C) $\pi-2$

D) $\pi-1$ E) $(\pi-2)/3$

**PROBLEMA Nº52**

En el gráfico se muestran semicírculos. Si $S_1=4m^2$ y $S_2=1m^2$. Calcule "$S_3$"

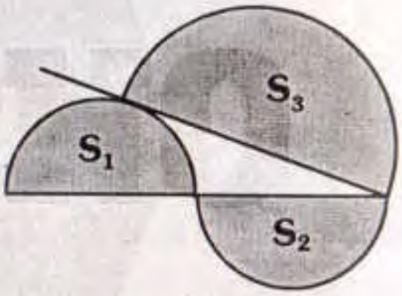
A) $1{,}5m^2$

B) $3m^2$

C) $4m^2$

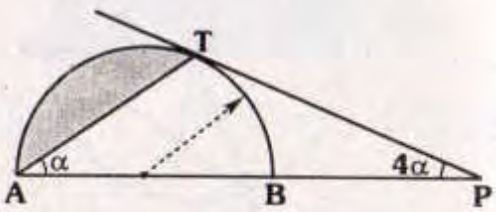
D) $6m^2$

E) $8m^2$




**PROBLEMA Nº53**

Si AB= $4\sqrt{3}$m, calcule el área del segmento circular.



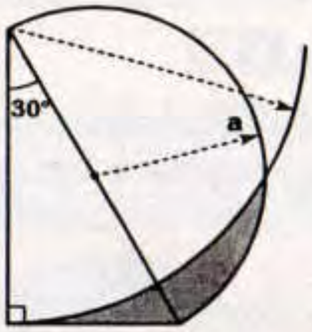

A) $(5\pi-3)m^2$ B) $(5\pi+5)m^2$

C) $(3\pi+5)m^2$ D) $(3\pi-5)m^2$

E) $6m^2$

**PROBLEMA Nº54**

Calcule el área de la región sombreada.



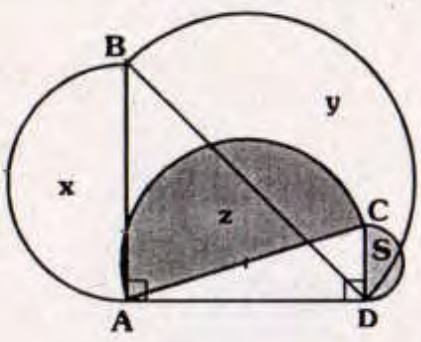

A) $\frac{a^2}{12}[9\sqrt{3}-4\pi]$ B) $\frac{a^2}{12}[9\sqrt{3}-2\pi]$

C) $\frac{a^2}{6}[9\sqrt{3}-4\pi]$ D) $\frac{a^2}{6}[9\sqrt{3}-2\pi]$

E) $\frac{a^2}{12}[9\sqrt{3}-5\pi]$

**PROBLEMA Nº55**

Calcule el valor del área del semicírculo "S", si; las áreas de los demás semicírculos son: x, y, z.

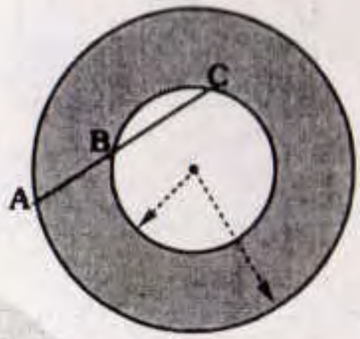



A) z+x-y B) y-z C) x-z

D) y+x-z E) y-x

**PROBLEMA Nº56**

En el gráfico, AB=BC=2, calcule el área de la región sombreada.

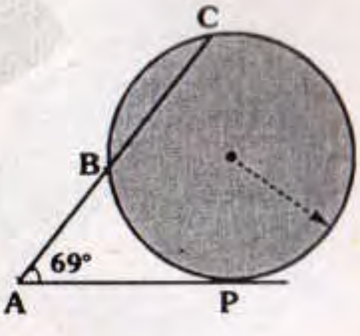



A) $4\pi$ B) $6\pi$ C) $8\pi$

D) $10\pi$ E) $12\pi$

**PROBLEMA Nº57**

En el gráfico, P es punto de tangencia. Si BC = 6u y $m\widehat{PB}=m\widehat{BC}$. Calcule el área de la región sombreada.

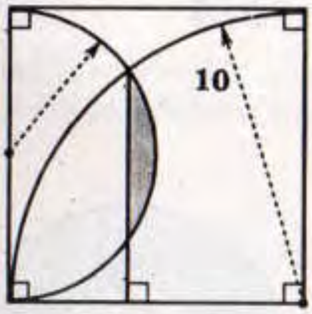



A) $18\pi$ B) $9\pi$ C) $12\pi$

D) $36\pi$ E) $25\pi$

**PROBLEMA Nº58**

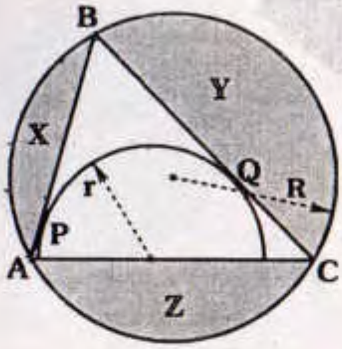
En el gráfico, halle el área de la región sombreada.




A) $\frac{185\pi}{9}-12$
B) $\frac{187\pi}{9}-12$
C) $\frac{212\pi}{9}-10$
D) $\frac{159\pi}{9}-10$
E) $\frac{135\pi}{37}-12$

**PROBLEMA Nº59**

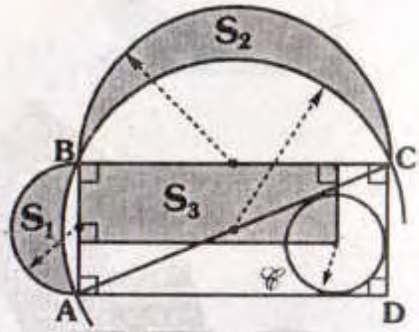
En el gráfico, $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ y $\mathbb{Z}$ son las áreas de las regiones sombreadas. Si AB + BC= $10\pi$, $\mathbb{X}+\mathbb{Y}+\mathbb{Z}=16\pi$ y r=4. Calcule R(P y Q son puntos de tangencia)




A) 3
B) 4
C) 8
D) 6
E) 12

**PROBLEMA Nº60**

$\mathscr{C}$ es la circunferencia inscrita en el triángulo ADC . Indique la relación correcta.




A) $2S_3=S_1+S_2$
B) $S_3=S_1+S_2$
C) $S_3^2=S_1S_2$
D) $S_3^2=S_1^2+S_2^2$
E) $S_3=\frac{S_1+S_2}{4}$

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

**PROBLEMA N°61** 3° Seminario

En un triángulo ABC(recto en B). Si AB=5u, BC=12u. Se inscribe una circunferencia tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en D, E y F respectivamente. Halle el área de la región triangular DEF.

A) $\frac{58}{11}$ B) $\frac{60}{13}$ C) $\frac{64}{13}$

D) 5 E) 6

**PROBLEMA N°62** Seminario

En la figura: $\overline{EF}//\overline{BC}$, AE=3(EC), 3(BE)=2(ED) y $A_{(\Delta EKF)}=5u^2$, calcule $A_{(\Delta AEK)}$.

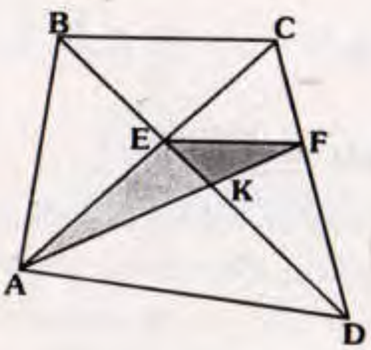
A) 10

B) 15

C) 20

D) 25

E) 30




**PROBLEMA N°63**

EBF es un triángulo en donde la proyección de $\overline{EB}$ sobre $\overline{EF}$ es 4 veces la proyección de $\overline{BF}$ sobre $\overline{EF}$. C es un punto de $\overline{EF}$ tal que 2(EC)=3(CF) A es un punto en la prolongación de $\overline{BE}$ tal que EB=2(AE). Si el área de ABTC es 11u² siendo T la proyección de B sobre $\overline{EF}$, calcule el área de AEC en u².

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

**PROBLEMA N°64**

En la figura, BC=3(BG); DC=2(AD) y $A_{(\Delta IGB)}=5u^2$, halle $A_{(\Delta ADI)}$.

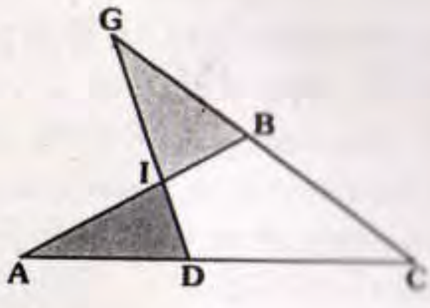
A) 5

B) 8

C) 10

D) 13

E) 15




**PROBLEMA N°65**

Calcule el área de una región triangular, si el producto de sus alturas es "k" y el circunradio es R.

A) $\sqrt{\dfrac{KR}{2}}$ B) $\dfrac{\sqrt{KR}}{3}$ C) $\sqrt[3]{K^2R^2}$

D) $\sqrt{2KR}$ E) K/R

**PROBLEMA N°66**

Halle el área de la región triangular ABC determinada en el exterior del cuadrado ACHF, si $m\measuredangle ABC=90°$ y $(S_{\Delta AFB})(S_{\Delta BHC})=25$

A) 5 B) 25 C) 10 D) 15 E) 20

**PROBLEMA N°67**

Hallar el área del triángulo, sabiendo que las longitudes de sus alturas son 12u, 15u y 20u.

A) $90u^2$ B) $120u^2$ C) $150u^2$

D) $180u^2$ E) $210u^2$

**PROBLEMA N°68**

Dado el triángulo ABC, sobre los lados se construyen los paralelogramos ABDE y BCGF, se prolongan $\overline{ED}$ y $\overline{GF}$ hasta que se intersequen en P, la prolongación de $\overline{PB}$ corta a $\overline{AC}$ en L y se prolonga $\overline{BL}$ una longitud LR=PB, luego por los vértices A y C se trazan paralelas a $\overline{LR}$, determinandose el paralelogramo ACQM. (AM=LR=CQ).
Demostrar que $S_{ACQM}=S_{AEDB}+S_{BFGC}$

**PROBLEMA N°69**

Sea $r_a$ la longitud del radio de la circunferencia exinscrita a un triángulo equilátero ABC. Halle el área de la región triangular ABC.

A) $\dfrac{r_a^2}{2}$ B) $\dfrac{r_a^2\sqrt{3}}{3}$ C) $r_a^2$

D) $r_a^2\sqrt{3}$ E) $2r_a^2\sqrt{3}$

**PROBLEMA N°70**

En un triángulo ABC, **r** es el radio de la circunferencia inscrita de centro I, $r_a$ es el radio de la circunferencia exinscrita relativa al lado BC y centro E. Sean F y Q los puntos de tangencia de las circunferencias con $\overline{AC}$; BC = a. Halle el área de la región IFQE.

A) $\dfrac{r^2r_a}{a}$ B) $a(r_a - r)$ C) $a\sqrt{r_a r}$

D) $(r+r_a)\dfrac{a}{2}$ E) $\dfrac{a^2r_a}{r}$

**PROBLEMA N°71**

En un triángulo ABC, $m\measuredangle B=135°$, se traza la altura $\overline{BH}$, si AH=1u y HC=3u. Calcule el área de la región triangular ABC en $u^2$.

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{7}+1$ C) $\sqrt{7}-1$

D) $2\sqrt{7}$ E) $2(\sqrt{7}-2)$

**PROBLEMA N°72**

Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recto en B), exteriormente sobre los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se construyen los triángulos equiláteros ABM y BCN respectivamen

te, si el área de la región triangular ABC es S, entonces el área de la región triangular MBN es:

A) $\frac{S}{5}$ B) $\frac{S}{4}$ C) $\frac{S}{3}$

D) $\frac{S}{2}$ E) $\frac{S}{8}$

**PROBLEMA N°73**

En la figura AOB es un cuadrante, M y F son puntos de tangencia, MF=1u y BM=2u. Calcule el área de la región triangular MOB en $u^2$.

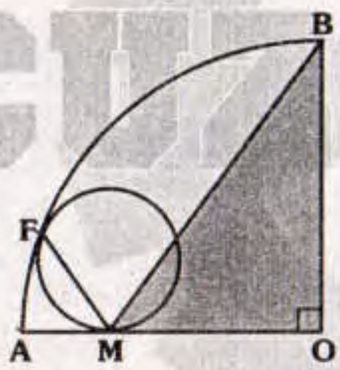
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}u^2$

B) $\sqrt{3}u^2$

C) $\sqrt{5}u^2$

D) $2u^2$

E) $\sqrt{6}u^2$




**PROBLEMA N°74**

En la figura, DP=m, FT=n. Halle el área de la región triangular ABC.

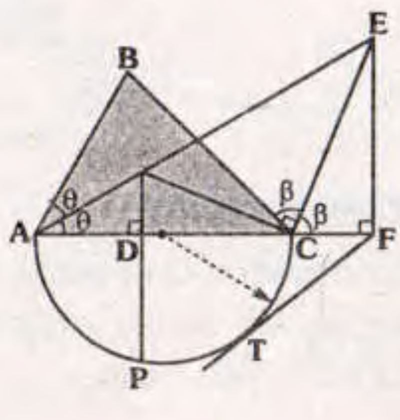
A) $n(m + n)$

B) $\frac{mn}{2}$

C) $2mn$

D) $m(m + n)$

E) $mn$




**PROBLEMA N°75**

El perímetro de un triángulo, cuyos lados son números consecutivos, es 21m. Calcular su área.

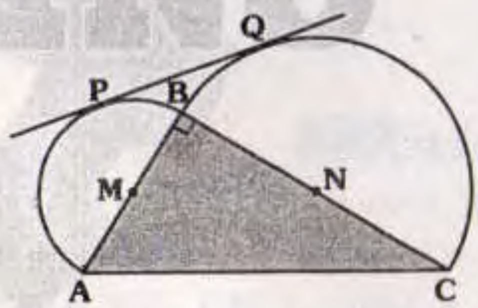
A) $\sqrt{21}m^2$ B) $\frac{21}{13}\sqrt{15}m^2$

C) $\frac{21}{4}\sqrt{15}m^2$ D) $20m^2$

E) $\frac{3}{4}\sqrt{21}m^2$

**PROBLEMA N°76**

M y N son centros; P y Q son puntos de tangencia. Si PQ=m, halle el área de la región ABC.




A) $m^2$ B) $\frac{m^2}{2}$ C) $2m^2$

D) $4m^2$ E) $\frac{m^2}{4}$

**PROBLEMA N°77**

En la región del triángulo ABC de $Su^2$ de área, H y J son los pies de las alturas trazadas desde A y C. Si $\overline{JK}$ ($K \in \overline{BC}$) es perpendicular a $\overline{BC}$ y CJ = a, JK = b; calcule el área de la región BHJ (en $u^2$).

A) $\dfrac{b^2S}{a^2+b^2}$ B) $\dfrac{b^2S}{a^2}$ C) $\dfrac{a^2S}{b^2}$

D) $\dfrac{a^2S}{a^2+b^2}$ E) $\dfrac{\sqrt{a}\,S}{\sqrt{a+b}}$

**PROBLEMA N°78**

Sea ABC un triángulo equilátero, E el excentro relativo al lado $\overline{BC}$; se trazan: $\overline{EM}\perp\overline{AC}$, $\overline{MJ}\perp\overline{BC}$, $\overline{JQ}\perp\overline{AB}$, $\overline{JQ}\cap\overline{EM}=\{P\}$. Halle la relación entre las áreas de las regiones triangulares JMP y ABC.

A) $\dfrac{3}{16}$ B) $\dfrac{4}{9}$ C) $\dfrac{3}{8}$

D) $\dfrac{1}{6}$ E) $\dfrac{1}{4}$

**PROBLEMA N°79**

En un triángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ en P. Las regiones PAQ, PBM y PCN son equivalentes y las regiones PAN, PQB y PMC tienen por áreas $S_1$, $S_2$ y $S_3$ respectivamente. Halle el área de la región PAQ.

A) $\sqrt[3]{S_1\times S_2\times S_3}$ B) $\sqrt[3]{\dfrac{S_1\times S_2\times S_3}{2}}$

C) $\sqrt[3]{\dfrac{S_1}{5}\times S_2\times S_3}$ D) $\sqrt[3]{\dfrac{S_1\times S_2\times S_3}{7}}$

E) $\sqrt[3]{\dfrac{S_1\times S_2\times S_3}{11}}$

**PROBLEMA N°80**

En un triángulo ABC se trazan las cevianas no concurrentes en el interior $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CF}$ tal que: PC=nAP, AF=nFB y BQ=nQC. Si el área de ABC es S. Halle el área de la región triangular que determinan las cevianas al intersectarse, dos a dos.

A) $\dfrac{(n-1)^2S}{n^2-n+1}$ B) $\dfrac{(n-1)^2S}{n^2+n+1}$

C) $\dfrac{(n+1)^2S}{n^2+n+1}$ D) $\dfrac{S}{n+1}$

E) $\left(\dfrac{n-1}{n^4+1}\right)S$

**PROBLEMA N°81**

En un triángulo ABC la relación de las longitudes del exradio y del circunradio es K. Si el área de ABC es S. Halle el área de la región triangular que se obtiene al unir los puntos de tangencia de las circunferencia ex-inscrita relativa a un lado.

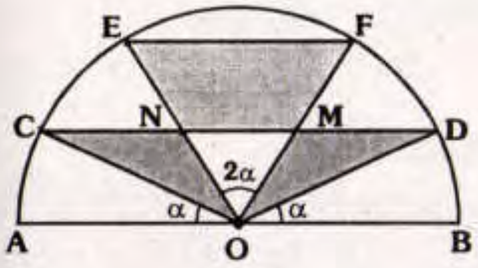
A) $\dfrac{KS}{3}$ B) $\dfrac{2KS}{3}$ C) $\dfrac{SK}{4}$

D) $\dfrac{SK}{2}$ E) $\dfrac{3SK}{2}$

**PROBLEMA N°82**

En el gráfico, O es punto medio del diámetro $\overline{AB}$ de la semicircunferencia, $\overline{EF}//\overline{CD}//\overline{AB}$. Halle:

$$\frac{\text{Área}_{EFMN}}{\text{Área}_{(CNO)}+\text{Área}_{(OMD)}}$$




A) 0,75 B) 1,00 C) 1,25

D) 1,50 E) 1,75

**PROBLEMA N°83**

En un triángulo acutángulo ABC, se consideran los puntos D, E y F en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$ pasan por el centro "O" de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, cuyo radio mide 4.

Calcule: $\frac{1}{AE}+\frac{1}{BF}+\frac{1}{CD}$

A) 1/5 B) 1 C) 1/2

D) 1/3 E) 4/5

**PROBLEMA N°84**

En un triángulo ABC recto en B, el área de la región ABC es $24u^2$, I es incentro de dicho triángulo, O es circuncentro y $m\measuredangle AIO=90°$. Hallar el área de la región AIO.

A) $4u^2$ B) $5u^2$ C) $6u^2$

D) $8u^2$ E) $9u^2$

**PROBLEMA N°85**

Sea el triángulo ABC cuya región triangular tiene $50m^2$ de área, cuyo inradio mide 2m y con un circunradio de 5m. Hallar el área de la región triangular MNP (M, N y P son puntos de tangencia de la circunferencia inscrita)

A) $10m^2$ B) $8m^2$ C) $12m^2$

D) $15m^2$ E) $9m^2$

**PROBLEMA N°86**

En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ intersecan a la altura en los puntos M y N, I es incentro. Si AB=6u y BC=8u. Hallar el área de la región triangular MNI.

A) $\frac{1}{15}u^2$ B) $\frac{1}{10}u^2$ C) $\frac{1}{3}u^2$

D) $\frac{1}{4}u^2$ E) $\frac{1}{5}u^2$

**PROBLEMA N°87**

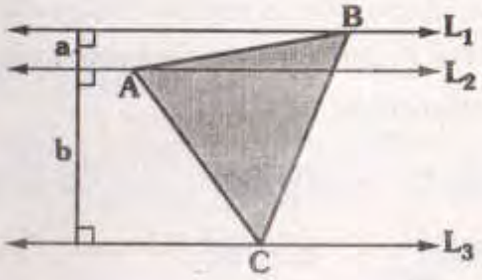
En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ que se intersecan en H; hallar el área del triángulo ABC si las áreas de los triángulos BHN, BHC y HMC son $6m^2$, $12m^2$ y $8m^2$ respectivamente.

A) $36m^2$ B) $40m^2$ C) $45m^2$

D) $50m^2$ E) $48m^2$

**PROBLEMA N°88**

En la figura $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$, hallar el área de la región triangular equilátera ABC.




A) $(a^2+b^2-3ab)\sqrt{3}$ B) $(a^2+b^2+ab)\frac{\sqrt{3}}{3}$

C) $(a^2+b^2+3ab)\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $(a^2+b^2+ab)$

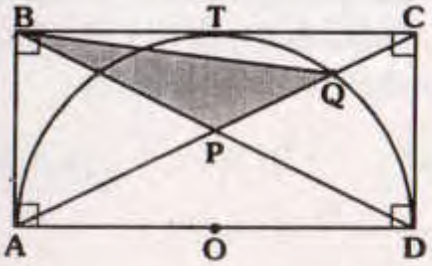
E) $(a^2+b^2)\frac{\sqrt{3}}{3}$

**PROBLEMA N°89**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, tal que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en O. Si $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$, demostrar que ABCD es inscriptible

**PROBLEMA N°90**

Halle el área de la región sombreada si O es centro y AB=a.




A) $5a^2$ B) $\frac{3a^2}{10}$ C) $3a^2$

D) $\frac{3}{5}a^2$ E) $\frac{a^2}{10}$

**PROBLEMA N°91**

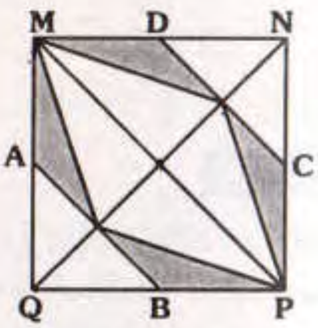
En un paralelogramo ABCD, se ubica M en $\overline{BC}$ y N en $\overline{CD}$ de modo que $m\sphericalangle AMN=90°$, MC=3, DN=NC, y AM=MN=4. Hallar el área de la región CMN.

A) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

D) $\sqrt{5}$ E $2\sqrt{5}$

**PROBLEMA N°92**

En el gráfico, A, B, C y D son puntos medios de los lados del cuadrado MQPN, cuyo lado mide $\ell$. Hallar la suma de áreas de las regiones sombreadas.




A) $\ell^2/2$ B) $\ell^2/16$ C) $\ell^2/4$

D) $\ell^2/5$ E) $\ell^2/6$

**PROBLEMA N°93**

Dado el pentágono regular ABCDE, su lado mide "a" unidades. Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en F. Halle el área de la región cuadrangular AFDE.

A) $\frac{a^2}{4}\sqrt{2\sqrt{5}-10}$ B) $a^2\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$

C) $\frac{a^2}{4}\sqrt{2\sqrt{5}+10}$ D) $\frac{a^2}{2}\sqrt{2\sqrt{5}-10}$

E) $\frac{a^2}{4}\sqrt{\sqrt{5}+1}$

**PROBLEMA N°94**

Las diagonales de un trapezoide miden 26cm y 30cm y el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos mide 14cm. Halle el área de la región trapezoidal.

A) $84cm^2$ B) $168cm^2$ C) $186cm^2$

D) $336cm^2$ E) $363cm^2$

**PROBLEMA N°95**

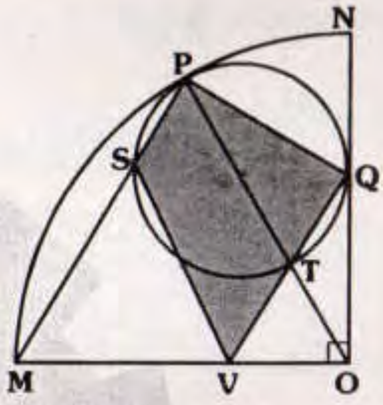
En un cuadrilátero convexo ABCD, AC=m y BD=n. Halle el área de la mayor región que limita el cuadrilátero.

A) $\frac{mn}{4}$ B) mn C) $\frac{mn}{2}$

D) 2mn E) $m^2 + n^2$

**PROBLEMA N°96**

En la figura mostrada se tiene el cuadrante MON, P y Q son puntos de tangencia. Si MS=2(SP) y r es la longitud del radio de la circunferencia. Halle el área de la región PQVS.

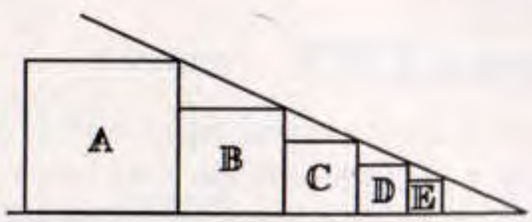



A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}r^2$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}r^2$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{2}r^2$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$ E) $\frac{3\sqrt{7}}{2}r^2$

**PROBLEMA N°97**

En la figura mostrada, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ y $\mathbb{E}$ son las áreas de las regiones cuadradas. Si $\mathbb{A}=27m^2$ y $\mathbb{E}=3m^2$. Halle $\mathbb{B}+\mathbb{D}$




A) $12\sqrt{3}m^2$ B) $30m^2$ C) $24m^2$

D) $18\sqrt{2}m^2$ E) $18m^2$

**PROBLEMA Nº98** PRÁCTICA CALIFICADA

Se tiene el rectángulo ABCD, donde AB=2L, BC=L, en $\overline{AB}$ se ubican los puntos F y E de manera que $F\in\overline{AE}$, $\overline{FC}$ es perpendicular a $\overline{DE}$ en Q, si: $m\measuredangle CDE=30°$. Calcule el área de la región cuadrangular BCQE.

A) $\frac{L^2}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ B) $\frac{L^2}{2}\sqrt{3}$

C) $\frac{L^2}{2}(2+\sqrt{3})$ D) $L^2(2-\sqrt{3})$

E) $L^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

**PROBLEMA Nº99** PRÁCTICA CALIFICADA

Se tiene el cuadrilátero ABCD donde $\overline{BC}/\!/\overline{AD}$, en $\overline{AD}$ se ubican los puntos Q y R de manera que $Q\in\overline{AR}$, $\overline{CQ}/\!/\overline{AB}$, $\overline{BR}/\!/\overline{CD}$ y $\overline{CQ}\cap\overline{BR}=\{P\}$. Las áreas de las regiones triangulares BCP y PQR son a y b respectivamente, calcule el área de la región cuadrangular ABPQ.

A) 2a + b B) a + 2b C) 2(a + b)

D) $a+2\sqrt{ab}$ E) $2\sqrt{ab}$

**PROBLEMA Nº100** SEMINARIO

En un trapecio cuyas bases miden 3m y 1m se traza una paralela a las bases para dividirlo en dos figuras equivalentes. ¿Cuál es la longitud de dicha paralela? (en m)

A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{10}$

**PROBLEMA Nº101**

ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 6u, $E\in\overline{BC}$, el área de la región trapezoidal AECD es el doble de la región triangular ABE, entonces la longitud de $\overline{EC}$ es:

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$

D) 3 E) $3\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº102**

En un paralelogramo ABCD, AD=18dm y su altura BH mide 12dm. Si M y N son los puntos medios de los lados BC y CD respectivamente, entonces el área de la región cuadrangular AMCN (en $dm^2$) es:

A) 84 B) 92 C) 96 D) 108 E) 81

**PROBLEMA Nº103**

En un cuadrilátero ABCD se ubican M y N puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente, donde $\overline{AN}\cap\overline{DM}=\{L\}$ y $\overline{AC}\cap\overline{BD}=\{F\}$, si la suma de áreas de las regiones de los triángulos AML y BMF es $10m^2$, entonces la suma de las áreas de las regiones triangulares DLN y CFN en ($dm^2$) es:

A) 7,5 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

**PROBLEMA Nº104**

Se tiene el cuadrado ACDE de centro O, B es un punto exterior y relativo a $\overline{AC}$ tal que $m\measuredangle ABC=90°$, BO=6cm. Halle el área de la región limitada por el cuadrilátero ABCO (en $cm^2$)

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

**PROBLEMA N°105**

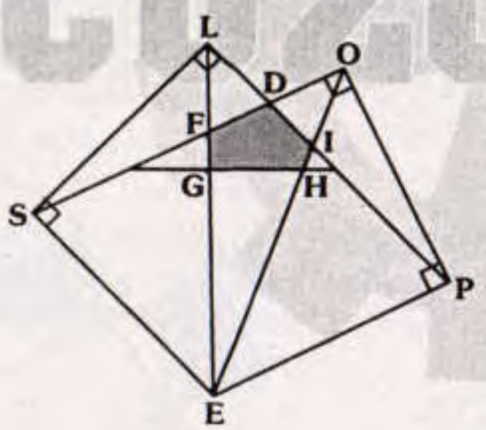
Hallar el área de un trapecio ABCD ($\overline{AD} // \overline{BC}$), AD > $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ es mediana del trapecio (M∈$\overline{AB}$), Q es punto medio de MN y el área de la región cuadrangular no convexa BNAQ es $40u^2$.

A) $100u^2$ B) $120u^2$ C) $140u^2$
D) $160u^2$ E) $180u^2$

**PROBLEMA N°106**

Hallar el área de la región sombreada, si: $Área_{(\Delta LFS)} = 10u^2$, $Área_{(\Delta OIP)} = 20u^2$ y $Área_{(GEH)} = 15u^2$

A) 10
B) 15
C) 17,5
D) 20
E) 22,5




**PROBLEMA N°107**

Se tiene una región cuadrada ACHF cuyo lado mide L, sea B un punto exterior a la región y relativo a $\overline{AC}$ tal que el triángulo ABC es recto en B.

Si $Área_{(\Delta AFB)} . Área_{(BHC)} = 25u^2$. Halle el área de la región triangular ABC.

A) $4u^2$ B) $5u^2$ C) $6u^2$
D) $7u^2$ E) $8u^2$

**PROBLEMA N°108**

Halle (en $u^2$) el área del trapezoide ABCD, si sus diagonales miden 6u y 8u y el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos mide 5u.

A) 16 B) 20 C) 24
D) 26 E) 28

**PROBLEMA N°109**

En un cuadrante AOB de centro O, se inscribe un cuadrado CDEF con C y D en $\overset{\frown}{AB}$ y E y F en $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ respectivamente. Si OA=OB=R, halle el área del cuadrado.

A) $\frac{R^2}{3}$ B) $\frac{R^2}{5}$ C) $\frac{2R^2}{5}$
D) $\frac{3R^2}{5}$ E) $\frac{2R^2}{3}$

**PROBLEMA N°110**

Calcule el área de la mayor región rectangular inscrita en una circunferencia de radio R.

A) $2R^2$ B) 4R2 C) $2\sqrt{2}R^2$
D) $3R^2\sqrt{2}$ E) $1,5R^2$

**PROBLEMA N°111**

En un cuadrado de lado L se construyen sobre sus lados interiormente triángulos equiláteros, calcule el área de la región estrellada resultante.

A) $(2\sqrt{3}-3)L^2$ B) $(4\sqrt{3}-3)L^2$

C) $2(2\sqrt{3}-3)L^2$ D) $(2\sqrt{3}-3)\frac{L^2}{2}$

E) $(2\sqrt{3}-3)\frac{L^2}{4}$

**PROBLEMA N°112**

En un paralelogramo ABCD, se traza la mediatriz del lado AB que interseca al lado AD en E, tal que $m\sphericalangle BCE=2(m\sphericalangle ECD)$ y $2(AE)=CE=8$, halle el área de la región ABCD.

A) $16\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{2}$

D) $8\sqrt{3}$ E) $16\sqrt{2}$

**PROBLEMA N°113**

En un cuadrilátero ABCD, $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle ADC=90°$, $AB=6$, $CD=1$ y $m\sphericalangle ACD=2m\sphericalangle BAC$. Halle el área de la región ABCD.

A) $\frac{15}{2}\sqrt{6}$ B) $10\sqrt{7}$ C) $5\sqrt{7}$

D) $6\sqrt{6}$ E) $\frac{15}{2}\sqrt{7}$

**PROBLEMA N°114**

En una semicircunferencia de diámetro AD se ubican B y C de modo que $B\in\widehat{AC}$. Si $m\widehat{BC}=60°$ y $(AC)(BD)=12u^2$. Calcule el área de la región ABCD.

A) $2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{3}$

**PROBLEMA N°115**

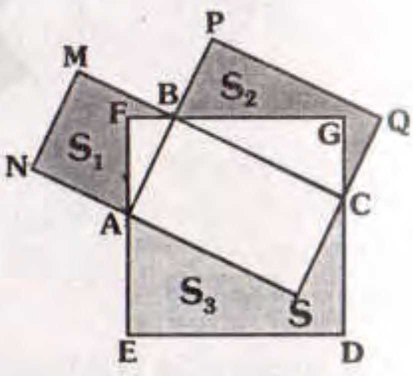
En un rombo las proyecciones de las diagonales sobre uno de sus lados miden 12u y 3u. Halle el área de la región limitada por dicho rombo.

A) $36u^2$ B) $18u^2$ C) $82u^2$

D) $45u^2$ E) $64u^2$

**PROBLEMA N°116**

En la figura, FGDE, ANMB y APQS son regiones cuadradas y AF=GC. Si $S_1+S_2=16u^2$, halle el valor de $S_3$.




A) 16

B) 8

C) 32

D) 24

E) $16\sqrt{3}$

**PROBLEMA N°117**

Dos regiones rectangulares están inscritas en una misma circunferencia, el 1° tiene una base igual a 2/3 del diámetro, el 2° tiene una base igual a los 3/4 del diáme-

tro. ¿En que relación se hallan sus áreas?

A) $\frac{32}{8}$ B) $\frac{4\sqrt{7}}{7\sqrt{5}}$ C) $\frac{8\sqrt{7}}{7\sqrt{5}}$

D) $\frac{32\sqrt{5}}{27\sqrt{7}}$ E) $\frac{64\sqrt{5}}{49\sqrt{7}}$

**PROBLEMA Nº118**

En un paralelogramo ABCD, se traza $\overline{AC}$ y se ubica M punto medio de $\overline{AB}$, sea $\overline{AC}\cap\overline{MD}=\{Q\}$ ¿Que porcentaje del área de ABCD es el área del triángulo MCQ?

A) 1/8 B) 1/6 C) 3/8

D) 1/3 E) 1/5

**PROBLEMA Nº119**

Se tiene un hexágono regular ABCDEF de lado "a". Sea M punto medio de $\overline{BC}$, se dibuja el simétrico del hexágono dado, según el eje que contiene a FM. Hallar el área de la región común a los dos polígonos.

A) $6a^2\sqrt{3}$ B) $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$

D) $\frac{8}{3}a^2\sqrt{3}$ E) $\frac{2}{3}a^2\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº120**

En el rectángulo ABCD, en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica E, por dicho punto se traza una recta secante que interseca a $\overline{CD}$ en F y a $\overline{AB}$ en G. Si las regiones ADFG y BCFG son equivalentes, $AD=\sqrt{2}(DE)$ y $AB=\sqrt{2}$. Calcule AG.

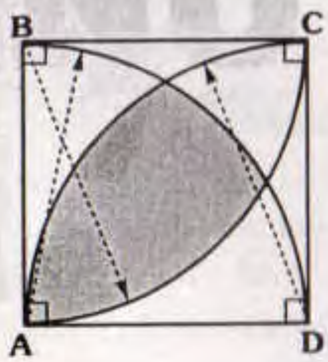
A) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1

D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

## ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

**PROBLEMA Nº121**

En la figura AB=L, halle el área de la región sombreada.




A) $\frac{L^2}{12}(\pi-1)$ B) $\frac{L^2}{3}$ C) $\frac{L^2}{4}$

D) $\frac{L^2}{12}(5\pi-6\sqrt{3})$ E) $\frac{L^2}{6}(\pi-\sqrt{2})$

**PROBLEMA Nº122**

En un ángulo están inscritos tres circunferencias tangentes exteriormente dos a dos. Si el área de los círculos menor y

mayor son $S_1$ y $S_2$. Halle el área del círculo intermedio.

A) $\sqrt{S_1S_2}$ B) $\frac{S_2^2}{S_1}$ C) $\frac{(S_2)^2}{S_1}$

D) $S_1+S_2$ E) $S_1S_2$

**PROBLEMA Nº123**

Dos circunferencia congruentes son tangentes exteriores en A, se traza el segmento tangente exterior $\overline{BC}$. Si el radio de una circunferencia mide 2m entonces el área de la región triangular mixtilínea ABC es (en m²):

A) $6-\pi$ B) $8-2\pi$ C) $7-\pi$

D) $\frac{7}{2}-2\pi$ E) $9-2\pi$

**PROBLEMA Nº124**

En una circunferencia cuyo radio mide 5m, se ubican los puntos consecutivos A, B y C tal que: $m\widehat{AB}=72°$ y $m\widehat{BC}=54°$. Calcule el área de la región limitada por $\widehat{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ (en m²)

A) $2\pi$ B) $3\pi$ C) $4\pi$

D) $5\pi$ E) $6\pi$

**PROBLEMA Nº125**

En el semicírculo de diámetro AB y centro O, se trazan los radios OC y OD, con $\overrightarrow{OD}$ bisectriz del ∢AOC .Si los segmentos circulares determinados por $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ tienen por áreas $A_1$ y $A_2$. Calcule el área del sector circular BOC.

A) $A_2-A_1$ B) $\frac{A_2+A_1}{2}$ C) $A_2-2A_1$

D) $\frac{A_2-A_1}{2}$ E) $\frac{2A_1+A_2}{3}$

**PROBLEMA Nº126**

Sea el sector circular AOB (OA=OB=R) cuyo ángulo central mide 30°. Se trazan $\overline{BD}\perp\overline{OA}$ y $\overline{AE}\perp\overline{OB}$. Si $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$ se intersecan en P, calcule el área de la región del triángular mixta APB.

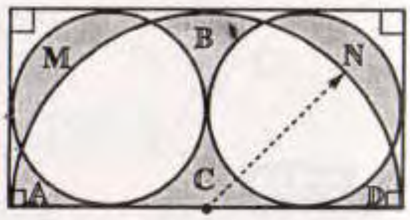
A) $\frac{R^2}{12}(\pi-18+12\sqrt{3})$ B) $\frac{R^2}{12}(\pi+18-12\sqrt{3})$

C) $\frac{R^2}{12}(\pi+12+6\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2}{12}(\pi+12-6\sqrt{3})$

E) $\frac{R^2}{12}(\pi-12+6\sqrt{3})$

**PROBLEMA Nº127**

En la figura mostrada, las circunferencias son congruentes. Además $\mathbb{M},\mathbb{N},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son las áreas de las regiones sombreadas. Entonces $\frac{\mathbb{M}+\mathbb{N}}{\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}+\mathbb{D}}$ es:

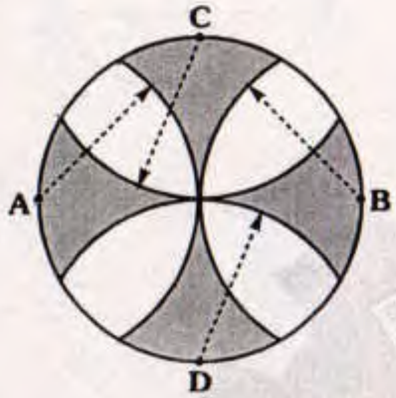



A) 1/4 B) 1/2 C) 1

D) 1/3 E) 2

**PROBLEMA Nº128** SEMINARIO

En el siguiente gráfico, se muestra los diámetros AB y CD perpendiculares en F, AF=R. Hallar el área de la región sombreada.



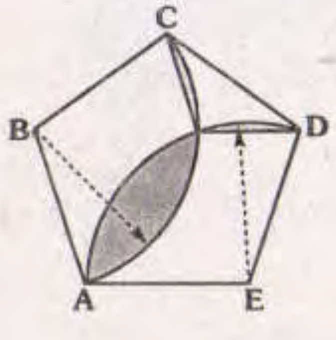

A) $\frac{2}{3}R^2(3\sqrt{3}-\pi)$ B) $\frac{1}{3}R^2(3\sqrt{3}-\pi)$

C) $\frac{4}{3}R^2(3\sqrt{3}-\pi)$ D) $\frac{2}{3}R^2(\sqrt{3}-\pi)$

E) $\frac{2}{3}R^2(2\sqrt{3}-\pi)$

**PROBLEMA Nº129**

Dado el pentágono regular ABCDE, AB=$\ell$. Entonces el área de la región sombreada será igual a:




A) $\frac{\ell^2}{20}\left(8\pi-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$

B) $\frac{\ell^2}{20}\left(8\pi-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$

C) $\frac{\ell^2}{20}\left(8\pi-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$

D) $\frac{\ell^2}{20}\left(8\pi-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}-5\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$

E) $\frac{\ell^2}{20}\left(8\pi-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$

**PROBLEMA Nº130**

ABCD es una región cuadrada de 45u² de áreas, M, N y C son centros de los arcos de circunferencia. Calcule aproximadamente el área de la región sombreada.

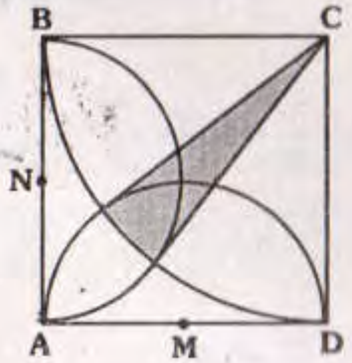
A) $2\pi u^2$

B) $8\pi u^2$

C) $10\pi u^2$

D) $(4\sqrt{3}-\pi)u^2$

E) $6(\pi-\sqrt{3})u^2$




**PROBLEMA Nº131**

En un círculo de diámetro AB y centro O, se trazan los radios $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$, siendo $\overrightarrow{OD}$ la bisectriz del ángulo AOC. Si los segmentos circulares determinados por $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ tienen áreas $A_1$ y $A_2$ respecti-

vamente, calcule el área del sector circular BOC.

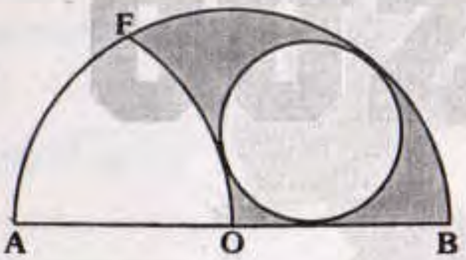
A) $A_2 - A_1$ B) $2A_2 - A_1$

C) $2(A_2 - A_1)$ D) $A_2 - 2A_1$

E) $A_2 + A_1$

**PROBLEMA Nº132**

En la figura mostrada se tiene la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O. El centro del arco $\overset{\frown}{OF}$ es el punto A. Si OA=OB=R, halle el área de la región sombreada.



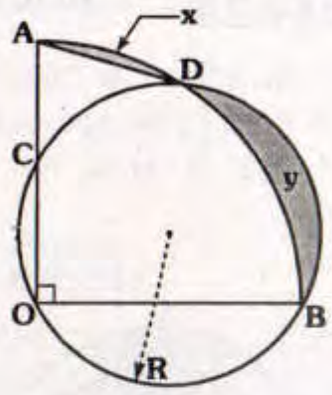

A) $\frac{R^2}{38}(12\sqrt{3}-\pi)$ B) $\frac{R^2}{38}(10\sqrt{3}-\pi)$

C) $\frac{R^2}{48}(10\sqrt{3}-\pi)$ D) $\frac{R^2}{48}(12\sqrt{3}-\pi)$

E) $\frac{R^2}{48}(12\sqrt{2}-\pi)$

**PROBLEMA Nº133**

En la figura AOB es un cuadrante, O, B,C y D pertenecen a una circuferencia de radio. Si $m\overset{\frown}{BD}=45°$ .Hallar x + y

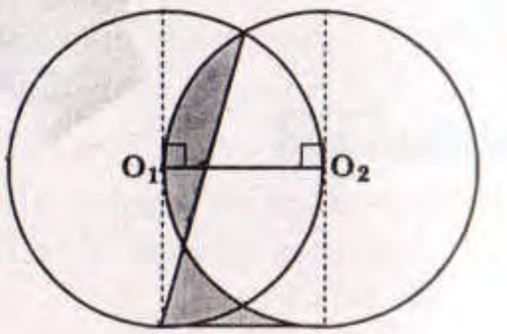



A) $\frac{\pi R^2}{2}$ B) $R^2(\sqrt{2}-1)$ C) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$

D) $\frac{R^2}{2}(\pi-1)$ E) $\frac{R^2}{2}(\sqrt{3}-1)$

**PROBLEMA Nº134**

Si en la figura, el radio de las dos circunferencias mide R entonces el área de la región sombreada es:



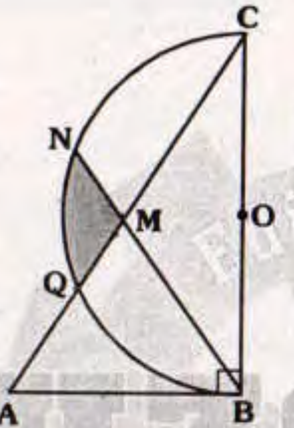

A) $\frac{R^2}{12}(\pi+\sqrt{3}+1)$ B) $\frac{R^2}{12}(2\pi-\sqrt{3}-3)$

C) $\frac{R^2}{12}(2\pi-\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2}{12}(\pi+3\sqrt{3}-3)$

E) $\frac{R^2}{12}(\pi+2\sqrt{3}-3)$

**PROBLEMA Nº135**

En la figura mostrada, $\overline{BC}$ es diámetro. $\overline{BM}$ es mediana del triángulo ABC, si $m\measuredangle CAB=60°$ y $AB=\ell$. Halle el área de la región sombreada.




A) $\frac{\ell^2}{8}(\pi-\sqrt{2})$

B) $\frac{\ell^2}{8}(\pi-\sqrt{3})$

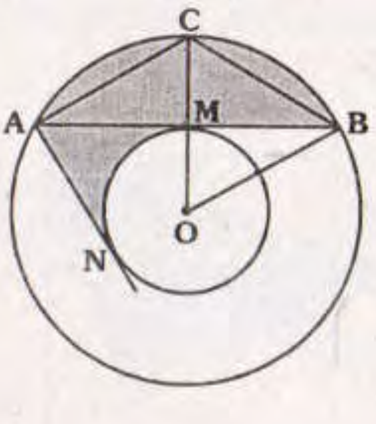
C) $\frac{\ell^2}{4}(\pi-\sqrt{3})$

D) $\frac{\ell^2}{6}(\pi-\sqrt{3})$

E) $\frac{\ell^2}{8}(\pi-\sqrt{2})$

**PROBLEMA Nº136**

En la figura, se muestran dos circunferencias concéntricas de radios R y 2R. Calcule el área de la región sombreada.




A) $\frac{3}{2}\pi R^2$

B) $\frac{\pi R^2}{2}$

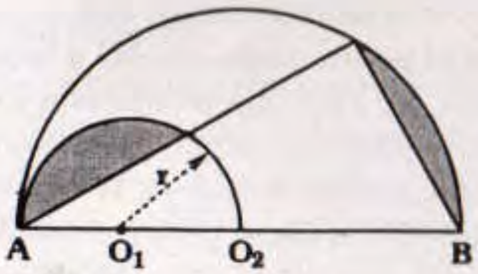
C) $\pi R^2$

D) $\frac{\pi R^2}{3}$

E) $\frac{3\pi R^2}{5}$

**PROBLEMA Nº137** EXAMEN PARCIAL

Si $O_1$ y $O_2$ son centros de las semicircunferencias de la figura adjunta. El valor de la suma de áreas sombreadas es:



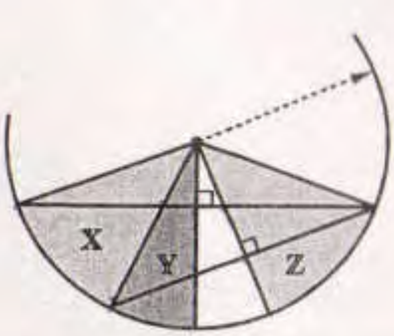

A) $r^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$ B) $r^2\left(\pi-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$

C) $r^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$ D) $r^2\left(\pi+\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)u^2$

E) $r^2(2\pi+\sqrt{3})u^2$

**PROBLEMA Nº138**

En la figura mostrada, la diferencia de las áreas de las regiones $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Y}$ es $20u^2$, calcule el área de la región $\mathbb{X}$.




A) $30u^2$

B) $35u^2$

C) $40u^2$

D) $45u^2$

E) $50u^2$

**PROBLEMA Nº139** CUARTO SEMINARIO

Se tiene un triángulo equilátero ABC cuyo lado mide 2a con centro en B y radio la altura del triángulo se traza un arco que interseca a los lados AB y BC en los puntos E y F respectivamente, luego con centro en el punto medio de AC y radio **"a"** se traza un arco que interseca a los lado AB y BC en los puntos M y N respectivamente. Calcular el área de la región limitada por dicho arcos y los lados AB y BC.

A) $\frac{a^2}{6}(\pi-\sqrt{3})$ B) $\frac{a^2}{6}(5\pi-3\sqrt{3})$

C) $\frac{a^2}{6}(4\pi-3\sqrt{3})$ D) $\frac{a^2}{6}(4\pi-\sqrt{3})$

E) $\frac{a^2}{6}(3\pi-\sqrt{3})$

**PROBLEMA Nº140** CUARTO SEMINARIO

En la figura el triángulo FGH es equilátero $\overline{FG}$ y $\overline{GH}$ son diámetros, el arco FH ha sido trazado con centro G. Hallar el área de la región sombreada, si FG=a.

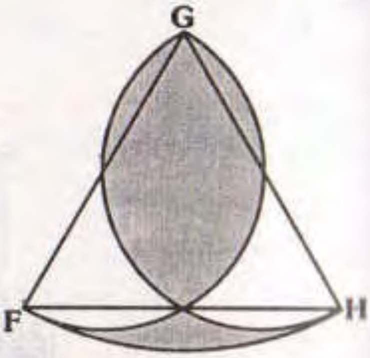
A) $a^2(\pi-\sqrt{3})$

B) $2a^2(\pi-\sqrt{2})$

C) $2a^2(\pi-\sqrt{3})$

D) $\frac{a^2}{4}(\pi-\sqrt{3})$

E) $a^2(\pi-\sqrt{2})$



# Problemas Propuestos

## Ciclo Semestral

### ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

**PROBLEMA N°141**

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica P en $\overline{BC}$, luego se trazan las alturas BQ y CR en los triángulos ABP y PCD respectivamente, tal que B, Q y R son colineales M es punto medio de $\overline{QR}$, si AQ=a y RD=b, calcule el área de la región triangular AMD.

A) $\frac{ab}{4}$ B) $\frac{ab}{2}$ C) $\frac{a^2+b^2}{4}$

D) $\frac{a^2+b^2}{8}$ E) $\frac{a^2+b^2}{2}$

**PROBLEMA N°142**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y el cuadrilátero MBCN es inscriptible. Si AB=8, calcule el área de la región sombreada.

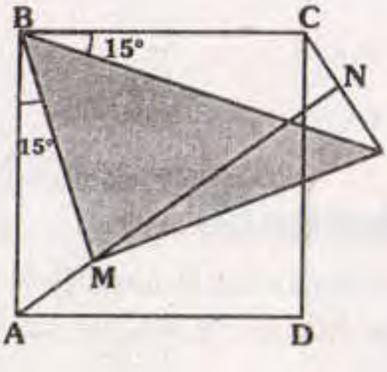
A) $8\sqrt{3}$

B) $16\sqrt{3}$

C) 8

D) $4\sqrt{3}$

E) 16




**PROBLEMA N°143**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubican M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente tal que: AM = MC = t. Si las regiones MBN y AMNC son equivalentes, calcule el inradio del triángulo ABC.

A) t B) $\frac{t}{2}$ C) $\frac{t}{3}$

D) $t\sqrt{2}$ E) $t\frac{\sqrt{2}}{3}$

**PROBLEMA N°144**

En el interior de un cuadrado ABCD, se ubica el punto P, tal que $m\sphericalangle APD=90°$, si las áreas de las regiones APB y DPC son $S_1$ y $S_2$, calcule el área de la región APD.

A) $2\sqrt{S_1S_2}$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{S_1S_2}$ C) $\sqrt{S_1S_2}$

D) $\sqrt{\frac{S_1S_2}{2}}$ E) $\frac{\sqrt{S_1S_2}}{3}$

**PROBLEMA N°145**

En los lados AB y BC de un triángulo ABC se ubican los puntos M y N respectivamente, tal que MN determina regiones equivalentes, si AM=1, MB=2 y BN=3,

calcule NC.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5

D) 2 E) 2,5

**PROBLEMA N°146**

Si $(AB)^2 - (AC)^2 = 200$, calcule el área de la región sombreada.

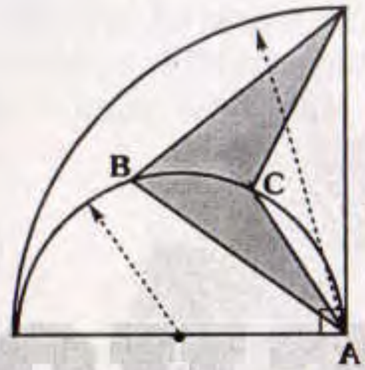
A) 50

B) 75

C) 100

D) 150

E) 200




**PROBLEMA N°147**

Si M y N son puntos de tangencia, MN=4 y $m\widehat{NB}=30°$, calcule el área de MNL.

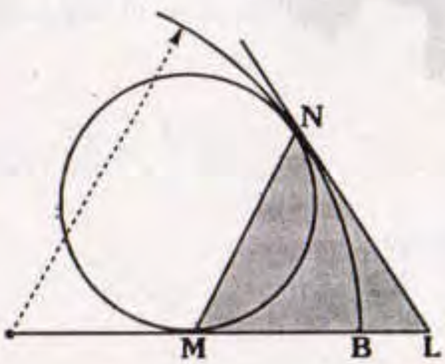
A) $\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $3\sqrt{3}$

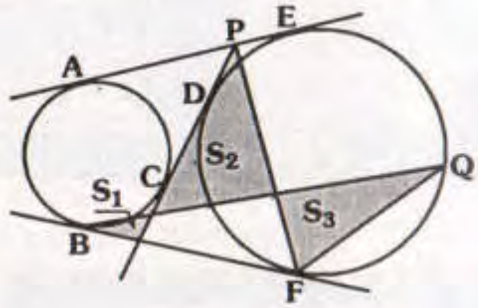
D) $4\sqrt{3}$

E) $5\sqrt{3}$




**PROBLEMA N°148**

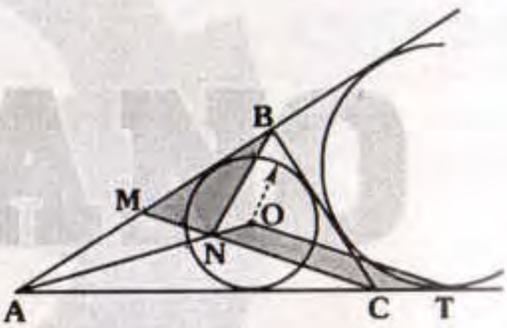
Si A, B, C, D, E y F son puntos de tangencia, $m\angle CPF + m\angle BFQ = 180°$, PF=FQ y $S_1 + S_3 = 8$, calcule $S_2$.




A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

**PROBLEMA N°149**

Si AM=MB y el área de la región NOTC es 8, calcule el área de MNB.




A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

**PROBLEMA N°150**

Dado un triángulo ABC, la mediana AM intersecta a las cevianas BD y BE en Q y N respectivamente, si AD=DE=EC, calcule la razón entre las áreas de las regiones ABC y DQNE.

A) 50/11 B) 5 C) 60/11

D) 65/11 E) 70/11

**PROBLEMA N°151**

Se ubican los puntos P, R y Q en los lados AB, BC y AC de un triángulo ABC

respectivamente, de modo que $\overline{QR}//\overline{AB}$ y $\overline{PQ}//\overline{BC}$, si las áreas de las regiones APQ y QRC son 4 y 9 respectivamente, calcule el área de la región PBRQ.

A) 12 B) 14 C) 16

D) 18 E) 20

**PROBLEMA N°152**

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se trazan la ceviana interior BD; M es punto medio de $\overline{BC}$, se traza la altura MH del triángulo MBD, tal que: $(MH)(AC)=32u^2$ ; $m\measuredangle BCA=40°$ ; $m\measuredangle DBA=30°$. Calcular el área de la región triangular DBM.

A) $8u^2$ B) $4u^2$ C) $16u^2$

D) $24u^2$ E) $32u^2$

**PROBLEMA N°153**

En la región interior de un cuadrado ABCD se ubica el punto P; la paralela a $\overline{AD}$ trazada por P interseca a $\overline{AC}$ en Q de modo que: AQ=3(QC); BP=3u y $m\measuredangle BPA=90°$; calcular el área de la región AQD.

A) $27u^2$ B) $15u^2$ C) $12u^2$

D) $26u^2$ E) $13{,}5u^2$

**PROBLEMA N°154**

En el triángulo ABC, se traza la mediana BM, sobre ella se ubica Q y se trazan las perpendiculares $\overline{QH}$ y $\overline{QP}$ a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Calcule: QP, si HQ=3u, AB=8u, BC=12u.

A) 3u B) 2,5u C) 2u

D) 3,5u E) 4u

**PROBLEMA N°155**

Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B; se traza la altura BH; tal que la bisectriz trazada por C. Interseca a $\overline{BH}$ y $\overline{AB}$ en M y N respectivamente. Calcular el área de la región triangular ABC, si MC=8u y CN=10.

A) $33{,}75u^2$ B) $12u^2$ C) $18u^2$

D) $24u^2$ E) $36u^2$

**PROBLEMA N°156**

Dado un triángulo ABC en el cual se trazan la mediana $\overline{AM}$ y la altura $\overline{BQ}$ secante en R, desde R se traza la perpendicular $\overline{RH}$ a $\overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$). Si: RQ=4u, AC=12u y AB=8. Halle RH.

A) 6 B) 5. C) 9

D) 4 E) 10

**PROBLEMA N°157**

Se tiene un cuadrado ABCD, de lado a, con diámetro en $\overline{AD}$ se traza interiormente una semicircunferencia y luego se traza tangente $\overline{BT}$ a ella, T es punto de tangencia, calcular el área de la región trian-

gular CTD en términos de "a".

A) $\frac{a^2}{4}$ B) $\frac{a^2}{3}$ C) $\frac{a^2}{5}$

D) $\frac{a^2}{10}$ E) $\frac{a^2}{20}$

**PROBLEMA Nº158**

Si AB = 5 y CD = 2, calcule el área de la región sombreada.

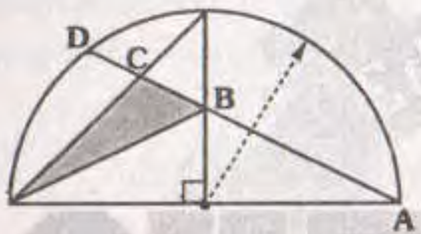
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6




**PROBLEMA Nº159**

Se tiene una semicircunferencia, de diámetro AB y centro O, luego se traza la circunferencia, de centro $O_1$, tangente a $\overline{AB}$ en A, si la longitud del segmento tangente común es a, calcule el área de la región triangular $BOO_1$.

A) $\frac{a^2}{4}$ B) $\frac{a^2}{3}$ C) $\frac{a^2}{2}$

D) $a^2$ E) $2a^2$

**PROBLEMA Nº160**

Dado un cuadrante AOC, de centro O, tomando como diámetro $\overline{AO}$ se traza interiormente una semicircunferencia, cuyo radio es $\sqrt{5}$, luego se ubican los puntos B y D en el cuadrante y en la semicircunferencia respectivamente, tal que ABCD es un romboide, calcule el área de la región triangular COD.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

## ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

**PROBLEMA Nº161**

En el gráfico, M y N son puntos de tangencia si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales y MN=10. Calcule el área de la región sombreada.

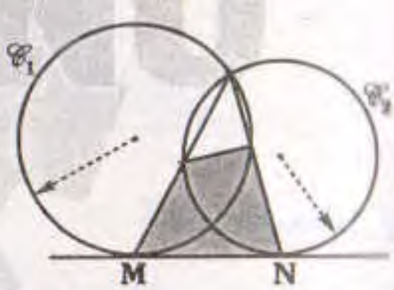
A) 100

B) 50

C) 25

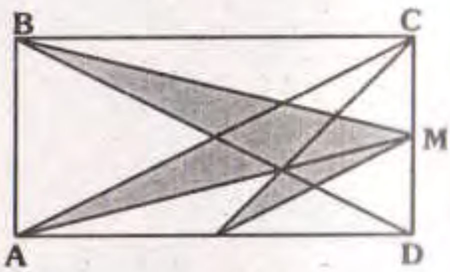
D) $50\sqrt{2}$

E) $25\sqrt{2}$




**PROBLEMA Nº162**

En el gráfico, CM = MD y el área de la región rectangular ABCD es 120. Calcule el área de la región sombreada.




A) 30 B) 40 C) 50

D) 35 E) 45

**PROBLEMA Nº163**

En el gráfico, calcule el área de la región sombreada. Si AB=R, MN=2(AM) y AT= $\sqrt{5}$ (T es punto de tangencia)

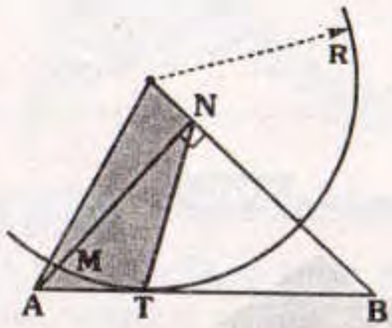
A) 4,5

B) $3\sqrt{5}$

C) $\frac{10}{3}$

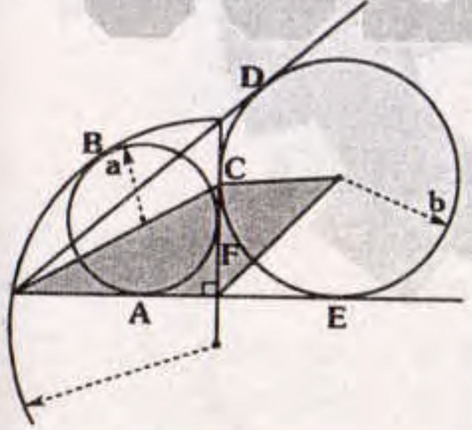
D) 3

E) $2\sqrt{5}$




**PROBLEMA Nº164**

En el gráfico, A,B,C,D,E y F son puntos de tangencia. Calcule el área de la región sombreada.

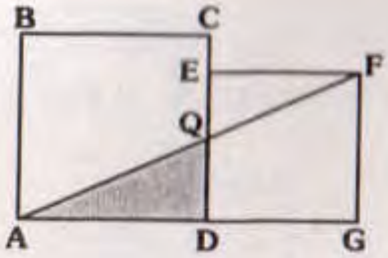



A) ab B) $b^2+a^2$ C) $\frac{b^3}{b-a}$

D) $\frac{a^3}{b-a}$ E) $\frac{b^2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$

**PROBLEMA Nº165**

En el gráfico, halle el área de la región sombreada, si ABCD y EFGD son cuadrados, CQ=a y FG=b.




A) ab B) $\frac{ab}{2}$ C) 2ab

D) $ab\sqrt{2}$ E) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

**PROBLEMA Nº166**

Calcule el área de la región paralelográmica OAMP, si OP=a.

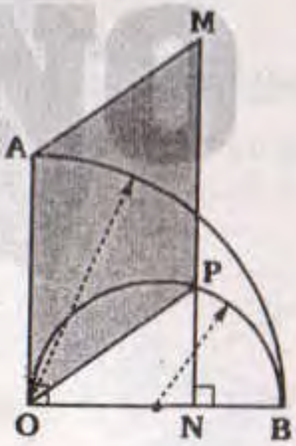
A) $a^2$

B) $2a^2$

C) $3a^2/2$

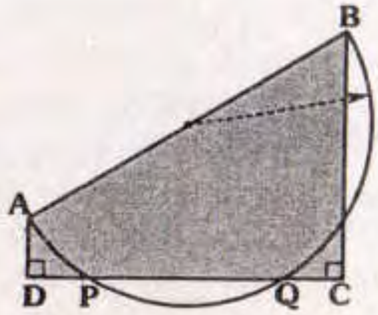
D) $a^2/4$

E) $5a^2/4$




**PROBLEMA Nº167**

En el gráfico, AD=4, DP=5 y PQ=7. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{323}{7}$  B) $\frac{323}{2}$  C) $\frac{315}{4}$

D) $\frac{323}{8}$  E) $\frac{315}{8}$

**PROBLEMA N°168**

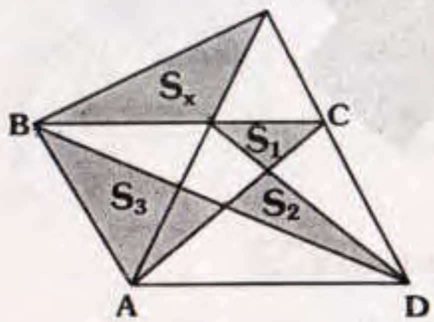
Se tiene un cuadrilátero ABCD inscriptible y circunscriptible a la vez, tal que AB=2, BC=1 y CD=4. Calcule la medida del radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero.

A) $\sqrt{3}$  B) $\sqrt{2}$  C) $\sqrt{10}/3$

D) $\sqrt{6}/2$  E) $\sqrt{6}$

**PROBLEMA N°169**

En la figura ABCD es un romboide. Si $S_2 = 8$ y $S_1 + S_3 = 18$, calcular $S_x$.




A) 10  B) 26  C) 20

D) 22  E) 16

**PROBLEMA N°170**

En la figura A y C son puntos de tangencia. Si AB=6, BC=3 y CD=5, calcular el área de la región sombreada.

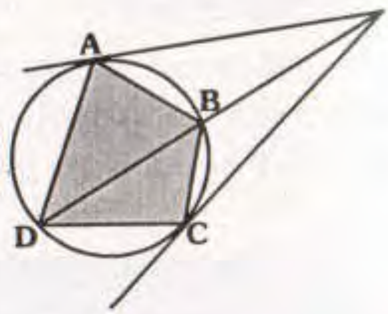
A) $5\sqrt{21}$

B) $6\sqrt{21}$

C) $7\sqrt{21}$

D) $4\sqrt{21}$

E) $15\sqrt{6}$




**PROBLEMA N°171**

En la figura $m\widehat{AB}=150°$ y AC=12. Calcular el área de la región sombreada.

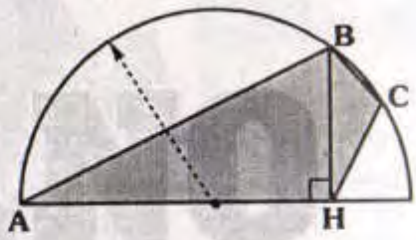
A) 12

B) 16

C) 18

D) 22

E) 24




**PROBLEMA N°172**

Si AQ=8; calcule el área de la región sombreada (T punto de tangencia)

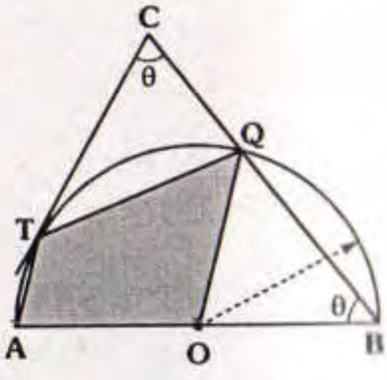
A) 16

B) 8

C) 4

D) 22

E) 24




**PROBLEMA N°173**

Siendo ABCD un paralelogramo, calcular la razón entre las áreas de las regiones

AEBD y ECD.

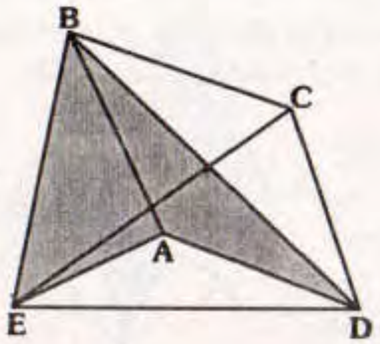
A) 2/3

B) 1/4

C) 1

D) 2

E) 3/4




**PROBLEMA N°174**

Si OB=10 y T es punto de tangencia; calcule el área de la región paralelogramica OQPB.

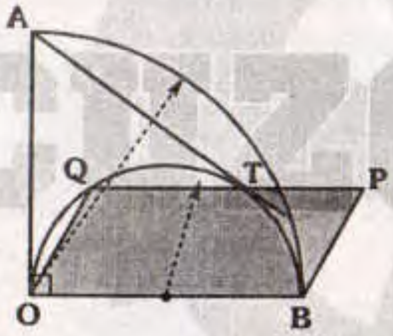
A) 60

B) 40

C) 50

D) 80

E) 20




**PROBLEMA N°175**

Si ABCD es un romboide y $\overline{MN} // \overline{CD}$. Calcule el área de la región ABCD en función a $S_1$ y $S_2$.

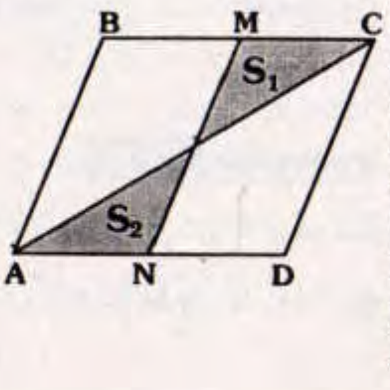
A) $2(S_1 + S_2)$

B) $4(S_1+S_2)$

C) $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$

D) $2(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$

E) $8(S_1+S_2)$




**PROBLEMA N°176**

Calcule el área de la región sombreada si $PH=\sqrt{6}$.

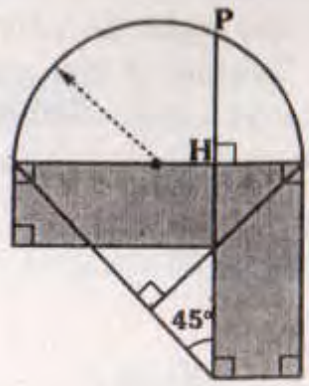
A) 6

B) 18

C) 12

D) 10

E) 24




**PROBLEMA N°177**

En la figura mostrada, ABCD es un paralelogramo, $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, AP=6 y PD=4. Calcule el área de la región cuadrangular ABCD.

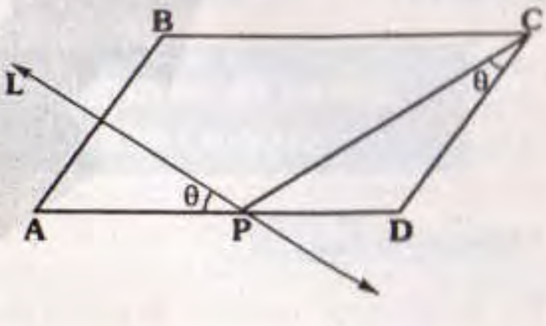
A) 24

B) 64

C) 48

D) 72

E) 60




**PROBLEMA N°178**

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediatriz de $\overline{AC}$ la cual interseca a $\overline{AB}$ en R. Calcule el área de la región cuadrangular RBCH, si el área de la región triangular ABC es 64.

A) 16 B) 32 C) 42

D) 28 E) 48

**PROBLEMA Nº179**

En un trapecio rectángulo se traza una recta secante paralela a sus bases determinando dos trapecios parciales circunscriptible. Calcular el área de la región limitada por el trapecio inicial si sus lados no paralelos miden a y b (a > b).

A) $\frac{a(a+b)}{2}$ B) $\frac{b(a-b)}{2}$ C) $\frac{ab}{2}$

D) $\frac{a^2+b^2}{4}$ E) ab

**PROBLEMA Nº180**

Calcule el área de un trapecio rectángulo circunscrito a una circunferencia, si las bases miden a y b.

A) ab B) ab/2 C) $(a+b)^2$

D) $ab\sqrt{2}$ E) $ab\sqrt{3}$

## ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

**PROBLEMA Nº181**

En el gráfico, halle el área de la región sombreada.

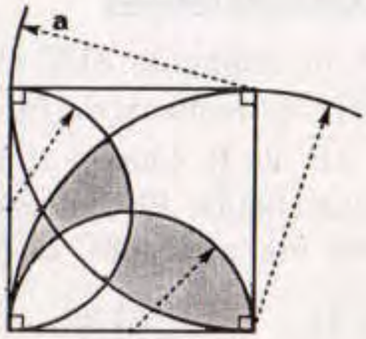
A) $a^2(\pi-2)$

B) $a^2(4-\pi)$

C) $\frac{a^2(\pi-2)}{4}$

D) $\frac{a^2(\pi-2)}{2}$

E) $\frac{a^2(4-\pi)}{2}$




**PROBLEMA Nº182**

Según el gráfico, calcule el área de la región sombreada, si R = 6u.

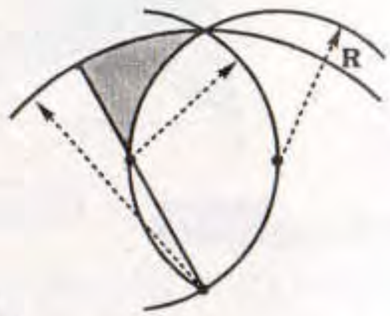
A) $3\pi u^2$

B) $6\pi u^2$

C) $3\sqrt{3}\pi u^2$

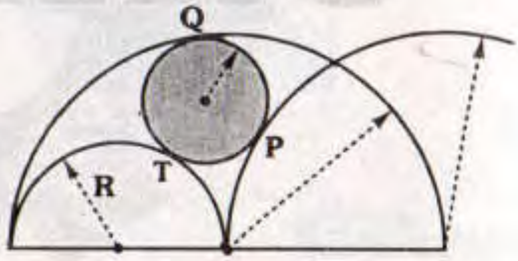
D) $4\pi u^2$

E) $4\sqrt{3}\pi u^2$




**PROBLEMA Nº183**

Según el gráfico P, Q y T son puntos de tangencia. Calcule el área del círculo en función de R.

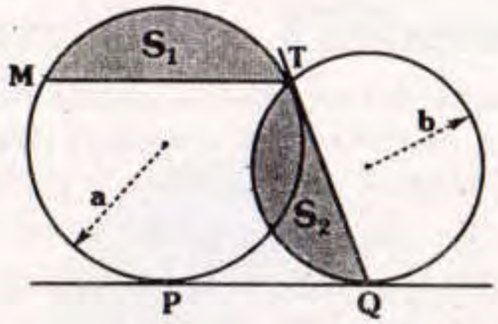



A) $\frac{9}{15}\pi R^2$ B) $\frac{9}{25}\pi R^2$ C) $\frac{1}{9}\pi R^2$

D) $\frac{1}{6}\pi R^2$ E) $\frac{2}{5}\pi R^2$

**PROBLEMA Nº184**

En el gráfico, P, T y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{MT}=m\widehat{TQ}$, calcule $\frac{S_1}{S_2}$.




A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{a^2}{b^2}$ C) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$

D) $\frac{a^2-b^2}{b^2}$ E) $\frac{b^2}{a^2}$

**PROBLEMA N°185**

Se tiene una semicircunferencia cuyo diámetro es $\overline{AD}$; en $\widehat{AD}$ se ubican los puntos B y C tal que: $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=m\widehat{CD}$; luego se traza $\overline{BH}\perp\overline{AD}$; si AD=8; calcular el área de la región limitada por: $\overline{BH}$, $\overline{HC}$ y $m\widehat{BC}$.

A) $\frac{8\pi}{3}$ B) $\frac{7\pi}{3}$ C) $2\pi$

D) $\frac{9\pi}{4}$ E) $\frac{7\pi}{5}$

**PROBLEMA N°186**

A distintos lados del diámetro de una circunferencia se traza las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tal que $\overline{AB}//\overline{CD}$; AB=6, CD=8 y $m\overline{BD}=90°$; calcular el área de la porción de círculo limitada por dichas cuerdas y los arcos AC y BD.

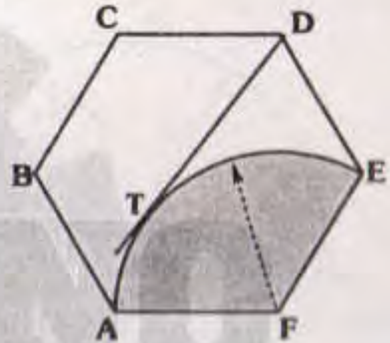
A) $\left(\frac{48+25\pi}{2}\right)$ B) $\left(\frac{46+20\pi}{3}\right)$

C) $3(2\pi+)$ D) $5(6-\pi)$

E) $\left(\frac{42+10\pi}{3}\right)$

**PROBLEMA N°187**

Si ABCDEF es un exágono regular; $DT=6\sqrt{2}$ y T es punto de tangencia; calcular el área de la región sombreada.




A) $9\pi$

B) $10\pi$

C) $12\pi$

D) $14\pi$

E) $18\pi$

**PROBLEMA N°188**

Se tienen cuatro círculos no secantes entre ellos y de igual radio; uniendo los centros se obtiene un cuadrilátero irregular convexo; calcular la suma de áreas de las porciones de círculos que se encuentran en el interior del cuadrilátero, si el radio es 1,5.

A) $2,25\pi$ B) $2,75\pi$ C) $4,30\pi$

D) $3\pi$ E) $3,25\pi$

**PROBLEMA N°189**

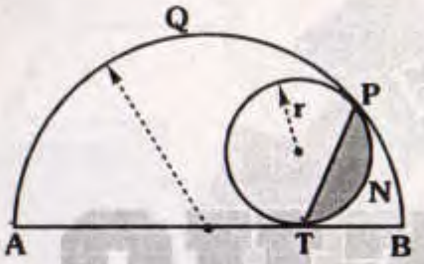
En un triángulo rectángulo ABC , recto en B, se traza una circunferencia que pasa por B y por el baricentro "G" del triángulo ABC, dicha circunferencia interseca a

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en "M" y "N" respectivamente tal que 4(BC) = 9(MG) y AC = 18. Calcular el área de la región limitada por la circunferencia.

A) $4\pi$ B) $8\pi$ C) $16\pi$ D) $12\pi$ E) $6\pi$

**PROBLEMA Nº190**

Calcule el área de la región sombreada si $m\widehat{AQP}=m\widehat{TNP}$; T y P son puntos de tangencia y r=4.



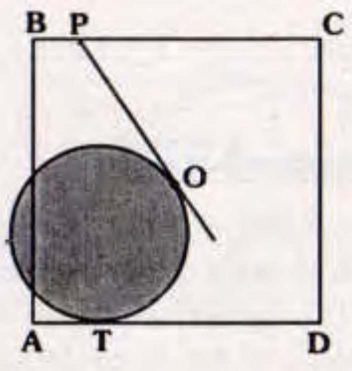

A) $(8\pi-9)$ B) $(16\pi-5)$

C) $2(3\pi-2\sqrt{2})$ D) $3(2\pi-\sqrt{3})$

E) $4(3\pi-\sqrt{6})$

**PROBLEMA Nº191**

Si ABCD es un cuadrado de centro O; PC=7 y BP=1, O y T son puntos de tangencia; calcule el área de la región circular sombreada.




A) $\frac{25}{4}\pi$

B) $24\pi$

C) $18\pi$

D) $9\pi$

E) $\frac{7}{2}\pi$

**PROBLEMA Nº192**

Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y se traza una recta tangente en el punto T intersecando a la prolongación de $\overline{AB}$ en el punto P, tal que; $m\measuredangle TPA=m\measuredangle TAB$ y AB=4cm. Calcule el área del segmento circular AT.

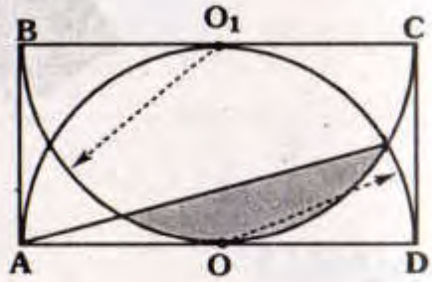
A) $\frac{1}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$ B) $\frac{1}{2}(4\pi-\sqrt{3})$

C) $\frac{1}{3}(2\pi-\sqrt{3})$ D) $\frac{1}{2}(4\pi-3\sqrt{3})$

E) $\frac{1}{3}(4\pi-\sqrt{3})$

**PROBLEMA Nº193**

Según el gráfico, calcule el área de la región sombreada si: CD=R($O_1$ y $O_2$ son puntos de tangencia).



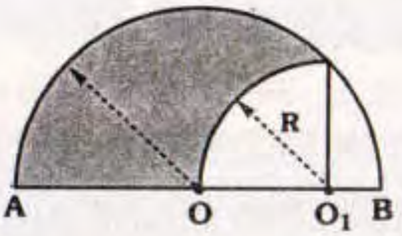

A) $\frac{R^2}{4}(\pi+2)$ B) $\frac{R^2}{4}\left(\pi-\frac{1}{2}\right)$

C) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$ D) $\frac{R^2}{4}(\pi-4)$

E) $\frac{R^2}{2}(\pi-2)$

**PROBLEMA N°194**

Halle el área de la región sombreada.




A) $\frac{R^2}{2}(\pi+2)$ B) $\frac{R^2}{2}(2\pi+1)$

C) $R^2(\pi+1/2)$ D) $\frac{R^2}{2}(\pi+1)$

E) $\frac{R^2}{2}(\pi+3)$

**PROBLEMA N°195**

Un círculo está inscrito en un triángulo regular. Con centro en uno de sus vértices del triángulo se traza el segundo círculo, cuyo radio es igual a la mitad del lado del triángulo. Que parte del área del triángulo constituye el área de la intersección de los círculos.

A) $\frac{5\sqrt{3}\pi-18}{54}$ B) $\frac{2\sqrt{3}\pi-6}{7}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}\pi-6}{7}$

**PROBLEMA N°196**

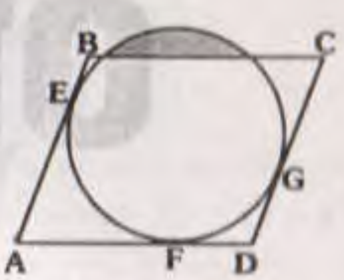
Sea ABCDEF un hexágono regular con lado "a" y con su centro en el punto "O". Se ha trazado tres circunferencias: La primera con centro en el punto A, pasa por los puntos C y E; la segunda, con centro en el punto B, pasa por los puntos O y C; la tercera, con centro en el punto F, pasa por los puntos O y E. Hallar el área de la figura limitada por los tres circunferencias mencionadas situada en el interior del hexágono.

A) $\pi a^2/2$ B) $\pi a^2/3$ C) $\pi a^2/6$

D) $\pi a^2/4$ E) $\pi a^2/8$

**PROBLEMA N°197**

Las alturas del romboide ABCD miden 8 y 6. Calcule el área de la región sombreada (E, F y G son puntos de tangencia)




A) $(3\pi-5\sqrt{3})/2$

B) $6\pi-2\sqrt{3}$

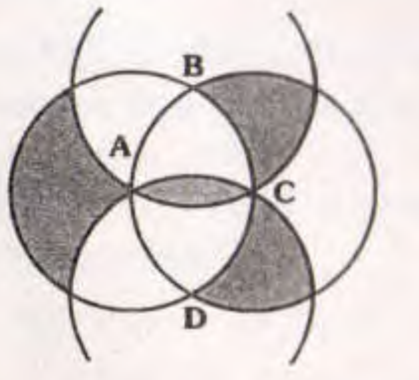
C) $3\pi-\sqrt{3}$

D) $4(2\pi-\sqrt{3})$

E) $\frac{4}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$

**PROBLEMA N°198**

Hallar el área de la región sombreada que se indica en la figura. Si el radio de los círculos es $\sqrt{3}$ y A, B, C, D son lo centros.




A) $\pi$

B) $2\pi$

C) $3\pi$

D) $4\pi$

E) $\pi(\sqrt{6}-2)$

**PROBLEMA N°199**

Dos círculos de igual radio están situados de forma que la distancia entre sus centros es igual al radio. Hallar la razón entre el área de la intersección de los círculos y la de un cuadrado inscrito en ella.

A) $\dfrac{(4\pi-3\sqrt{3})(4+\sqrt{7})}{27}$

B) $\dfrac{(2\pi-3\sqrt{3})(4-\sqrt{7})}{27}$

C) $\dfrac{(2\pi+3\sqrt{3})(2-\sqrt{7})}{27}$

D) $\dfrac{4}{9}(4\pi-3\sqrt{3})$  E) $\dfrac{8}{9}(4\pi-3\sqrt{3})$

**PROBLEMA N°200**

Un círculo de radio R se inscribe un cuadrado, en este cuadrado se inscribe otro círculo, en este otro cuadrado y así sucesivamente. Calcule la suma límite de las áreas de todos los círculos.

A) $4\pi R^2$  B) $3\pi R^2$  C) $14\pi R^2$

D) $5\pi R^2$  E) $2\pi R^2$

## ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

**PROBLEMA N°201**

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AD y en el triángulo ADC la ceviana interior DE.
Si $m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle DEC$ ; $m\sphericalangle DAC = 30°$ y $m\sphericalangle ACB = 7°$, calcule la razón de áreas de las regiones ABDE y EDC.

A) 11/25 B) 11/36 C) 7/25
D) 7/36 E) 11/16

**PROBLEMA N°202**

En el gráfico, A, P, T, C, D y E son puntos de tangencia. Si AB=BC y TP=1. Calcule el área de la región triangular ABC.

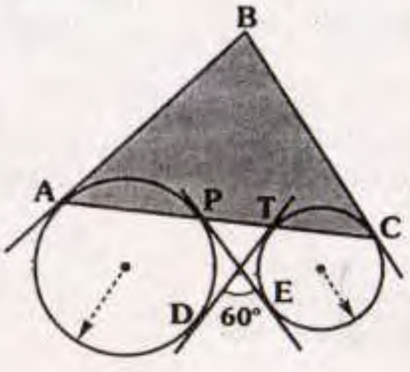
A) $\frac{49}{4}\sqrt{3}$

B) $36\sqrt{3}$

C) 36

D) 25

E) $25\sqrt{3}$




**PROBLEMA N°203**

Las circunferencias exinscritas relativas a los lados AB, BC y AC del triángulo ABC de inradio 2 e incentro I, son tangentes a dichos lados en P, Q y R respectivamente. Si $(S_{\Delta API})(S_{\Delta BIQ})(S_{\Delta RIC}) = 18$. Halle el área de la región ABC.

A) 18 B) 9 C) $9\sqrt{2}$
D) 16 E) 36

**PROBLEMA N°204**

En el triángulo ABC se traza la circunferencia inscrita, tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en P, Q y T respectivamente. Si $m\sphericalangle ABC = 2\alpha$ y la altura BH mide h, calcule la distancia de T hacia $\overleftrightarrow{PQ}$.,

A) $h\,\text{sen}\alpha$ B) $2h\,\text{sen}\alpha$ C) $h\cos\alpha$
D) $2h\cos\alpha$ E) $h\sec\alpha$

**PROBLEMA N°205**

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AD, luego se traza la ceviana interior BF perpendicular a $\overline{AD}$ en E. Si AB=5, AC=8 y BE=3. Calcule el área de la región triangular BDE.

A) 18/13 B) 15/13 C) 20/13
D) 25/13 E) 27/20

**PROBLEMA N°206**

Se tienen tres circunferencias concéntricas, se ubica un punto en cada circunferencia de tal manera que el área de la región triangular cuyos vértices son dichos puntos tenga área máxima. ¿Qué punto notable es el centro para dicho triángulo?

A) incentro B) circuncentro

C) ortocentro D) punto de Fermat

E) baricentro

**PROBLEMA N°207**

Si los lados de un triángulo rectángulo se encuentran en progresión aritmética de razón K. Calcule el área de la región triangular formada al unir los excentros.

A) $20K^2$ B) $50K^2$ C) $40K^2$

D) $30K^2$ E) $60K^2$

**PROBLEMA N°208**

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia, $m\widehat{AB} = 2(m\measuredangle NPB)$ y $(PH)(NP)=10$, calcule el área de la región sombreada.

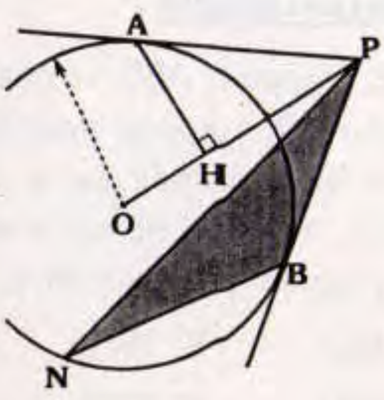
A) 4

B) 3

C) 5

D)7,5

E) 8




**PROBLEMA N°209**

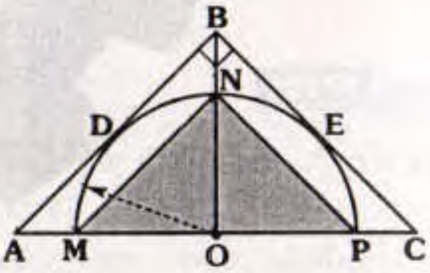
En un paralelogramo ABCD en $\overline{AB}$ se ubica el punto M, tal que $\overline{BD} \cap \overline{MC} = \{N\}$. Si las áreas de las regiones BCN y NCD son $A_1$ y $A_2$ calcular el área de la región triangular MAD en función de $A_1$ y $A_2$.

A) $\dfrac{A_2^2 - A_1^2}{A_2}$ B) $\dfrac{A_2^2 + A_1^2}{A_2}$ C) $\dfrac{A_2^2 - A_1^2}{A_1}$

D) $\dfrac{A_2^2 + A_1^2}{A_1}$ E) $\dfrac{A_1^2 - A_2^2}{A_1}$

**PROBLEMA N° 210**

En el gráfico mostrado, O; centro AB=a y BC=b. Calcule el área de la región triangular MNP.(D y E son puntos de tangencia).




A) $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$ B) $\dfrac{a^2b^2}{a\sqrt{a^2+b^2}}$

C) $\dfrac{a^2b^2}{(a+b)\sqrt{2(a^2+b^2)}}$ D) $\dfrac{a^2 \cdot b^2}{2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$

E) $\dfrac{2a^2b^2}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$

**PROBLEMA Nº 211**

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior BP tal que: $m\measuredangle ABP=3(m\measuredangle BAC)$.
Si AC=3(BP)=12, calcule el área de la región triangular ABC.

A) $7\sqrt{3}$ B) $5\sqrt{6}$ C) $6\sqrt{5}$

D) $9\sqrt{7}$ E) $6\sqrt{7}$

**PROBLEMA Nº 212**

Según el gráfico AD=DB=2(BE), DM=ME. Calcule la razón de áreas de las regiones triangulares ABC y PMQ.

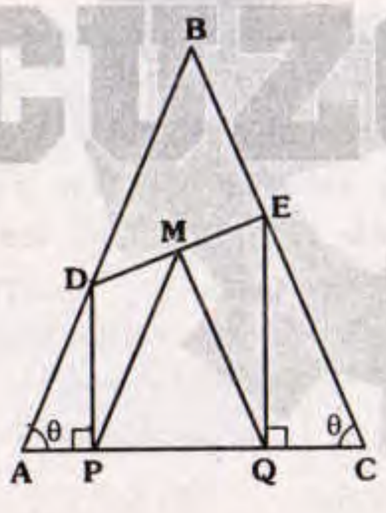
A) $\frac{16}{15}$

B) $\frac{8}{5}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{32}{5}$

E) $\frac{64}{15}$




**PROBLEMA Nº 213**

En la diagonal AC de un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B se ubica el punto M, luego se traza $\overline{MH}\perp\overline{AB}$ ($H\in\overline{AB}$). BH=a y AD=b, calcule el área de la región MCD.

A) ab B) $ab\sqrt{3}$ C) $ab\sqrt{2}$

D) $\frac{ab}{4}$ E) $\frac{ab}{2}$

**PROBLEMA Nº 214**

Se tiene el cuadrante AOB (O es centro) en $\overset{\frown}{AB}$ se ubica en M, se prolonga $\overline{AM}$ y se ubica N, tal que $m\measuredangle MNB=90°$. Si la razón de áreas de las regiones triangulares AOB y MNB es 2,5. Halle $m\overset{\frown}{AM}$.

A) 45° B) 37° C) 53°

D) 60° E) 67,5°

**PROBLEMA Nº 215**

Se tiene el rectángulo ABCD, P en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$. Si: $S_{(PAD)}=5$; $S_{(PBQ)}=3$ y $S_{(QCD)}=4$. Halle $S_{(PQD)}$.

A) $\sqrt[3]{60}$ B) 8 C) $\sqrt{21}$

D) $2\sqrt{15}$ E) 12

**PROBLEMA Nº 216**

En el gráfico, $AP=\sqrt{2}$ y AE = BC, calcule el área de la región sombreada.

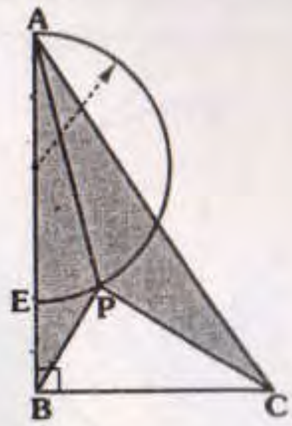
A) 2

B) $2\sqrt{2}$

C) $\sqrt{2}$

D) 1

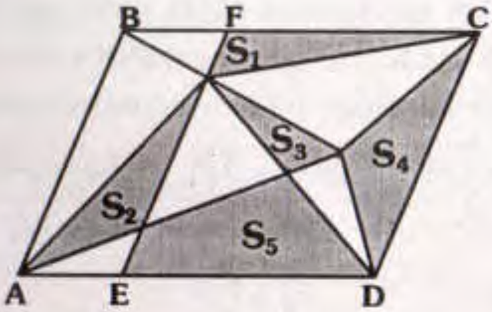
E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$




**PROBLEMA Nº 217**

En la figura, ABCD es un romboide, $\overline{FE}\parallel\overline{AB}$, $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ y $S_5$ son las áreas

de las regiones sombreadas, halle la relación entre ellas.




A) $S_1+S_5=S_2+S_3+S_4$

B) $S_1+S_2+S_4=S_3+S_5$

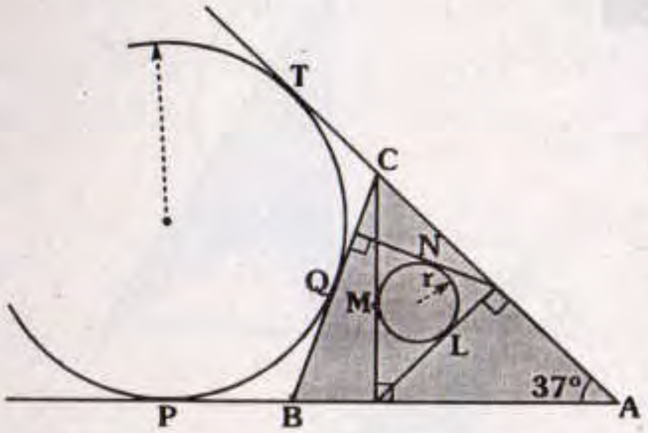
C) $S_1+S_2=S_5+S_3-S_4$

D) $S_1+S_3+S_5=S_2+S_4$

E) $S_1+S_2+S_3=S_4+S_5$

**PROBLEMA Nº 218**

En la figura, P, Q, T, N, L y M son puntos de tangencia, si $(PA)r=36u^2$, calcule el área de la región ABC.




A) $72\mu^2$ B) $76\mu^2$ C) $75\mu^2$

D) $78\mu^2$ E) $81\mu^2$

**PROBLEMA Nº 219**

En un triángulo rectángulo la circunferencia inscrita es tangente a los catetos en P y Q y a la hipotenusa en M. Calcule la distancia de M a $\overline{PQ}$ sabiendo que la suma de las inversas de los exradios relativos a los catetos del triángulo mencionado es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y el circunradio es $6\sqrt{2}$.

A) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ B) 2 C) $\frac{7}{3}$

D) $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ E) $\frac{6}{5}\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 220**

En un triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores AM, BP y BQ ($P\in\overline{AQ}$), $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ intersecan a $\overline{AM}$ en T y L respectivamente $\overline{PM}$, $\overline{TC}$ y $\overline{BQ}$ son concurrentes. Si $m\measuredangle BAM=15°$, $m\measuredangle TBL=m\measuredangle BMT$, AT=2 y LM=3, calcule el área de la región triangular TBL.

A) $1u^2$ B) $0,5u^2$ C) $2u^2$

D) $2,5u^2$ E) $3u^2$

## ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

**PROBLEMA Nº 221**

En el cuadrilátero inscrito ABCD, se ubica M en $\overline{CD}$ tal que las regiones ABCM y ADM son equivalentes e isoperimétricas. Si $m\widehat{AD}=120°$ y $m\widehat{BC}=50°$, halle $m\widehat{CD}$

A) 70°   B) 60°   C) 120°

D) 50°   E) 80°

**PROBLEMA Nº 222**

Se tiene el cuadrilátero bicéntrico ABCD, con AB=6, BC=5 y CD=9, calcule el radio de la circunferencia inscrita.

A) 1   B) 2   C) 3   D) $2\sqrt{3}$   E) $3\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 223**

En el gráfico, AT=5, TS=3 y PM=MH=2. Calcule el área de la región romboidal ANML (T es punto de tangencia)

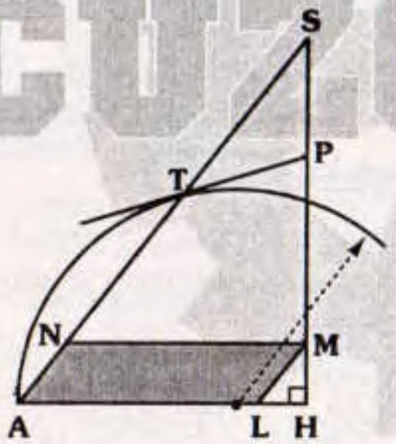
A) $\frac{8}{3}\sqrt{7}$

B) $8\sqrt{7}$

C) $3\sqrt{7}$

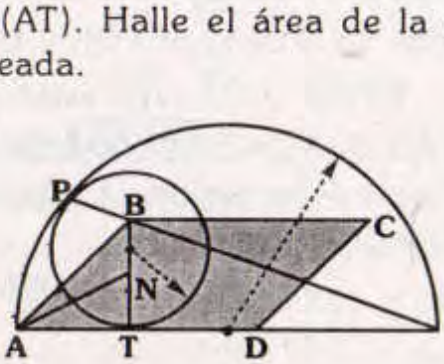
D) $\frac{3}{8}\sqrt{7}$

E) $\frac{8}{3}\sqrt{5}$




**PROBLEMA Nº 224**

En el gráfico, BN=NT, AN=$2\sqrt{5}$ y TD=2(AT). Halle el área de la región sombreada.




A) 48   B) 36   C) 42

D) 54   E) 40

**PROBLEMA Nº 225**

En el gráfico, BP=PT=3 y PD=2, calcule el área de la región sombreada (P, Q y T son puntos de tangencia)

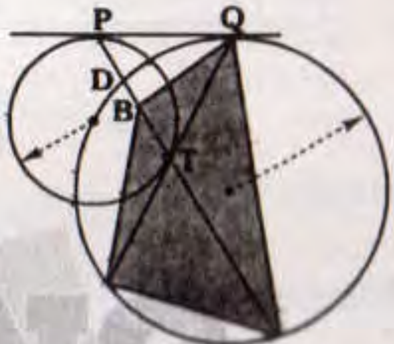
A) $6\sqrt{15}$

B) $\frac{63}{5}\sqrt{15}$

C) $\frac{63}{2}\sqrt{15}$

D) $12\sqrt{15}$

E) $9\sqrt{15}$




**PROBLEMA Nº 226**

Calcule el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero MBCN, si $m\widehat{EA}=m\widehat{AD}$, NC = 4cm, MN = 3cm y el área de la región sombreada es igual a $6\sqrt{10}cm^2$.

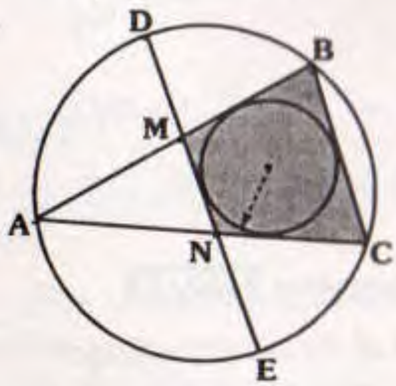
A) $\frac{2}{3}\sqrt{10}$cm

B) $\sqrt{5}$cm

C) $2\sqrt{3}$cm

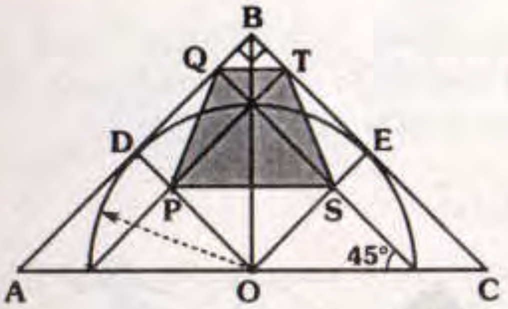
D) $\frac{3}{4}\sqrt{5}$cm

E) $\frac{2}{3}\sqrt{5}$cm



**PROBLEMA Nº 227**

En la figura, calcule el área de la región sombreada, si PS=8m (D y E son puntos de tangencia)

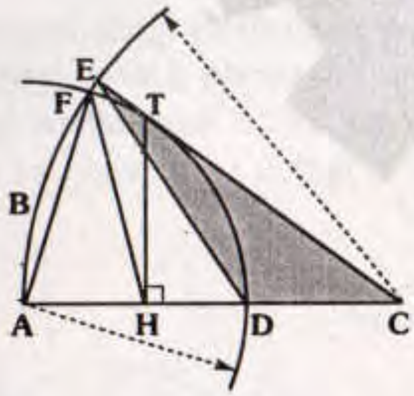



A) $64m^2$ B) $32\sqrt{2}m^2$ C) $32m^2$

D) $16\sqrt{2}m^2$ E) $128m^2$

**PROBLEMA Nº 228**

En la figura, T es punto de tangencia si; $m\measuredangle AFH = m\overset{\frown}{AF}$, FH = 6μ y AH = 2(HD), calcule el área de la región sombreada.




A) 9 B) $9\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{2}$

D) $9\sqrt{5}$ E) $9\sqrt{7}$

**PROBLEMA Nº 229**

En el trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, se tiene que BC=a, AD=b y AB=h. En $\overline{AB}$ se ubica el punto P tal que el perímetro de la región triangular CPD es mínimo. Calcule el área de la región triangular CPD.

A) $\left(\frac{a+b}{4}\right)h$ B) $\left(\frac{a+b}{3}\right)h$ C) $\frac{abh}{a+b}$

D) $\frac{h\sqrt{ab}}{2}$ E) $\frac{h\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

**PROBLEMA Nº 230**

En un rombo ABCD en $\overline{BC}$ se ubica el punto medio M. Las diagonales del rombo intersectan a $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$ en N y Q respectivamente. si: NQ=5u y $m\measuredangle BAD = 74$. Calcule el área de la región limitada por el rombo.

A) $284u^2$ B) $216u^2$ C) $324u^2$

D) $356u^2$ E) $420u^2$

**PROBLEMA Nº 231**

Halle el área de una región limitada por un trapecio bicéntrico, cuyas bases miden 4m y 9m.

A) $25m^2$ B) $30m^2$ C) $39m^2$

D) $36m^2$ E) $24m^2$

**PROBLEMA Nº 232**

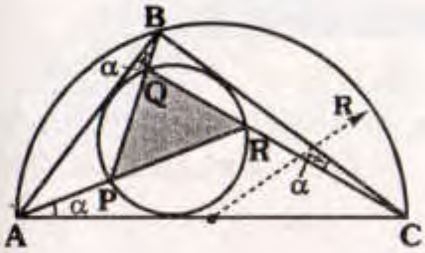
En un trapecio ABCD ($\overline{BC}//\overline{AD}$) AD=4BC, se inscribe un rectángulo PQRS, tal que $Q\in\overline{AB}$, $R\in\overline{CD}$ y $\overline{PS}\subset\overline{AD}$ están ubicados en $\overline{AD}$. Si AQ=2(QB), calcule la razón de áreas de las regiones limitadas por dichos cuadriláteros.

A) 8/19 B) 7/16 C) 8/5

D) 2/3 E) 8/15

**PROBLEMA Nº 233**

En el gráfico, r es inradio del triángulo ABC. Calcule el área de la región PQR.




A) $\frac{r^3}{R^2}(2R+r)$ B) $\frac{R^3}{r^2}(2R-r)$

C) $\frac{R^2}{r}(2R+r)$ D) $\frac{R^2}{r}(2R-r)$

E) $\frac{r^2}{R}(2R-r)$

**PROBLEMA Nº 234**

Se tiene los cuadrados ABCD y MNLP tal que A, D, L y N están sobre una circunferencia de radio R, $\overline{BC}\subset\overline{MP}$, $\overline{AD}$ y $\overline{NL}$ están en distintos semiplanos respecto de $\overline{MP}$. Si $R=\sqrt{10}$ y CD=2, calcule el área de la región MNLP.

A) 400 B) $\frac{324}{25}$ C) 100

D) 320 E) $\frac{64}{5}$

**PROBLEMA Nº 235**

En el cuadrilátero circunscrito ABCD, se cumple $m\sphericalangle BAQ=37°$, $m\sphericalangle ABC=90°$, DC=NQ=5 y AD+BC=21. N está en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{AD}$ tal que $\overline{NQ}$ es tangente a la circunferencia. Calcule el área de la región pentagonal NBCDQ.

A) 56 B) 48 C) 40

D) 60 E) 50

**PROBLEMA Nº 236**

Calcule el área de una región rectangular cuya base y altura son las diagonales de un cuadrilátero del que se conocen "R" radio de la circunferencia circunscrita, "r" radio de la inscrita y "d" distancia de centros.

A) $\frac{8R^2r^2}{R^2-d^2}$ B) 8Rr C) $\frac{4R^2r^2}{R^2-d^2}$

D) $\frac{8R^2r^2}{R^2+d^2}$ E) $\sqrt{R^2+r^2+d^2}$

**PROBLEMA Nº 237**

En un cuadrilátero inscriptible ABCD, se cumple que AC=CD, $m\sphericalangle ACD=90°$, $AB=\ell$ y $BC=\ell\sqrt{2}$. Calcule el área de la región cuadrangular ABCD.

A) $2\ell^2$ B) $3\ell^2$ C) $4\ell^2$

D) $3\sqrt{5}\ell^2$ E) $\frac{3}{2}\sqrt{5}\ell^2$

**PROBLEMA Nº 238**

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si en una región triangular se conocen las longitudes de dos lados y la medida de un ángulo entonces se puede conocer el área de dicha región.

II. En el plano de la región paralelográmica ABCD se ubica el punto P entonces se cumple:

$$A_{\Delta APD}+A_{\Delta BPC}=\frac{1}{2}A_{\square ABCD}$$

III. Si en un triángulo se conocen el inradio y los exradios relativos a dos de sus lados, se puede conocer el área de la región que limita.

A) VFV B) VVF C) FVV

D) FVF E) FFV

**PROBLEMA Nº 239**

En el gráfico, N es punto de tangencia. Si BM=2 y MN=3, calcule el área de la región sombreada.

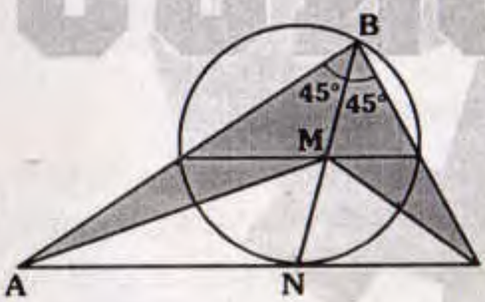
A) 7,5

B) 10

C) 12

D) 12,5

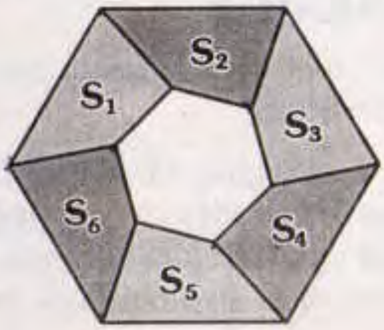
E) 15




**PROBLEMA Nº 240**

En el gráfico, ABCDEF y LMNPQR son hexágonos regulares. Demostrar que

$$S_1+S_3+S_5=S_2+S_4+S_6$$




## ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

**PROBLEMA Nº 241**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia, si ABCD es un cuadrado, AM=2 y MB=7. Calcule el área del círculo mostrado.

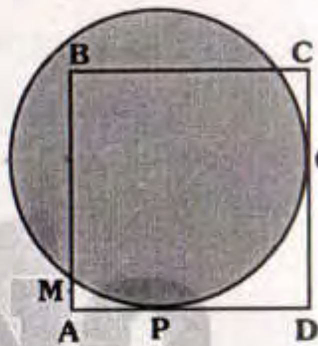
A) $36\pi$

B) $9\pi$

C) $25\pi$

D) $49\pi$

E) $\frac{81}{4}\pi$




**PROBLEMA Nº 242**

Se tiene el triángulo isósceles ABC donde la base $\overline{AC}$ mide $2\sqrt{2}$ y las medianas relativas a los lados de igual longitud son perpendiculares. Calcule el área del segmento circular determinado por $\overline{AB}$ en el círculo circunscrito al triángulo ABC.

A) $\frac{715}{72}\pi-\frac{15}{2}$ B) $\frac{715}{72}\pi+\frac{15}{2}$

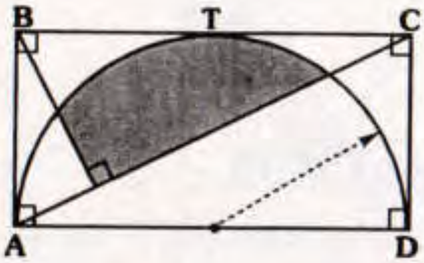
C) $\frac{725}{72}\pi-\frac{15}{2}$ D) $\frac{725}{72}\pi+\frac{15}{2}$

E) $\frac{725}{72}\pi-15$

**PROBLEMA Nº 243**

En el gráfico, calcule el área de la región

sombreada. Si $AB = 2\sqrt{5}$ y T es punto de tangencia.

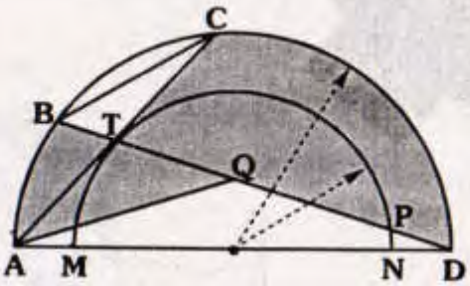



A) $\frac{4}{5}\pi+7$  B) $\frac{3}{4}\pi+7$  C) $\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{2}$

D) $\frac{6}{7}\pi+3$  E) $\frac{7\pi}{4}+3$

**PROBLEMA Nº 244**

En la figura, T es punto de tangencia, TQ=QP, BC=6 y $m\widehat{TP}=120°$, calcular el área de la región sombreada.




A) $6\pi$  B) $9\pi$  C) $12\pi$

D) $15\pi$  E) $18\pi$

**PROBLEMA Nº 245**

A, B y C son vértices consecutivos de un hexágono regular. Calcule el área de la región sombreada.

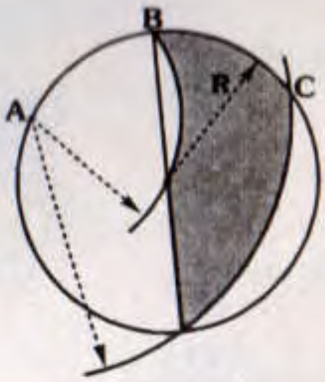
A) $R^2\frac{(\pi-\sqrt{3})}{2}$

B) $R^2\frac{(2\pi-\sqrt{2})}{4}$

C) $\frac{R^2(2\pi-\sqrt{3})}{3}$

D) $R^2\frac{(2\pi-\sqrt{2})}{3}$

E) $R^2\frac{(2\pi-\sqrt{3})}{4}$




**PROBLEMA Nº 246**

El triángulo rectángulo ABC esta inscrito en la circunferencia $\mathscr{C}$, cuyo diámetro es $\overline{AC}$, si AB=6 y BC=8. Calcule el área del círculo tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a $\mathscr{C}$.

A) $12\pi$  B) $6\pi$  C) $4\pi$  D) $9\pi$  E) $16\pi$

**PROBLEMA Nº 247**

Se tiene el cuadrilátero PRAH circunscrito a una circunferencia de centro O. M y Q son puntos de tangencia con $\overline{PR}$ y $\overline{PH}$, la prolongación de $\overline{RO}$ corta a $\overline{QH}$ en B. Si $HA+HB=6\sqrt{3}$ y $m\measuredangle RPQ = m\measuredangle PHA = 60°$. Calcule el área del sector circular MOQ.

A) $3\pi$  B) $4\pi$  C) $6\pi$  D) $8\pi$  E) $12\pi$

**PROBLEMA Nº 248**

En el gráfico, $m\widehat{BC}+m\widehat{ABD}=180°$, calcule el área de la región sombreada.

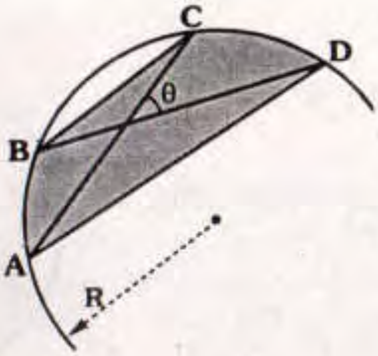
A) $\pi R^2 \dfrac{(90°-\theta)}{90°}$

B) $\pi R^2 \dfrac{\theta}{180°}$

C) $\pi R^2 \dfrac{\theta}{90°}$

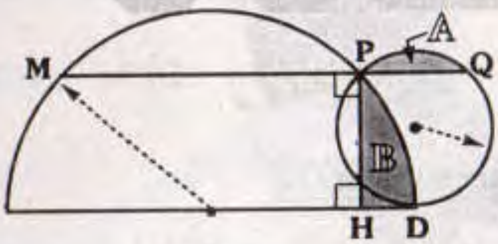
D) $\pi R^2 \dfrac{\theta}{270°}$

E) $\pi R^2 \dfrac{(90°-\theta)}{180°}$




**PROBLEMA Nº 249**

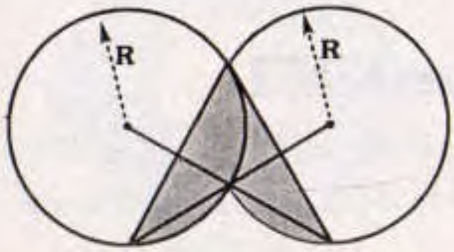
En el gráfico, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son las áreas de las regiones sombreadas. Si $\mathbb{B}=2\mathbb{A}$, calcule $\dfrac{PQ}{PM}$ (D es punto de tangencia)




A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4
D) 3/5 E) 2/3

**PROBLEMA Nº 250**

Del gráfico, calcule el área de la región sombreada, si el ángulo entre las circunferencias mide 60°.




A) $\dfrac{\pi R^2}{2}$ B) $\dfrac{\pi R^2}{4}$ C) $\dfrac{\pi R^2}{6}$

D) $\dfrac{\pi R^2}{3}$ E) $\dfrac{\pi R^2}{8}$

**PROBLEMA Nº 251**

Dado un romboide ABCD, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto E, tal que el cuadrilátero DBCE es inscriptible. Calcule el área del círculo circunscrito a dicho cuadrilátero.
Si: $m\overset{\frown}{CD}=106°$, CD=8u y AE=ED.

A) $16\pi u^2$ B) $25\pi u^2$ C) $36\pi u^2$

D) $49\pi u^2$ E) $5\sqrt{2}\pi u^2$

**PROBLEMA Nº 252**

Del gráfico, calcule $A_1+A_2-A_3$; si R=6cm; $A_1$; $A_2$ y $A_3$ son las áreas de las regiones sombreadas.

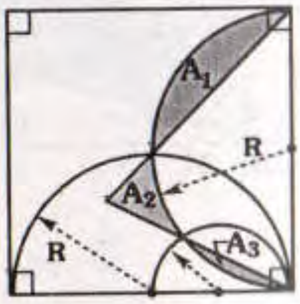
A) $6cm^2$

B) $3cm^2$

C) $9cm^2$

D) $12cm^2$

E) $6\sqrt{2}cm^2$




**PROBLEMA Nº 253**

En la figura mostrada se tiene 3 circunferencias secantes y congruentes de radios 1cm respectivamente. Calcular el área de la región sombreada (O y $O_1$ son centros)

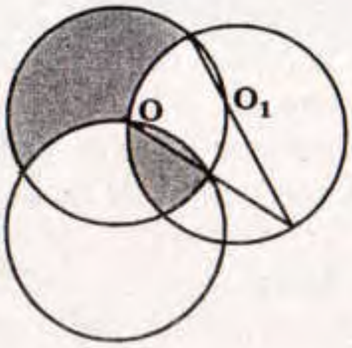
A) $\pi \text{cm}^2$

B) $\dfrac{\pi}{2}\text{cm}^2$

C) $2\pi \text{cm}^2$

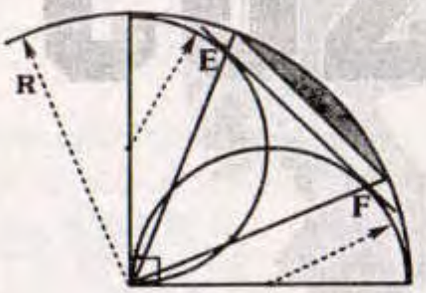
D) $\dfrac{3\pi}{2}\text{cm}^2$

E) $\dfrac{\pi}{4}\text{cm}^2$




**PROBLEMA Nº 254**

En el gráfico, E y F son puntos de tangencia. Halle el área de la región sombreada, si:



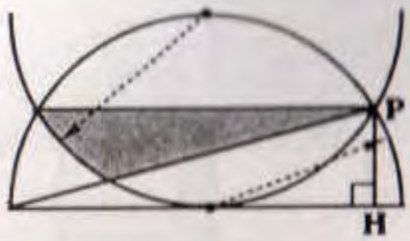

A) $R^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{2}\right)$ B) $\dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$

C) $R^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{2}\right)$ D) $\dfrac{R^2}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)$

E) $\dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

**PROBLEMA Nº 255**

En el gráfico, O es punto de tangencia. Si PH=2, calcule el área de la región sombreada.



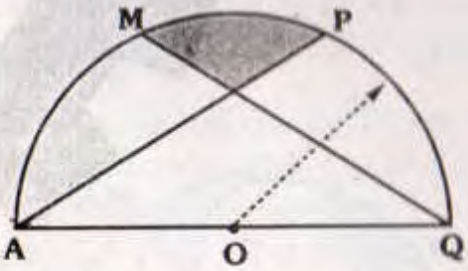

A) $\dfrac{4}{3}\pi+8-4\sqrt{3}$ B) $\dfrac{4}{3}\pi+8+4\sqrt{3}$

C) $\dfrac{4}{3}\pi-8-4\sqrt{3}$ D) $\dfrac{4}{3}\pi+8-3\sqrt{3}$

E) $4\pi+8-3\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 256**

Calcule el área de la superficie sombreada a partir del gráfico, si: $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MP}=\overset{\frown}{PB}$



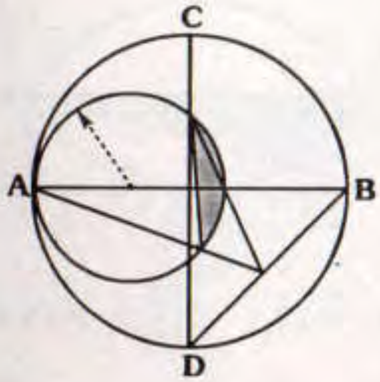

A) $(R/3)(\pi+\sqrt{3})$ B) $(R^2/6)(\pi+\sqrt{3})$

C) $(R/12)(\pi-\sqrt{3})$ D) $R(\pi-\sqrt{3})$

E) $(R^2/6)(\pi-\sqrt{3})$

**PROBLEMA Nº 257**

Halle el área de la región sombreada si el radio menor mide 2cm y los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares.



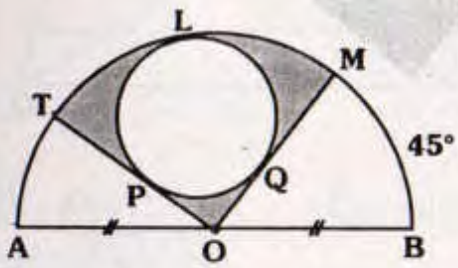

A) $(\pi-1)cm^2$ B) $(\pi-2)cm^2$

C) $(\pi-3)cm^2$ D) $\pi cm^2$

E) N.A.

**PROBLEMA Nº 258**

Calcule en forma aproximada el área de la región sombreada, si el radio de la semicircunferencia es de 1m. P, L y Q son puntos de tangencia, $m\widehat{AT}=29°$ y $m\widehat{BM}=45°$.




A) $0,5m^2$ B) $0,4m^2$ C) $0,3m^2$

D) $0,2m^2$ E) $0,1m^2$

**PROBLEMA Nº 259**

En la figura, calcule el área de la región sombreada, si las tres circunferencias son tangentes y R=6cm, r=3cm.(M, N, Q, S y T son puntos de tangencia)

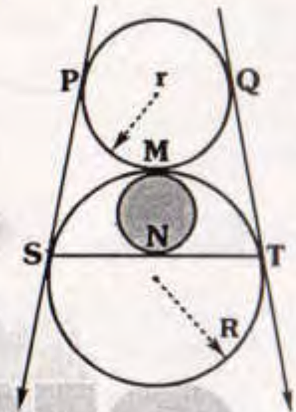
A) $4\pi cm^2$

B) $3\pi cm^2$

C) $2\pi cm^2$

D) $\pi cm^2$

E) $\pi/2cm^2$




**PROBLEMA Nº 260**

En una circunferencia de diámetro AB se traza una circunferencia que es tangente al diámetro AB y el arco AB en T y N respectivamente. Si: AT=2u y TB=8u. Calcule el área del círculo menor.

A) $\frac{64\pi}{5}u^2$ B) $\frac{8\pi}{25}u^2$ C) $\frac{64\pi}{81}u^2$

D) $\frac{64\pi}{25}u^2$ E) $\frac{16\pi}{25}u^2$

# Problemas Propuestos

## Ciclo Repaso

**PROBLEMA Nº 261**

En la siguientes proposiciones indique el valor de verdad

I. Si dos regiones triangulares tienen el mismo perímetro entonces sus áreas son iguales.

II. Si un cuadrado y un triángulo equilátero tienen la misma área entonces el lado mayor es del cuadrado.

III. Se cumple siempre para dos regiones triangulares a mayor perímetro mayor área.

A) VFF B) FFV C) VFV
D) FFF E) FVF

**PROBLEMA Nº 262**

En un triángulo ABC las alturas se cortan en "O". Si (AC)(OB)=42. Calcule el área del cuadrilátero ABCO.

A) 42 B) 21 C) 18
D) 38 E) 14

**PROBLEMA Nº 263**

En un triángulo ABC cuyos lados miden 5, 6 y 7. Halle el producto del inradio y el circunradio.

A) 32/6 B) 37/6 C) 35/6
D) 37/2 E) 32/5

**PROBLEMA Nº 264**

Calcular el área de una región triangular cuyas alturas miden 12, 15 y 20

A) 300 B) 150 C) 75
D) 120 E) 90

**PROBLEMA Nº 265**

Los lados AB, BC y AC de un triángulo, ABC miden 13cm, 14cm y 15cm. Calcular el área de la región triangular AIC, siendo "I" el incentro.

A) 30 B) 42 C) 15 D) 20 E) 36

**PROBLEMA Nº 266**

Un triángulo rectángulo ABC está inscrito en una circunferencia. La bisectriz interior BD prolongada corta a la circunferencia en F. Si BD=4 y DF=6. Hallar el área de la región triangular ABC.

A) 32 B) 40 C) 20 D) 16 E) 24

**PROBLEMA Nº 267**

Calcule el área de una región triangular rectangular, sabiendo que el inradio mide 3m y el circunradio 8,5m.

A) 28 $m^2$ B) 50 $m^2$ C) 60 $m^2$
D) 54 $m^2$ E) 70 $m^2$

**PROBLEMA Nº 268**

El área de un triángulo ABC es igual a $36u^2$. Calcule el área del trapecio que se determina al trazar una paralela a uno de sus lados por el baricentro.

A) $16u^2$ B) 20 C) 18 D) 22 E) 36

**PROBLEMA Nº 269**

En un triángulo ABC de $48m^2$ de área se ubica el punto "F" sobre AB de modo que AB = 3BF y "M" es punto medio de BC. Calcule el área de AFMC.

A) $32m^2$ B)40 C) 16 D) 24 E) 36

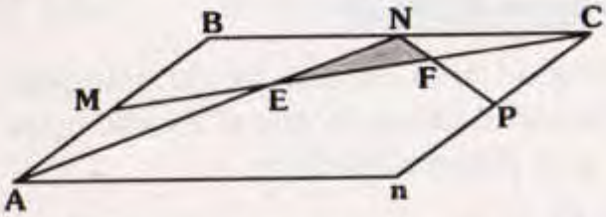
**PROBLEMA Nº 270**

En un triángulo rectángulo ABC la circunferencia inscrita determina sobre los catetos AB y BC los puntos "E" y "F" respectivamente. Si AE=8 y FC=10. Halle el área de la región triangular ABC.

A) 40u B) 60 C) 50 D) 80 E) 120

**PROBLEMA Nº 271**

En el gráfico, ABCD es un romboide, AM=MB, PC=PD y BN = NC. Si el área de la región sombreada es 24, calcule el área de la región ABCD.




A) 378 B) 276 C) 476

D) 867 E) 576

**PROBLEMA Nº 272**

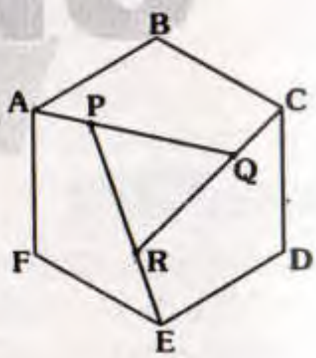
El área de la región triangular determinada por las medianas de un triángulo ABC es 24. Calcule el área de la región ABC.

A) 28 B) 36 C) 42

D) 38 E) 32

**PROBLEMA Nº 273**

En el gráfico mostrado ABCDEF es un hexágono regular con 2m de lado y el triángulo PQR es equilátero. ¿Cuánto debe medir $\overline{AP}$ para que las cuatro regiones determinadas sean equivalentes?




A) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

B) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

C) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

D) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

E) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{3}}{2}$

**PROBLEMA Nº 274**

Calcule la razón entre las áreas de dos regiones triangulares, sabiendo que los lados de uno de ellos son congruentes a las medianas del otro.

A) 1 B) 4/3 C) 2

D) 1/2 E) 2/3

**PROBLEMA Nº 275**

El área de la región triangular ABC es 120m² BM=MC y AE=EF=FC. Calcule el área de la región cuadrangular EPQF.

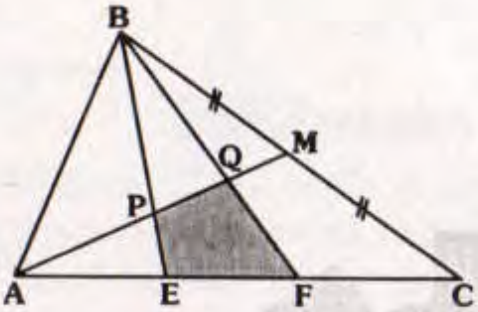
A) 18m²

B) 15m²

C) 20m²

D) 21m²

E) 22m²




**PROBLEMA Nº 276**

Se tiene un triángulo acutángulo ABC de circuncentro "O" en el cual se trazan los diámetros $\overline{AF}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CE}$ de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Calcule el área de la región triangular ABC, si las áreas de las regiones triangulares AEB, BFC y AMC son 9m², 16m² y 25m² respectivamente.

A) 31m² B) 72m² C) 144m²

D) 50m² E) 100m²

**PROBLEMA Nº 277**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si dos rectángulos son isoperimétricos, entonces son equivalentes.

II. Si dos regiones polígonales regulares son isoperimétricos, entonces tendrá mayor área el que tiene mayor número de lados.

III. Si de una región triangular se conoce las longitudes de dos lados y la altura relativa a cualquier lado, entonces se conoce su área.

A) FVV B) FFF C) VFV

D) VVV E) FFV

**PROBLEMA Nº 278**

Si ABCD es un romboide, hallar el área sombreada si M, N, L y P son puntos medios. $S_{ABCD}$ es 12m

A) 1m²

B) 2m²

C) 3m²

D) 4m²

E) 6m²

**PROBLEMA Nº 279**

En el gráfico mostrado las áreas de las regiones triangulares AEB, BFC y AGC son 9m², 16m² y 25m² respectivamente. Calcule el área de la región triangular ABC.

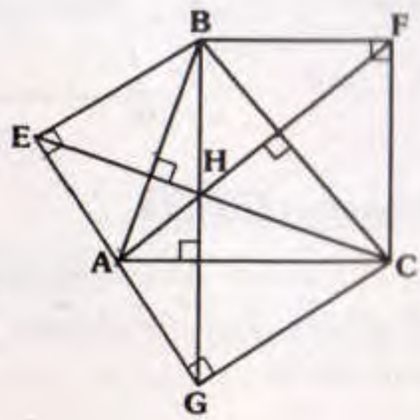
A) 31m²

B) 72m²

C) 144m²

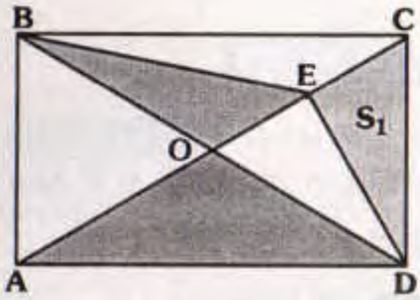
D) $\sqrt{963}\,m^2$

E) $\sqrt{961}\,m^2$



**PROBLEMA Nº 280**

En el gráfico calcular $S_1$, si las áreas de las regiones triangulares BOE y AOD son $4m^2$ y $9m^2$ respectivamente.




A) $5m^2$ B) $2m^2$ C) $6{,}5m^2$

D) $4{,}5m^2$ E) $3m^2$

**PROBLEMA Nº 281**

Si el área de la región del trapecial ABCD es $9m^2$. Calcular el área de la región sombreada, siendo: AN=NM=MB; BE=EF=FC ; CP=PQ=QD y AH=HL=LD.

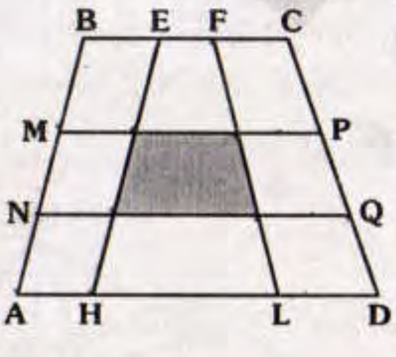
A) $1m^2$

B) $2m^2$

C) $3m^2$

D) $4m^2$

E) $1{,}5m^2$




**PROBLEMA Nº 282**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y $BP=4\sqrt{2}$. Calcule el área de la región sombreada.

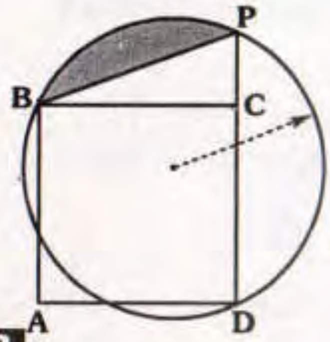
A) $4(\pi-1)$

B) $4(\pi-\sqrt{2})$

C) $8(\pi+1)$

D) $4(2\pi+1)$

E) $4(\pi-2)$




**PROBLEMA Nº 283**

En un triángulo ABC equilátero cuyo lado mide L unidades considerando como diámetro la altura $\overline{BH}$ se dibuja una circunferencia. Hallar el área de la región común que limitan el triángulo equilátero y la circunferencia.

A) $\frac{L^2}{32}(2\pi+3\sqrt{3})$ B) $\frac{L^2}{16}(2\pi+3\sqrt{3})$

C) $\frac{L^2}{48}(2\pi+3\sqrt{3})$ D) $\frac{L^2}{12}(2\pi+3\sqrt{3})$

E) $\frac{L^2}{18}(2\pi+3\sqrt{3})$

**PROBLEMA Nº 284**

Calcule el área de la región sombreada.

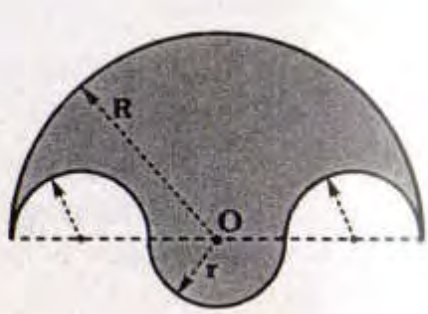
A) $\frac{\pi}{4}(R+r)^2$

B) $\frac{\pi}{4}(R-r)^2$

C) $\frac{\pi}{2}(R+r)^2$

D) $\frac{\pi}{2}(R-r)^2$

E) $\frac{\pi}{8}(R+r)^2$



**PROBLEMA Nº 285**

Calcule el área de la región sombreada, si: $MN=8\sqrt{2}m$ .("O" es centro)

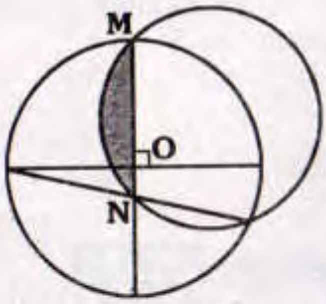
A) $(\pi-2)m^2$

B) $2(\pi-2)m^2$

C) $4(\pi-3)m^2$

D) $16(\pi-2)m^2$

E) $8(\pi-2)m^2$



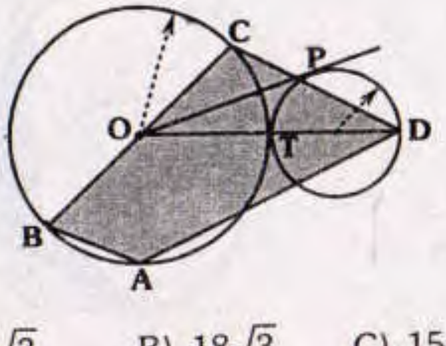

**PROBLEMA Nº 286**

En el triángulo acutángulo ABC, la prolongación de la altura $\overline{BH}$ interseca a la circunferencia circunscrita en P. Si $m\widehat{BC}=2(m\widehat{PC})$, BC=13 y HC=15. Halle el área del círculo inscrito en el triángulo ABH.

A) $\frac{49}{4}\pi$ B) $25\pi$ C) $16\pi$ D) $9\pi$ E) $81\pi$

**PROBLEMA Nº 287**

En el gráfico, $\overline{AB}//\overline{CD}$, P y T son puntos de tangencia. Si OP=6 y $m\widehat{AB}+m\widehat{CT}=60°$, calcule el área de la región sombreada.




A) $20\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $15\sqrt{3}$

D) $12\sqrt{3}$ E) $9\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 288**

Si: ABCD es cuadrado y CE=4, halle el área de la región sombreada.

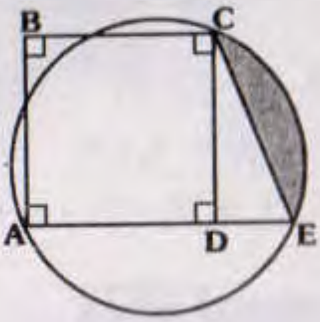
A) $2\pi-2$

B) $2\pi-3$

C) $2\pi-4$

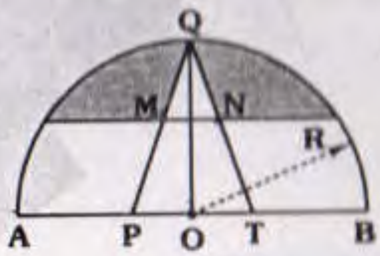
D) $2\pi+1$

E) $2\pi+2$




**PROBLEMA Nº 289**

Halle el área de la región sombreada, si $m\widehat{AQ}=m\widehat{QB}$, $\Delta PQT$ es equilátero $\overline{PM}=\overline{MQ}$ y QN=NT.



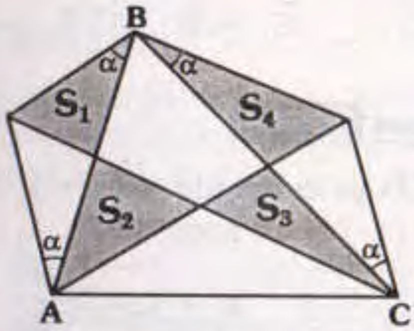

A) $\frac{R^2}{3}(\pi-\sqrt{3})$ B) $\frac{R^2}{4}(\pi-5)$

C) $\frac{R^2}{3}(\pi-3\sqrt{2})$ D) $\frac{R^2}{5}(2\pi-3)$

E) $\frac{R^2}{3}(\pi-\sqrt{3/2})$

**PROBLEMA Nº 290**

En el gráfico, indique la relación entre $S_1$, $S_2$, $S_3$ y $S_4$, si el triángulo ABC es escaleno.




A) $S_1.S_2 = S_3.S_4$  B) $S_1-S_2 = S_4-S_3$

C) $S_1+S_4 = S_2+S_3$  D) $S_1+S_2 = S_3+S_4$

E) $S_1.S_2.S_3.S_4=(S_1+S_2+S_3+S_4)$

**PROBLEMA Nº 291**

En la siguiente figura: 3(BC)=2(CD), $S_1$=12m² y $S_2$=5m². Calcule $S_x$.

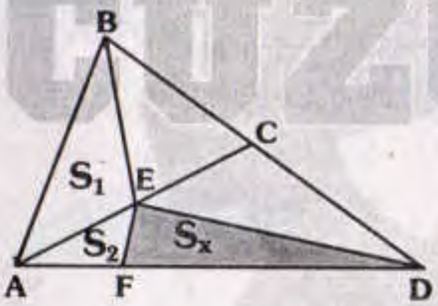
A) 10

B) 11

C) 12

D) 13

E) 7




**PROBLEMA Nº 292**

El área de la región triangular ABC es 24m², G es su baricentro, AM=MB y BN=NC. Calcule el área de la región triangular MGN.

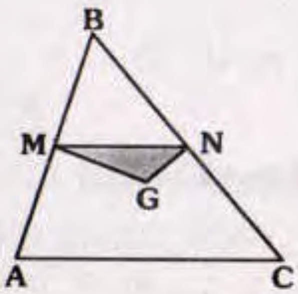
A) 2m²

B) 1m²

C) 0,5m²

D) 4m²

E) 1,5m²




**PROBLEMA Nº 293**

En un trapecio M, N son los puntos medios de las diagonales y P es el punto de corte de los lados no paralelos prolongados. Halle el área de MNP si el área del trapecio es S.

A) S/2  B) 2S/4  C) S/4

D) S/5  E) S

**PROBLEMA Nº 294**

En la figura, si (BM)(AQ)=(MC)(QC) halle la relación de las áreas de las regiones ABP y PMCQ.

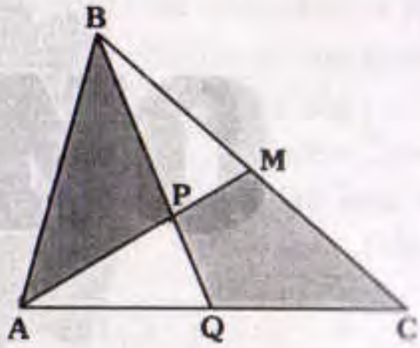
A) 13/15

B) 1

C) 13/14

D) 14/13

E) 11/13




**PROBLEMA Nº 295**

En la figura A, B, C son puntos de tangencia, calcule el área de la región sombreada.

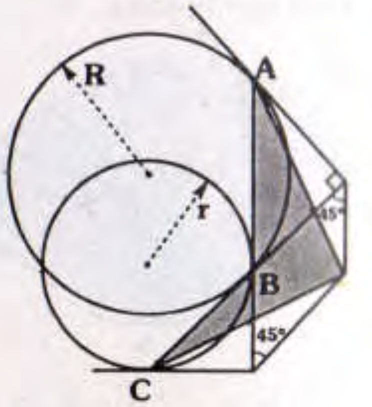
A) $\frac{R^2+r^2}{2}$

B) $\frac{R^2-r^2}{2}$

C) $\frac{2R^2+r^2}{4}$

D) $3R^2+2r^2$

E) $\frac{R^2+r^2}{3}$



**PROBLEMA Nº 296**

Se tiene una región hexagonal ABCDEF de área $60u^2$ y sus lados opuestos son paralelos y de igual longitud, calcule el área de la región triangular ACE

A) $10u^2$ B) $20u^2$ C) $30u^2$
D) $35u^2$ E) $40u^2$

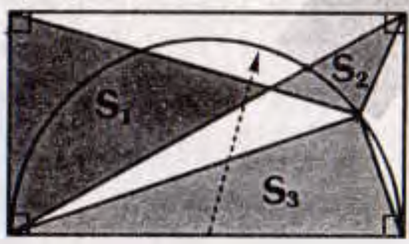
**PROBLEMA Nº 297**

En un triángulo ABC, AB=6u, BC=5u y AC=7u y de excentro E relativo a $\overline{BC}$, luego se traza $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ ($H \in \overline{AC}$). Calcule la razón de áreas de las regiones triangulares EHC y ABE.

A) 3/4 B) 2/5 C) 1/3
D) 1/6 E) 2/3

**PROBLEMA Nº 298**

Indique la relación entre $S_1$, $S_2$ y $S_3$.



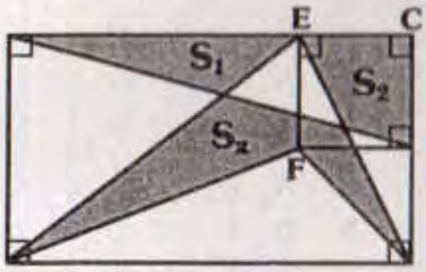

A) $S_1^2 = S_2S_3$ B) $S_1 = S_2 + S_3$

C) $S_3^2 = S_1 - S_2$ D) $S_3 = S_1 + S_2$

E) $S_3 = S_1 - 2S_2$

**PROBLEMA Nº 299**

En el gráfico, $S_1=4$, $S_2=9$ y EC=EF. Calcule $S_x$.




A) 13 B) 12 C) 6
D) 17 E) 11

**PROBLEMA Nº 300**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si un lado de una región triangular es un lado de una región rectangular y su área es la mitad de la región rectangular, entonces el vértice opuesto a dicho lado estará ubicado en la recta que contiene al lado opuesto en la región rectangular.

II. Si de una región triangular se conoce las longitudes de dos lados y la longitud de cualquier mediana, entonces se conoce su área.

III. Si dos segmentos circulares son equivalentes e isoperimétricos entonces los círculos que lo contienen tienen igual radio.

A) FVV B) VFF C) FFF
D) VVV E) FVF

# CLAVES DE RESPUESTAS

## ANUAL

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. C | 10. D | 19. D | 28. A | 37. B | 46. B | 55. A |
| 2. A | 11. A | 20. B | 29. C | 38. C | 47. C | 56. C |
| 3. A | 12. B | 21. B | 30. B | 39. C | 48. A | 57. E |
| 4. A | 13. A | 22. D | 31. D | 40. C | 49. B | 58. A |
| 5. D | 14. D | 23. D | 32. C | 41. E | 50. B | 59. D |
| 6. D | 15. B | 24. A | 33. D | 42. E | 51. C | 60. B |
| 7. B | 16. C | 25. A | 34. B | 43. A | 52. B | |
| 8. B | 17. C | 26. A | 35. D | 44. A | 53. A | |
| 9. B | 18. C | 27. B | 36. A | 45. B | 54. A | |

## CEPRE-UNI

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 61. B | 73. A | 85. A | 97. A | 109. C | 121. D | 133. C |
| 62. D | 74. E | 86. A | 98. D | 110. A | 122. A | 134. D |
| 63. C | 75. C | 87. C | 99. D | 111. A | 123. B | 135. B |
| 64. C | 76. A | 88. B | 100. E | 112. A | 124. D | 136. C |
| 65 A | 77. B | 89. * | 101. B | 113. E | 125. A | 137. B |
| 66. A | 78. A | 90. B | 102. E | 114. E | 126. B | 138. C |
| 67. C | 79. A | 91. B | 103. D | 115. D | 127. C | 139. C |
| 68. * | 80. B | 92. C | 104. E | 116. A | 128. A | 140. D |
| 69. B | 81. D | 93. C | 105. D | 117. D | 129. A | |
| 70. D | 82. B | 94. D | 106. B | 118. B | 130. A | |
| 71. E | 83. C | 95. C | 107. B | 119. C | 131. A | |
| 72. D | 84. B | 96. D | 108. C | 120. C | 132. D | |

(*) Demostración

## SEMESTRAL

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 141. C | 150. C | 159. A | 168. C | 177. C | 186. A | 195. A |
| 142. B | 151. A | 160. A | 169. A | 178. B | 187. C | 196. C |
| 143. A | 152. A | 161. B | 170. B | 179. C | 188. A | 197. E |
| 144. C | 153. E | 162. D | 171. C | 180. A | 189. C | 198. B |
| 145. B | 154. C | 163. A | 172. A | 181. C | 190. C | 199. D |
| 146. C | 155. A | 164. C | 173. C | 182. A | 191. A | 200. E |
| 147. D | 156. A | 165. B | 174. B | 183. B | 192. A | |
| 148. B | 157. C | 166. A | 175. D | 184. B | 193. C | |
| 149. C | 158. D | 167. B | 176. C | 185. A | 194. D | |

## SEMESTRAL INTENSIVO

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 201. A | 210. C | 219. C | 228. A | 237. B | 246. E | 255. A |
| 202. A | 211. D | 220. B | 229. C | 238. E | 247. A | 256. E |
| 203. B | 212. E | 221. A | 230. E | 239. D | 248. B | 257. B |
| 204. A | 213. E | 222. D | 231. C | 240. * | 249. E | 258. B |
| 205. A | 214. B | 223. A | 232. E | 241. C | 250. D | 259. A |
| 206. C | 215. B | 224. A | 233. A | 242. A | 251. B | 260. D |
| 207. D | 216. D | 225. E | 234. B | 243. C | 252. B | |
| 208. C | 217. A | 226. A | 235. A | 244. C | 253. B | |
| 209. A | 218. C | 227. C | 236. A | 245. E | 254. D | |

## REPASO

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 261. D | 267. C | 273. A | 279. E | 285. D | 291. E | 297. C |
| 262. B | 268. B | 274. B | 280. A | 286. A | 292. A | 298. B |
| 263. C | 269. B | 275. E | 281. A | 287. B | 293. C | 299. A |
| 264. B | 270. D | 276. D | 282. E | 288. C | 294. B | 300. A |
| 265. A | 271. E | 277. E | 283. A | 289. A | 295. A | |
| 266. C | 272. E | 278. C | 284. C | 290. B | 296. C | |

(*) Demostración